V.A. AMBARZUMJAN
E.R. MUSTEL u.a.

THEORETISCHE ASTROPHYSIK

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

V. A. AMBARZUMJAN
E. R. MUSTEL u. a.

THEORETISCHE ASTROPHYSIK

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

V. A. AMBARZUMJAN · E. R. MUSTEL u. a.

THEORETISCHE ASTROPHYSIK

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK
HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE
BAND 27

THEORETISCHE ASTROPHYSIK

VON

V. A. AMBARZUMJAN · E. R. MUSTEL U. A.

1957
VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN

В. А. АМБАРЦУМЯН, Э. Р. МУСТЕЛЬ
А. Б. СЕВЕРНЫЙ, В. В. СОБОЛЕВ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АСТРОФИЗИКА
Под редакцией В. А. Амбарцумяна
Гостехиздат, Москва 1952

Die Übersetzung besorgten I. Heller und E. A. Gußmann
Die Bearbeitung lag in den Händen von O. Singer
Die Autoren übernahmen freundlicherweise die Mühe des Korrekturlesens
und fügten Verbesserungen ein.
Verantwortlicher Verlagsredakteur: I. Scholz

Lizenz-Nr. 206 · 435/29/57
Gesamtherstellung VEB Offizin Andersen Nexö in Leipzig III/18/38

VORWORT DES REDAKTEURS

Die theoretische Astrophysik ist die Wissenschaft, welche die in den Himmelskörpern vor sich gehenden physikalischen Erscheinungen mit Hilfe der Gesetze der Physik erforscht und erklärt. Hierbei bedient sie sich in weitem Ausmaß der Mathematik, die jedoch nur die Rolle eines Hilfsmittels spielt.

Die theoretische Astrophysik ist eine junge und sich überaus schnell entwickelnde Wissenschaft. Ihre Erkenntnisse sind jedoch schon jetzt für alle Gebiete der Astronomie und für viele Gebiete der Physik von großer Bedeutung. Eine besonders vielseitige Entwicklung nahm die theoretische Astrophysik in der UdSSR.

Das erste Lehrbuch der theoretischen Astrophysik in russischer Sprache erschien im Jahre 1939 und wurde vom Redakteur der vorliegenden Auflage geschrieben. In den verflossenen 12 Jahren machte dieser junge Zweig der Astronomie jedoch solche Fortschritte und erfuhr derartig tiefgehende Veränderungen, daß es sich als notwendig erwies, den Gedanken an eine bloße Überarbeitung des alten Lehrbuches zu einer neuen Auflage fallen zu lassen und in kollektiver Arbeit an die Schaffung eines völlig neuen Lehrbuches heranzugehen.

Wenn im Jahre 1939 die Probleme des Energietransportes durch Strahlung und die Anregung der Atome in den Sternatmosphären und in den Nebeln den Hauptinhalt der theoretischen Astrophysik ausmachten, so beginnen neben einer bedeutenden Vertiefung und Präzisierung der Probleme, die mit dem Strahlungsfeld und dem Strahlungsgleichgewicht zusammenhängen, solche Prozesse eine immer größere Rolle zu spielen, die in den auf den Sternen und auf der Sonne existierenden makroskopischen elektromagnetischen Feldern vor sich gehen. Es ist verständlich, warum diese Probleme beträchtlich später behandelt wurden als die Fragen der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes. Wenn wir die Strahlung der Sterne und der Nebel beobachten, so erhalten wir unmittelbar Angaben über das Strahlungsfeld in Form der von der Oberfläche dieser Himmelskörper ausgehenden Strahlungsintensität. Diese Daten liefern uns das Material zur Begründung und zur Kontrolle der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes. Bei der Erforschung der makroskopischen elektromagnetischen Felder befinden wir uns in einer schwierigeren Lage, weil wir diese nur nach den von ihnen hervorgerufenen Bewegungen geladener Teilchen beurteilen können, Bewegungen, deren Beobachtung auf erhebliche Schwierigkeiten stößt und nur durch die Anwendung neuer Forschungsmethoden durchführbar ist. Die bedeutende Rolle dieser Felder tritt erst bei der Sonne deutlich zutage.

Die in den westlichen Ländern über theoretische Astrophysik bereits erschienene Literatur ist zum großen Teil der Aufstellung und Besprechung von verschiedenen Modellen des inneren Sternaufbaus gewidmet, die sich mitunter von der Wirklichkeit sehr weit entfernen. Die Mehrzahl dieser Arbeiten hat sich von den faktischen Gegebenheiten losgelöst, auf die sich die theoretische Astrophysik stützen muß. Wir bringen von der Theorie des inneren Sternaufbaus in diesem Buch nur so viel, wie für die Darlegung seiner allgemeinen Prinzipien notwendig ist.

In vielen Ländern fanden nicht nur auf dem Gebiet des inneren Sternaufbaus, sondern auch in den meisten andern Zweigen der Astrophysik formale Forschungsmethoden breite Anwendung; diese gehen bisweilen auf rein mathematische Rechnereien zurück, die nichts mit der Realität und mit den Beobachtungen an den von der Astrophysik erforschten Objekten gemein haben.

Die sowjetischen Gelehrten, die auf dem Gebiete der theoretischen Astrophysik tätig sind, lassen sich von der Methode des dialektischen Materialismus leiten. Sie verbinden ihre Arbeiten stets mit der Wirklichkeit und benutzen den mathematischen und physikalischen Apparat als wichtiges und mächtiges Hilfsmittel zur Erforschung der Himmelskörper.

Auf dem Gebiet der theoretischen Astrophysik nehmen die sowjetischen Gelehrten im Augenblick einen führenden Platz in der Welt ein. Die Autoren dieses Buches lieferten durch ihre Forschungen zu den von ihnen behandelten Abschnitten der theoretischen Astrophysik wesentliche Beiträge. Deshalb trägt die Darstellung vieler Probleme in dem vorliegenden Buche Originalcharakter und unterscheidet sich mitunter völlig von dem, was in der wissenschaftlichen Literatur veröffentlicht wurde. Dies möge man beim Studium des Buches beachten.

Die Kapitel I, II und III des Lehrbuches wurden von E. R. Mustel, die Kapitel IV, V und VI von W. W. Sobolew, das Kapitel VII von A. B. Sewerny und die Kapitel VIII und IX von V. A. Ambarzumjan geschrieben.

Die Autoren sprechen S. B. Pikelner, der die in das Kapitel III einführenden Paragraphen 18 und 22 schrieb, ihren Dank aus.

Das Lehrbuch ist für Studierende an den Universitäten, Aspiranten und wissenschaftlich Tätige bestimmt. Auf einem neuen Gebiet der Wissenschaft sind Fehler unvermeidlich, doch sprechen wir die Hoffnung aus, daß in diesem Lehrbuch so wenige wie möglich enthalten sind.

V. Ambarzumjan

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel I

Kapitel II

Kapitel III

KAPITEL I

Die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes in Sternphotosphären und das kontinuierliche Spektrum der Sterne

§ 1. Einleitende Bemerkungen

Im ersten Kapitel des vorliegenden Buches werden Fragen betrachtet, die mit dem physikalischen Aufbau der Sternphotosphären zusammenhängen. Die Beobachtungen an dem uns nächsten Stern, der Sonne, erlauben uns die Feststellung, daß man die Sonnenatmosphäre in eine Reihe von Schichten einteilen kann, die sich voneinander durch ihre physikalischen Eigenschaften unterscheiden. Den untersten und dichtesten Teil der Sonnenatmosphäre nennt man die *Photosphäre*. Die photosphärischen Schichten strahlen praktisch die gesamte sichtbare Energie aus, die die Sonne in den Weltraum hinaussendet. Das kontinuierliche Spektrum der Sonne ist im wesentlichen das Spektrum der Strahlung der Photosphäre.

Die Absorptionslinien im Sonnenspektrum (mit Ausnahme der Kerne der starken Absorptionslinien) entstehen annähernd in den gleichen Schichten der Photosphäre, in denen auch das kontinuierliche Spektrum entsteht. Die in der Literatur oft durchgeführte Unterteilung der unteren Schichten der Sonnenatmosphäre in Photosphäre und umkehrende Schicht hat nur bedingten Charakter.

Über die Photosphäre der Sonne lagert sich die *Chromosphäre* (mit einer Dicke von ungefähr 15000 km) und die *Sonnenkorona* (deren Ausdehnung unter Einbeziehung der Koronastrahlen mehrere Sonnenradien beträgt). Der Beitrag der Chromosphäre und der Korona zur Bildung des kontinuierlichen Spektrums der Sonne im sichtbaren Spektralbereich ist verschwindend klein und gewinnt erst tief im ultravioletten Spektralbereich (jenseits der LYMAN-Seriengrenze) und im Gebiet sehr langer Wellenlängen (einschließlich des Gebietes der ultrakurzen Radiowellen) an Bedeutung.

Über das Vorhandensein einer Chromosphäre und einer Korona bei Sternen, die sich in ihrem Spektraltyp von der Sonne wesentlich unterscheiden, wissen wir bisher sehr wenig. Jedoch ist die Existenz von photosphärischen Schichten eine feststehende Eigenschaft eines jeden Sternes, weil sie die Schichten sind, die für das Leuchten des Sternes bestimmend sind. Was jedoch die Wechselbeziehung zwischen den photosphärischen Schichten und den Schichten anbetrifft, in denen die Absorptionslinien entstehen, so ist die Frage komplizierter. Physikalische Überlegungen zeigen, daß bei der Mehrzahl der Sterne, die nicht

vom Sonnentypus sind, diese Schichten mehr oder weniger gemeinsam auftreten.

Somit sind die allgemeinen theoretischen Erwägungen, die von uns im ersten Kapitel dieses Lehrbuches angestellt werden, nicht nur auf die Sonne, sondern auf eine sehr große Gruppe von Sternen anwendbar. Jedoch machen wir bei der Auswahl der Objekte einige Einschränkungen. Erstens werden wir nur solche Objekte untersuchen, deren Helligkeit zeitlich nicht veränderlich ist oder sich hinreichend langsam ändert. Zweitens beschränken wir unsere Untersuchungen auf Sterne, bei denen die Dicke der photosphärischen Schichten im Vergleich zum Radius des Sternes sehr klein ist. Endlich schließen wir von unserer Betrachtung solche Sterne aus, die durch gewisse Besonderheiten im Spektrum gekennzeichnet sind (WOLF-RAYET-Sterne, Sterne vom Typ P Cygni usw.).

Betrachten wir diese Einschränkungen ausführlicher. Bei Sternen mit konstanter Helligkeit können wir den Zustand der Photosphären als stationär, d.h. zeitlich nicht veränderlich, ansehen. Hierbei ist natürlich solch eine Voraussetzung nur im Mittel richtig. In Wirklichkeit gehen, wie die Beobachtung zeigt, in den einzelnen Gebieten der Oberfläche solch eines „beständigen" Sternes – wie beispielsweise der Sonne – beträchtliche zeitliche Veränderungen vor sich (Sonnenflecke, Fackeln usw.). Dessenungeachtet können wir den Zustand der photosphärischen Schichten der Sonne im ganzen genommen als stationär ansehen. Das gleiche kann man auch von den übrigen Sternen mit konstanter Helligkeit sagen.

Gehen wir zur zweiten Einschränkung über. Das Studium der Sonne zeigte, daß die Dicke ihrer Photosphäre sehr gering ist und ungefähr 100–300 km beträgt. Im Vergleich zum Radius der Sonne (695300 km) ist dies natürlich eine außerordentlich kleine Größe. Daher kann man sich bei unseren Überlegungen die Photosphäre der Sonne aus planparallelen Schichten zusammengesetzt denken. Theoretische Berechnungen zeigen, daß diese Bedingung auch für die meisten übrigen stationären Sterne erfüllt ist.

Die WOLF-RAYET-Sterne, die Sterne vom Typ P Cygni und andere bilden eine besondere Sterngruppe; wir werden sie später behandeln.

Es ist noch zu erwähnen, daß durch die von uns eingeführten Einschränkungen nur ein geringer Prozentsatz von Sternen aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen wird. Daher wird unsere Theorie für eine sehr umfangreiche Gruppe von Objekten gelten.

Die Hauptaufgaben, die sich eine Theorie der Sternphotosphären stellt, sind im wesentlichen die folgenden:

1. Die Ableitung eines Gesetzes für die Änderung der Temperatur, des Druckes, der Dichte und anderer physikalischer charakteristischer Größen mit der Tiefe in der Stern- bzw. Sonnenphotosphäre.

2. Die Deutung der Eigentümlichkeiten des kontinuierlichen Spektrums der Sterne und der Sonne.

3. Die Aufklärung von Gesetzmäßigkeiten in der Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe und auf der der Sterne.

Die erste dieser Aufgaben ist die grundlegende. Ihre Lösung liefert auch die Lösung der beiden andern.

§ 2. Grundlegende Begriffe der Strahlungstheorie. Die Strömungsgleichung

1. Die Rolle der Strahlung in den Sternphotosphären

Der physikalische Zustand eines beliebigen Elementes des Stoffes im Innern einer Sternphotosphäre wird durch die Wechselwirkung dieses Elementes mit dem umgebenden Medium bestimmt. Uns interessiert die grundlegende Frage, auf welche Weise der Energietransport in den Schichten der Photosphäre vor sich geht. Hierbei ist nur von der Wärmeenergie die Rede. *Zur Wärmeenergie rechnen wir die eigentliche kinetische Energie der Wärmebewegung der Teilchen, die Anregungsenergie der Atome und die Ionisationsenergie* (siehe weiter unten).

Die übrigen Formen der inneren Energie sind für die Photosphären der gewöhnlichen Sterne ohne Bedeutung. Beispielsweise spielen die Kernprozesse (mit Abgabe von Energie) in den Sternphotosphären keine merkliche Rolle. Wir geben folgende Prozesse an, die in einer Sternphotosphäre den Austausch von Wärmeenergie bewerkstelligen können:

1. Transport von Wärmeenergie durch *Wärmeleitung*.
2. Transport von Wärmeenergie durch *Konvektion*, d.h. Transport der Wärme durch unmittelbare Fortbewegung der Gasmasse.
3. Transport von Wärmeenergie durch *Strahlung*.

Hierbei wird angenommen, daß die Strahlung selbst ausschließlich thermischen Charakter trägt, d.h., daß sie nur durch die Temperatur des Gases bestimmt ist (die sich natürlich von Ort zu Ort ändert).

Zahlreiche Untersuchungen zeigen, daß der erste Prozeß in den Sternphotosphären keine wesentliche Rolle spielt [1, § 12]. Aus diesen Untersuchungen geht hervor, daß für die überwiegende Mehrheit der untersuchten Fälle und zum mindesten für die von uns ausgewählten Sterne der Austausch der Wärmeenergie hauptsächlich durch Strahlung geschieht. Auf welche Weise dieser Austausch vonstatten geht, werden wir aus den weiteren Überlegungen erkennen.

Daher richten wir unser Hauptaugenmerk sofort auf die Probleme, die mit der *Wärmestrahlung* zusammenhängen. Zu diesem Zweck erinnern wir an eine Reihe von wichtigen Definitionen aus der Theorie der Wärmestrahlung.

2. Strahlungsintensität und Strahlungsstrom

Wir betrachten einen Hohlraum, der nach allen Richtungen von Strahlung durchdrungen ist. In diesem Hohlraum wählen wir ein willkürlich orientiertes Flächenelement $d\sigma$ und errichten auf ihm im Punkte P die Normale n (Abb. 1).

Ferner ziehen wir unter dem Winkel ϑ zur Normalen die Gerade L, die wir zur Achse eines Elementarkegels mit dem Raumwinkel $d\omega$ machen. Wenn wir durch jeden Punkt der Randkurve des Flächenelementes $d\sigma$ eine Linie ziehen, die zu der ihr am nächsten liegenden Erzeugenden des Kegels $d\omega$ parallel läuft, dann entsteht ein abgestumpfter, sich nach einer Seite ins Unendliche erstreckender Kegel $d\Omega$, der dem Kegel $d\omega$ ähnlich ist. Sein im Punkte P zu L senkrechter Querschnitt beträgt $d\sigma \cos\vartheta$.

Es sei dE_ν die gesamte Energiemenge, die in der Zeit dt innerhalb[1]) des Kegels $d\Omega$ durch das Flächenelement $d\sigma$ hindurchtritt und sich auf ein Frequenzintervall bezieht, das zwischen ν und $\nu + d\nu$ eingeschlossen liegt. Dann bezeichnet man als *spezifische Strahlungsintensität* oder Intensität I_ν schlechthin den folgenden Grenzwert:

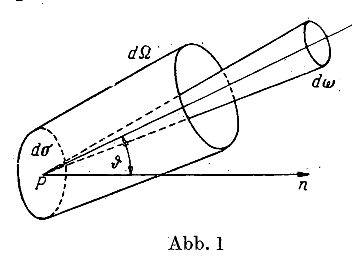


Abb. 1

$$I_\nu = \lim_{d\sigma,\, dt,\, d\omega,\, d\nu \to 0} \frac{dE_\nu}{d\sigma \cos\vartheta\, dt\, d\omega\, d\nu} . \tag{2.1}$$

Dieser Grenzwert ist im allgemeinen eine Funktion der Koordinaten (der Lage) des Punktes P, der Richtung L, der Zeit t und der Frequenz ν.

Das Auftreten von $\cos\vartheta$ in (2.1) erklärt sich daraus, daß wir nicht ein in Richtung der Normalen, sondern ein in der Richtung L verlaufendes Strahlenbündel betrachten. Die Energiemenge, die innerhalb des Raumwinkels $d\Omega$ enthalten ist, wird nicht durch das Flächenelement $d\sigma$ selbst, sondern durch seine Projektion auf eine senkrecht zur Richtung L stehende Ebene bestimmt.

Auf Grund der Definition (2.1) können wir die Energiemenge dE_ν berechnen, wenn wir I_ν kennen:

$$dE_\nu = I_\nu d\sigma \cos\vartheta\, dt\, d\omega\, d\nu . \tag{2.2}$$

Für die über das ganze Spektrum integrierten Größen dE und I erhalten wir an Stelle von (2.2)

$$dE = I d\sigma \cos\vartheta\, dt\, d\omega . \tag{2.3}$$

Die Strahlungsenergie dE_ν in (2.2) bezieht sich auf den Raumwinkel $d\omega$. Die Gesamtmenge der Strahlungsenergie dE_ν^*, die durch das Flächenelement $d\sigma$ *nach allen* Richtungen hindurchtritt, ist gleich

$$dE_\nu^* = d\sigma\, dt\, d\nu \int_{4\pi} I_\nu \cos\vartheta\, d\omega . \tag{2.4}$$

[1]) Das heißt längs solcher Richtungen, die nach dem Durchstoßen des Flächenelementes $d\sigma$ gänzlich im Innern von $d\Omega$ bleiben. Wir erhalten die Gesamtheit dieser Strahlen, wenn wir in jedem Punkte des Flächenelementes $d\sigma$ einen Kegel errichten, der die Gesamtheit aller der Richtungen enthält, die zu dem im Innern von $d\omega$ verlaufenden parallel sind. Es ist deshalb klar, daß bei kleinen $d\sigma$ und $d\omega$ die im Innern von $d\Omega$ durch $d\sigma$ hindurchtretende Energie proportional $d\sigma\, d\omega$ ist.

Da für $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ der Faktor $\cos\vartheta$ negativ wird, ist dE_ν^* faktisch gleich dem Überschuß der Energie, die in der Zeit dt und im Frequenzintervall $d\nu$ durch das Flächenelement $d\sigma$ ausströmt, gegenüber der Energie, die durch das gleiche Flächenelement einströmt. Die Größe dieses Überschusses, bezogen auf die Zeiteinheit, eine Fläche vom *Einheits*querschnitt und auf die Frequenzeinheit, nennt man den *Strahlungsstrom* πH_ν (die Größe π ist nur aus Bequemlichkeitsgründen für die weiteren Rechnungen eingeführt). Wir erhalten den Strom πH_ν, wenn wir dE_ν^* durch $d\sigma\, dt\, d\nu$ dividieren, also

$$\pi H_\nu = \int\limits_{4\pi} I_\nu \cos\vartheta\, d\omega\,. \tag{2.5}$$

Der gesamte (integrierte) Strahlungsstrom πH ist offenbar gleich

$$\pi H = \pi \int\limits_0^\infty H_\nu d\nu = \int\limits_0^\infty \int\limits_{4\pi} I_\nu \cos\vartheta\, d\omega\, d\nu\,. \tag{2.6}$$

Er hat die Dimension einer Energie, bezogen auf 1 cm² und 1 sec. Die Größen πH_ν und πH sind im allgemeinen Funktionen der Koordinaten und der Orientierung des Flächenelementes im Raum.

Wir führen einen Ausdruck für den Raumwinkel $d\omega$ ein. Hierfür ist es am zweckmäßigsten, ein sphärisches Koordinatensystem zu benutzen, dessen Ursprung man in einen gegebenen Punkt der Sternatmosphäre legt und dessen Polachse in die Richtung des Sternradius zeigt. Weil per definitionem der räumliche Winkel zahlenmäßig gleich derjenigen Fläche ist, die durch die Strahlen, die von dem gegebenen Punkt P in die entsprechenden Richtungen ausgehen, auf einer Kugel mit dem Einheitsradius ausgeschnitten wird, erhalten wir:

$$d\omega = d\psi \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{2.7}$$

Für den in diesem Kapitel ausgewählten Aufgabenkreis kann man jedoch annehmen, daß der physikalische Zustand der photosphärischen Schichten nur von ihrer Tiefe, d.h. von ihrem Abstand vom Sternzentrum, abhängt. In diesem Falle kann aus Symmetriegründen die Strahlungsintensität nicht vom Azimutwinkel ψ abhängen. Folglich können wir den Ausdruck (2.7) für den räumlichen Winkel sofort über alle Winkel ψ integrieren und erhalten

$$d\omega = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta\,. \tag{2.8}$$

Mit diesen Bezeichnungen kann man den Strahlungsstrom, der in einem gegebenem Punkte des Sternes durch eine senkrecht zum Radius stehende Einheitsfläche in radialer Richtung hindurchtritt, gemäß (2.5) folgendermaßen ausdrücken:

$$\pi H_\nu = 2\pi \int\limits_0^\pi I_\nu(\vartheta) \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\,. \tag{2.9}$$

Entsprechend ändert sich auch (2.6).

In diesem speziellen Fall, den wir auch in der Regel betrachten, ist der physikalische Sinn des Stromes folgender: Wenn unsere Einheitsfläche so gelegen ist, wie es in Abb. 2 gezeigt wird, d. h., wenn sie in einer Ebene senkrecht zum Radius liegt, dann stellt der Strom den Überschuß der von unten $\left(0 \leqslant \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$ durch das Flächenelement strömenden Energie über diejenige, die von oben $\left(\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \pi\right)$ durch das Flächenelement hindurchströmt, dar.

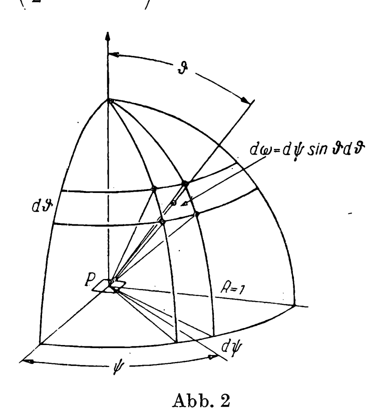


Abb. 2

Wir weisen auf einen der grundlegenden Unterschiede zwischen Strahlungsstrom und Intensität hin: Im „leeren“ Raum (wenn eine Absorption von Strahlung nicht auftritt) bleibt die Intensität eines Strahles längs seines Weges konstant. Zum Beispiel fällt die Strahlung der Sonne auf die äußere Grenze unserer Erdatmosphäre mit der gleichen Intensität ein, die sie unmittelbar auf der Sonnenoberfläche besaß (die Absorption im interplanetaren Raum wird vernachlässigt). Dagegen ist der Strahlungsstrom bei Entfernung von der Sonne (vom Stern) umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes vom Mittelpunkt der Sonne (des Sternes).

3. Emissions- und Absorptionskoeffizient

Wir wenden uns jetzt der folgenden Fragestellung zu: Ein Massenelement dm strahle nach allen Richtungen Wärmeenergie aus. Dann wird von diesem Massenelement dm innerhalb des Raumwinkels $d\omega$ während der Zeit dt und im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ die Energie

$$j_\nu \, dm \, d\omega \, dt \, d\nu \tag{2.10}$$

ausgestrahlt. Der Proportionalitätsfaktor j_ν wird als *Emissionskoeffizient* bezeichnet. Aus der Definition (2.10) folgt, daß der Emissionskoeffizient gleich derjenigen Energie ist, die von der Masseneinheit während der Zeiteinheit und in der Frequenzeinheit in den Einheitswinkel ausgestrahlt wird.

Die gesamte Energieabgabe des Massenelementes dm in der Zeit dt ist

$$dt \, dm \int_0^\infty \int_{4\pi} j_\nu \, d\omega \, d\nu \, . \tag{2.11}$$

Für den Fall, daß der Emissionskoeffizient j_ν von der Richtung unabhängig

ist, schreibt sich (2.11):

$$dt\,dm\,4\pi\int\limits_0^\infty j_\nu\,d\nu\,. \tag{2.12}$$

Wir führen jetzt den *Absorptionskoeffizienten* ein. Ein Strahlenbündel der Intensität I_ν treffe senkrecht auf die Oberfläche einer absorbierenden Schicht der Dicke ds. Als Folge des Durchganges durch die Schicht erfährt die Intensität des Bündels einen (negativen) Zuwachs dI_ν. Der Absorptionskoeffizient $\varkappa_\nu$ wird folgendermaßen definiert:

$$dI_\nu = -\,I_\nu \varkappa_\nu \varrho\,ds\,, \tag{2.13}$$

wobei ϱ die Dichte des absorbierenden Mediums bedeutet.[1]) Somit ist gemäß (2.13) die Intensitätsschwächung der Intensität selbst proportional, wobei der Absorptionskoeffizient als Proportionalitätsfaktor auftritt. Die Richtigkeit des durch (2.13) definierten Ausdrucks ist experimentell bestätigt.

Wir lassen jetzt zu, daß die absorbierende Schicht die lineare Dicke s besitzt. Wir wollen die Intensität des aus der Schicht austretenden Lichtstrahles in Abhängigkeit von den übrigen Parametern berechnen.

Wir dividieren beide Seiten von (2.13) durch I_ν, integrieren die Gleichung und erhalten

$$\lg I_\nu = -\int\limits_0^s \varkappa_\nu \varrho\,ds + \lg C\,, \tag{2.14}$$

wobei $\lg C$ eine Integrationskonstante ist. Die Lösung von (2.14) kann man in folgender Form schreiben:

$$I_\nu = C e^{-\int\limits_0^s \varkappa_\nu \varrho\,ds}\,. \tag{2.15}$$

Wir bestimmen die Konstante C. Wenn wir s gleich Null setzen, wird I_ν die Intensität des auftreffenden Bündels, die wir mit I_ν^0 bezeichnen wollen. Dann gilt

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-\int\limits_0^s \varkappa_\nu \varrho\,ds}\,. \tag{2.16}$$

Analoge Formeln erhält man, wenn man nicht die Intensität, sondern die Energie E_ν betrachtet. Die Intensität eines einfallenden Strahles wird also beim Durchtritt durch die Schicht nach einem Exponentialgesetz geschwächt; den Exponenten

$$\tau_\nu = \int\limits_0^s \varkappa_\nu \varrho\,ds \tag{2.17}$$

nennt man die *optische Dicke* oder die optische Tiefe der Schicht. Die optische Tiefe ist ein der Absorption des Lichtes in einer gegebenen absorbierenden

[1]) Die Größe ϱ kann auch die Gesamtdichte des Mediums bedeuten. In diesem Fall muß die Größe $\varkappa_\nu$ entsprechend umgerechnet werden. Hierüber werden wir weiter unten sprechen.

Schicht gleichbedeutendes Maß. In Übereinstimmung mit (2.17) ist das Differential der optischen Tiefe gleich

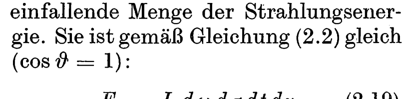
$$d\tau_\nu = \varkappa_\nu \varrho \, ds. \tag{2.18}$$

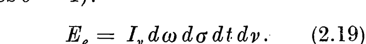
4. Die Strömungsgleichung

Die Gleichung (2.13) berücksichtigt bei der Änderung von I_ν auf dem Wege ds nur den Anteil der Absorption. Wenn aber die Materie nicht nur Energie absorbiert, sondern auch emittiert, so muß die Gleichung (2.13) in entsprechender Weise abgeändert werden. Hierbei gelangen wir zu der sogenannten *Strömungsgleichung*.

Wir betrachten einen in eine gewisse Richtung L orientierten Elementarzylinder[1]) mit der Grundfläche $d\sigma$ und der Höhe ds (Abb. 3). Die Dichte der absorbierenden Materie dieses Zylinders bezeichnen wir mit dem Buchstaben ϱ.

Es sei E_e[2]) die in der Zeit dt und im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ innerhalb des Raumwinkels $d\omega$ durch die untere Grundfläche $d\sigma$ des Zylinders (I) einfallende Menge der Strahlungsenergie. Sie ist gemäß Gleichung (2.2) gleich ($\cos\vartheta = 1$):





$$E_e = I_\nu \, d\omega \, d\sigma \, dt \, d\nu. \tag{2.19}$$

Abb. 3

Die aus der oberen Zylinderfläche (II) austretende Strahlung E_a ist durch die geänderte Intensität $I_\nu + dI_\nu$ charakterisiert; folglich haben wir

$$E_a = (I_\nu + dI_\nu) \, d\omega \, d\sigma \, dt \, d\nu. \tag{2.20}$$

Untersuchen wir die Ursachen der aufgetretenen Änderung von E_e. Erstens muß die entsprechende aus der oberen Zylinderfläche austretende Energie dadurch vermehrt worden sein, daß die Materie des Zylinders selbst – insbesondere in die Richtung L – strahlt. Um diesen Anteil auszurechnen, müssen wir zu der Größe E_e diejenige Energie hinzufügen, die von unserem Zylinder während des gleichen Zeitabschnittes dt, im gleichen Frequenzintervall $d\nu$ und innerhalb des gleichen Raumwinkels $d\omega$ in die Richtung L emittiert wird. Wir bezeichnen diese Energie mit ΔE_{em}. Gemäß (2.10) ist sie gleich:

$$\Delta E_{\mathrm{em}} = j_\nu \varrho \, d\sigma \, ds \, d\omega \, dt \, d\nu, \tag{2.21}$$

weil

$$dm = \varrho \, d\sigma \, ds. \tag{2.22}$$

[1]) Es wird vorausgesetzt, daß man die Höhe des betrachteten Zylinders im Vergleich zum Radius seiner Grundfläche vernachlässigen kann.

[2]) Den Index ν bei E lassen wir der Kürze halber weg.

Die zweite Ursache der Änderung von E_e ist die Absorption der Strahlung im Zylinder. Die Menge der absorbierten Energie ΔE_{abs} ist nach (2.13) gleich

$$\Delta E_{\text{abs}} = -E_e \varkappa_\nu \varrho \, ds, \tag{2.23}$$

weil – wie oben erwähnt – die in (2.13) definierte Gleichheit nicht nur für die Intensitäten, sondern auch für die Energien Gültigkeit besitzt.

Wir stellen jetzt die Gleichung auf, die alle beim Durchtritt der Strahlung durch den Zylinder stattfindenden Energieänderungen berücksichtigt:

$$E_a = E_e + \Delta E_{\text{em}} + \Delta E_{\text{abs}}, \tag{2.24}$$

wobei das Minuszeichen in ΔE_{abs} schon in (2.23) berücksichtigt ist. Den letzten Summanden können wir nach (2.19) und (2.23) auch folgendermaßen schreiben:

$$\Delta E_{\text{abs}} = -I_\nu \varkappa_\nu \varrho \, ds \, d\omega \, d\sigma \, dt \, d\nu. \tag{2.25}$$

Wenn man in der gleichen Weise die Gleichungen (2.19), (2.20), (2.21) und (2.25) benutzt und in der so erhaltenen Gleichung die notwendigen Kürzungen durchführt, erhält man die gesuchte *Strömungsgleichung:*

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu \varkappa_\nu \varrho + j_\nu \varrho. \tag{2.26}$$

Diese Gleichung beschreibt die Änderungen der Strahlungsintensität, die beim Durchtritt der Strahlung durch ein emittierendes und absorbierendes Medium auftreten.

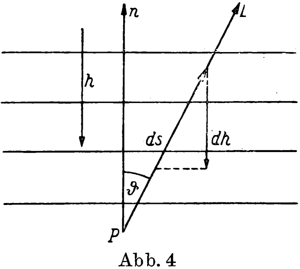


Abb. 4

Die unabhängige Veränderliche s in der Gleichung (2.26) erweist sich in gewisser Hinsicht als unbequem. Daher gehen wir zu einer anderen Veränderlichen, nämlich zu der Tiefe der gegebenen Schicht in der Sternphotosphäre, über. In diesem Zusammenhang erinnern wir uns daran, daß wir Sternphotosphären untersuchen, deren Dicke im Vergleich zum Sternradius sehr klein ist. Folglich können wir in jedem Element der Sternphotosphäre die sie bildenden Schichten als planparallel ansehen. Die auf diesen Schichten errichtete Normale n (die in die Richtung des Sternradius zeigt) und die Richtung L des Strahles bilden den Winkel ϑ (Abb. 4). Wir führen jetzt die Tiefe h ein, die von außen her längs der Normalen gezählt wird und zum Sternmittelpunkt hin anwächst. Dann folgt aus der Abb. 4:

$$ds = -\sec\vartheta \, dh. \tag{2.27}$$

Mit (2.27) schreibt sich die Strömungsgleichung:

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{dh} = I_\nu(\vartheta) \varkappa_\nu \varrho - j_\nu \varrho, \tag{2.28}$$

wobei aus (2.28) hervorgeht, daß I_ν eine Funktion des Winkels ϑ ist.

§ 3. Das Strahlungsgleichgewicht in Sternphotosphären. Die Lösung der Strömungsgleichung

1. Die Bedingung des Strahlungsgleichgewichtes

Wir haben schon darauf hingewiesen, daß die Hauptaufgabe unserer Theorie darin besteht, ein Gesetz für die Änderung der Temperatur und der übrigen Parameter (Druck, Dichte und andere) im Innern einer Sternphotosphäre aufzustellen.

Wir betrachten ein gewisses Volumenelement Δv im Innern einer Sternphotosphäre. Es sei E_+ die gesamte Energiemenge, die das Volumenelement infolge seiner Wechselwirkung mit anderen Teilen der Sternphotosphäre in der Sekunde aufnimmt. Es sei ferner E_- die gesamte Energiemenge, die von demselben Volumenelement in der Sekunde abgegeben wird.

Die im Innern von Δv herrschende Temperatur wird durch das Verhältnis zwischen E_+ und E_- bestimmt. Wenn z.B. $E_+ > E_-$ ist, nimmt die innere Energie des Volumens ständig zu, und folglich wird auch die Temperatur in seinem Innern anwachsen. Ist dagegen $E_+ < E_-$, so wird mehr Energie abgegeben als aufgenommen, und folglich wird die Temperatur im Innern des Volumenelementes Δv sinken. In § 1 forderten wir, daß nur die Photosphären der *stationären Sterne*, d.h. der Sterne, deren Energiezustand sich zeitlich nicht ändert, Gegenstand unserer Untersuchungen sein sollten. In solch einem Falle muß die Temperatur innerhalb eines beliebigen Volumens der Sternphotosphäre konstant bleiben, also von der Zeit unabhängig sein. Dies ist nur dann erfüllt, wenn die Gleichung

$$E_+ = E_- \tag{3.1}$$

gilt. Sie ist die *Bedingung für das Energiegleichgewicht.*

Die Gleichung (3.1) besitzt sehr allgemeinen Charakter. Wie wir jedoch in § 2 zeigten, ist der Hauptfaktor, der in den stationären Sternphotosphären für den Energietransport von einem Ort zum andern maßgebend ist, der Energietransport durch Strahlung. Folglich sind in der von uns betrachteten Theorie die Größen E_+ und E_- mit der Strahlungsenergie identisch. Und zwar ist die Größe E_+ die Strahlungsenergie, die pro Sekunde von dem Volumen Δv absorbiert, dagegen die Größe E_- die Strahlungsenergie, die von demselben Volumen pro Sekunde emittiert wird. Dementsprechend werden wir unsere Theorie im folgenden die Theorie des *Strahlungsgleichgewichtes* nennen.

Unsere Aufgabe besteht zunächst darin, den Größen E_+ und E_- eine konkrete Gestalt zu geben. Wir beginnen mit der Größe E_-.

Das von uns betrachtete Volumen Δv möge die Masse dm besitzen. Dann ist die gesamte von dem Volumen in der Zeiteinheit ausgestrahlte Energiemenge nach (2.10) gleich

$$E_- = dm \int_0^\infty \int_{4\pi} j_\nu \, d\omega \, d\nu , \tag{3.2}$$

wobei die Integration über das gesamte Spektrum und über den ganzen Raumwinkel 4π ausgeführt wird.

Nunmehr betrachten wir E_+. Zu diesem Zweck nehmen wir dasselbe Volumenelement Δv; für dieses sei ϱ die Dichte der absorbierenden Materie. Dieses Volumenelement (Abb. 5) umgeben wir mit einer geschlossenen Fläche Σ, deren Dimensionen im Vergleich zu denen der Fläche σ, die das Volumen Δv begrenzt, sehr groß sind.

Außerdem legen wir das Volumenelement Δv so, daß sein Abstand von einem beliebigen Punkt der Oberfläche Σ im Vergleich zu seinen eigenen Dimensionen ebenfalls sehr groß ist. Wir betrachten jetzt ein Strahlenbündel, das in das Volumen von Σ eindringt und folglich durch die Flächenelemente $d\Sigma$ und $d\sigma$ der Oberflächen Σ und σ hindurchtritt. Das Flächenelement $d\Sigma$ werde von $d\sigma$ (und daher wegen der Kleinheit von Δv auch von jedem beliebigen Punkt des Volumens Δv aus) unter dem Raumwinkel $d\omega$ gesehen. Dann ist gemäß (2.2) die Energiemenge, die in der Zeit dt im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ und innerhalb des Raumwinkels $d\omega$ durch das Flächenelement $d\sigma$ hindurchtritt, gleich

$$I_\nu \, d\sigma \cos\vartheta \, dt \, d\omega \, d\nu\,, \qquad (3.3)$$

wobei diese gesamte Energie auch durch das Flächenelement $d\Sigma$ hindurchtritt.

Gemäß (2.13) wird von der Energiemenge (3.3) im Volumen Δv der Anteil

$$I_\nu \, d\sigma \cos\vartheta \, dt \, d\omega \, d\nu \, \varkappa_\nu \, \varrho \, ds \qquad (3.4)$$

absorbiert, wobei ds die Höhe des Zylinders[1]) dv bedeutet.

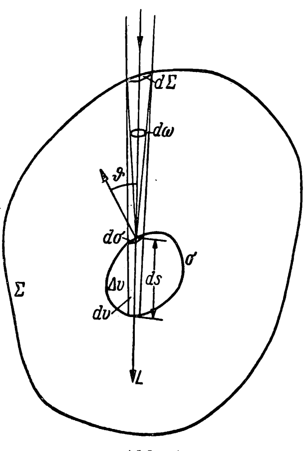


Abb. 5

Das Produkt $d\sigma \cos\vartheta \, ds$ ist das Volumen des Zylinders dv; denn seine Höhe ist ds und seine Grundfläche $d\sigma \cos\vartheta$ (siehe Abb. 5). Wenn wir das Volumen $d\sigma \cos\vartheta \, ds$ durch dv ersetzen, so schreibt sich (3.4):

$$I_\nu \varrho \varkappa_\nu \, dv \, dt \, d\omega \, d\nu\,. \qquad (3.5)$$

Wir integrieren jetzt (3.5) über das ganze Volumen Δv. Dadurch erhalten wir die vom gesamten Volumen Δv absorbierte Strahlungsenergie, die vorher durch $d\Sigma$ hindurchgetreten ist. Da Δv klein und weit von der Fläche Σ entfernt ist, kann man bei der Integration die Größe I_ν als konstant ansehen. Dadurch erhalten wir im Ausdruck (3.5) an Stelle von dv einfach Δv.

Um die von der gesamten Fläche Σ auf Δv auffallende Strahlung zu berechnen, müssen wir den erhaltenen Ausdruck über $d\omega$ integrieren. Hierbei ist die Festlegung eines Punktes im Innern von Δv, von dem aus wir die räumlichen Winkel $d\omega$ zählen, für uns völlig unwesentlich, weil wir wiederum Δv als klein

[1]) Da $d\omega$ klein ist, kann man das Volumen dv als Zylinder ansehen.

und von der Fläche Σ sehr weit entfernt annehmen. Für die Gesamtenergie $(E_+)_\nu\, d\nu$, die im Frequenzintervall $d\nu$ pro Sekunde von dem Volumen Δv absorbiert wird, erhalten wir unter Berücksichtigung, daß $dm = \varrho \Delta v$:

$$(E_+)_\nu\, d\nu = \varkappa_\nu\, dm\, d\nu \int\limits_{4\pi} I_\nu\, d\omega\,. \tag{3.6}$$

Nach Integration über alle Frequenzen erhalten wir endlich

$$E_+ = dm \int\limits_0^\infty \int\limits_{4\pi} I_\nu \varkappa_\nu\, d\omega\, d\nu\,. \tag{3.7}$$

Folglich können wir die Bedingung des Strahlungsgleichgewichtes auf Grund von (3.2) und (3.7) entsprechend (3.1) wie folgt schreiben:

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{4\pi} j_\nu\, d\omega\, d\nu = \int\limits_0^\infty \int\limits_{4\pi} I_\nu \varkappa_\nu\, d\omega\, d\nu\,. \tag{3.8}$$

Im Strahlungsgleichgewicht ist in einer „ebenen" Photosphäre der Strom der Gesamtstrahlung πH auf allen Niveaus konstant. Um dies nachzuweisen, multiplizieren wir die Strömungsgleichung (2.28) mit $d\omega\ d\nu$ und integrieren sie über die ganze Kugel und über das ganze Spektrum. Wir erhalten

$$\frac{d}{dh} \int\limits_0^\infty \int\limits_{4\pi} I_\nu (\vartheta) \cos\vartheta\, d\omega\, d\nu = \varrho \int\limits_0^\infty \int\limits_{4\pi} [I_\nu (\vartheta)\, \varkappa_\nu - j_\nu]\, d\omega\, d\nu\,, \tag{3.9}$$

denn die Veränderlichen ω, ν und h sind voneinander unabhängig.

Die unter dem Differentialzeichen stehende Größe ist nach (2.6) der Strahlungsstrom πH. Andererseits ist wegen (3.8) die rechte Seite von (3.9) gleich Null. Folglich ist der Strahlungsstrom πH konstant (von h unabhängig).

Im Zusammenhang mit dieser Ableitung machen wir die beiden folgenden Anmerkungen:

1. Der Strahlungsstrom πH ist nur in solchen Photosphären konstant, deren Schichten man als planparallel ansehen kann. Dagegen nimmt in genügend ausgedehnten Photosphären (die wir im Augenblick nicht behandeln) der Strahlungsstrom πH nach außen hin umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes vom Sternmittelpunkt ab.

2. Die von uns festgestellte Konstanz des Stromes der Gesamtstrahlung πH für ebene Photosphären läßt sich keineswegs auf den monochromatischen Strom πH_ν ausdehnen. Dieser ist im allgemeinen mit der Tiefe veränderlich. Doch da der Strom der Gesamtstrahlung πH konstant ist, bedeutet dies, daß sich seine spektrale Zusammensetzung mit der Tiefe ändert. Insbesondere beginnt beim Eindringen in die Photosphäre die kurzwellige Strahlung eine immer größere Rolle zu spielen. In § 6 werden wir ein konkretes Beispiel für die Abhängigkeit von πH_ν von der Tiefe für verschiedene Frequenzen betrachten.

2. Die Hypothese des lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes

Nunmehr führen wir in unsere Ausgangsgleichungen (2.28) und (3.8) die Temperatur, den für unsere Problemstellung wichtigsten physikalischen Parameter, ein. Wir setzen voraus (und das ist die grundlegende Hypothese unserer Theorie), daß in jedem kleinen Bereich der Sternphotosphäre das Verhältnis zwischen den Koeffizienten j_ν und $\varkappa_\nu$ genauso groß ist wie im thermodynamischen Gleichgewicht. In diesem Falle ist nach dem KIRCHHOFFschen Gesetz

$$j_\nu = \varkappa_\nu B_\nu(T), \tag{3.10}$$

wobei $B_\nu(T)$ die Strahlungsintensität eines absolut schwarzen Körpers ist, die durch das PLANCKsche Gesetz

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{3.11}$$

gegeben ist.

Demzufolge wollen wir annehmen, daß man auf jeden kleinen Bereich der Sternphotosphäre das Gesetz (3.10) anwenden kann. Den in dieses Gesetz eingehenden Parameter T identifizieren wir mit der Temperatur des gegebenen Niveaus der Photosphäre. Diese Annahme nennen wir die Hypothese des *lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes* zum Unterschied von dem Fall des Gleichgewichtes, bei dem die Temperatur innerhalb des gesamten betrachteten Hohlraumes konstant ist.

Um die von uns eingeführte Hypothese des lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes in den Sternphotosphären zu rechtfertigen, können wir zwei Wege beschreiten: Erstens können wir, wenn wir (3.10) benutzen und unsere Theorie vom Strahlungsgleichgewicht konsequent zu Ende führen, ihre Schlußfolgerungen mit den Beobachtungsergebnissen vergleichen, was unsere oben angeführte Hypothese auf ihre Richtigkeit hin prüfen würde; zweitens können wir, wenn wir die Theorie der Sternphotosphären entwickeln und die in den Sternphotosphären herrschenden physikalischen Bedingungen bestimmen, die Anwendbarkeit des Gesetzes (3.10) vom rein physikalischen Standpunkt aus nachprüfen. Wir werden auch im folgenden beide Wege einschlagen. Bis dahin wird aber für uns die Annahme, daß in jedem kleinen Bereich der Sternphotosphäre bei der Temperatur des gegebenen Bereiches lokales thermodynamisches Gleichgewicht herrscht, eine Hypothese bleiben. Dies sollten wir im Gedächtnis behalten.

Wenn wir jetzt in die Strömungsgleichung (2.28) das KIRCHHOFFsche Gesetz (3.10) einführen, erhalten wir

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\vartheta) - B_\nu, \tag{3.12}$$

wobei

$$d\tau_\nu = \varkappa_\nu \varrho\, dh \tag{3.13}$$

das Differential der optischen Tiefe τ_ν ist. Wir erinnern daran, daß wir an Stelle der Tiefe h die Variable τ_ν eingeführt haben. Durch die Gleichung (3.13) ist

unsere Variable vollständig bestimmt, wenn wir einen wohldefinierten Anfang für die Zählung von τ_ν einführen. Es ist zweckmäßig, die Vereinbarung zu treffen, daß man τ_ν an der äußeren Grenze der Sternatmosphäre gleich Null annimmt. Dann ist

$$\tau_\nu = \int_{\text{äußere Grenze}}^{h} \varkappa_\nu \varrho \, dh. \tag{3.13'}$$

Wenn wir ferner das Gesetz (3.10) in die Bedingung (3.8) für das Strahlungsgleichgewicht einführen, erhalten wir

$$\int_0^\infty \int_{4\pi} I_\nu(\vartheta) \, \varkappa_\nu \, d\omega \, d\nu = \int_0^\infty \int_{4\pi} B_\nu \varkappa_\nu \, d\omega \, d\nu. \tag{3.14}$$

Die Bedingung (3.14) für das Strahlungsgleichgewicht können wir noch anders schreiben. Wir führen die neue Größe

$$J_\nu = \int_{4\pi} I_\nu(\vartheta) \frac{d\omega}{4\pi} \tag{3.15}$$

ein. Diese Größe wird als *mittlere Strahlungsintensität* in dem gegebenen Punkte bezeichnet. Dividieren wir nun (3.14) durch 4π und berücksichtigen, daß $B_\nu(T)$ von ϑ nicht abhängt, so finden wir

$$\int_0^\infty J_\nu \varkappa_\nu \, d\nu = \int_0^\infty B_\nu \varkappa_\nu \, d\nu. \tag{3.16}$$

3. Die Lösung der Strömungsgleichung

Im folgenden wollen wir uns mit der Lösung der Strömungsgleichung (3.12) befassen. Wir teilen die Gesamtheit der Strahlungsrichtungen in zwei Gebiete auf: in eine obere und eine untere Halbkugel (Abb. 6). Die den in den Grenzen $0 \leqslant \vartheta < \frac{\pi}{2}$ eingeschlossenen Richtungen entsprechenden Intensitäten werden wir wie früher mit $I_\nu(\vartheta)$ bezeichnen. In der unteren Halbkugel $\left(\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta < \pi\right)$ führen wir eine neue Zählung der Winkel $\psi = \pi - \vartheta$ von der unteren Normalen n' aus ein und bezeichnen die Intensität mit $I'_\nu(\psi)$. Die Strömungsgleichung (3.12) erhält für die untere Halbkugel die folgende Gestalt:

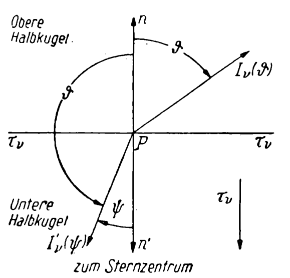


Abb. 6

$$\cos\psi \frac{dI'_\nu(\psi)}{d\tau_\nu} = -I'_\nu(\psi) + B_\nu, \tag{3.17}$$

weil $\cos\vartheta = \cos(\pi - \psi) = -\cos\psi$.

Die Gleichungen (3.12) und (3.17) können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d I_\nu(\vartheta)}{d\tau_\nu} - I_\nu(\vartheta)\sec\vartheta + B_\nu \sec\vartheta = 0, \tag{3.18}$$

$$\frac{d I'(\psi)}{d\tau_\nu} + I'_\nu(\psi)\sec\psi - B_\nu \sec\psi = 0. \tag{3.19}$$

Beide Gleichungen sind lineare Differentialgleichungen von folgendem Typ:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y + Q(x) = 0. \tag{3.20}$$

Die Lösung dieser Gleichung kann man in Form der beiden folgenden einander völlig gleichbedeutenden Gleichungen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} y &= C e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} + e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} \int_{x}^{\infty} Q(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\, dx, \\ y &= D e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} - e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} \int_{x_0}^{x} Q(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

wobei x_0 eine willkürlich gewählte, doch feste Zahl und C (bzw. D) eine Integrationskonstante ist. Wie man sich durch unmittelbares Einsetzen leicht überzeugt, genügen beide Lösungsformen (3.21) der Gleichung (3.20).

Durch Vergleich von (3.20) mit (3.18) finden wir

$$y = I_\nu(\vartheta), \quad x = \tau_\nu, \quad P(x) = -\sec\vartheta, \quad Q(x) = B_\nu \sec\vartheta \tag{3.22}$$

und aus den Gleichungen (3.20) und (3.19)

$$y = I'_\nu(\psi), \quad x = \tau_\nu, \quad P(x) = \sec\psi, \quad Q(x) = -B_\nu \sec\psi. \tag{3.23}$$

Im folgenden wählen wir als Anfangspunkt für die Zählung der optischen Tiefen die äußere Grenze der Sternatmosphäre, d.h., wir müssen in (3.21) x_0 gleich Null setzen. In Übereinstimmung mit (3.13) nimmt τ_ν zum Sternmittelpunkt hin zu (siehe Abb. 6). Folglich wird in der Lösung von (3.18) und (3.19)

$$\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx = -\int_0^{\tau_\nu} \sec\vartheta\, d\tau_\nu = -\tau_\nu \sec\vartheta \tag{3.24}$$

und

$$\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx = \int_0^{\tau_\nu} \sec\psi\, d\tau_\nu = \tau_\nu \sec\psi. \tag{3.25}$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) und (3.25), so

können wir die Lösungen der Gleichungen (3.18) und (3.19) in folgender Gestalt schreiben:

$$I_\nu(\vartheta, \tau_\nu) = C_\nu e^{\tau_\nu \sec\vartheta} + e^{\tau_\nu \sec\vartheta} \int\limits_{\tau_\nu}^{\infty} B_\nu e^{-t_\nu \sec\vartheta} \sec\vartheta \, dt_\nu, \tag{3.26}$$

$$I'_\nu(\psi, \tau_\nu) = D_\nu e^{-\tau_\nu \sec\psi} + e^{-\tau_\nu \sec\psi} \int\limits_0^{\tau_\nu} B_\nu e^{t_\nu \sec\psi} \sec\psi \, dt_\nu, \tag{3.27}$$

wobei beim Hinschreiben dieser Gleichungen hervorgehoben ist, daß die Intensität für das der optischen Tiefe τ_ν entsprechende Niveau der Sternphotosphäre berechnet wird. Um diese vorgegebene optische Tiefe von der unter dem Integralzeichen stehenden Veränderlichen zu unterscheiden, haben wir letztere mit t_ν bezeichnet.

Wir wollen uns jetzt mit der Bestimmung der Integrationskonstanten C_ν und D_ν beschäftigen. Die physikalische Bedeutung der Konstanten wird klar, wenn wir die Bedeutung jedes einzelnen Summanden der Lösungen (3.26) und (3.27) untersuchen.

Wir berechnen die Strahlungsenergie, die von einem in der Tiefe t_ν gelegenen (zylindrischen) Massenelement $\varrho\, ds$ mit der Grundfläche Eins während der Zeit dt, in dem Frequenzintervall $(\nu, \nu + d\nu)$ und in eine beliebige Richtung ϑ in den Raumwinkel $d\omega$ ausgestrahlt wird (siehe Abb. 3). Diese Energiemenge ist gemäß (2.10) gleich

$$j_\nu \varrho \, ds \, d\omega \, dt \, d\nu. \tag{3.28}$$

Auf dem Wege bis zu der Schicht mit der geringeren optischen Tiefe τ_ν wird diese Energie entsprechend (2.16) um einen gewissen Exponentialfaktor geschwächt.

Wenn sich die Strahlung senkrecht zu den Schichten ausbreiten würde, wäre der Exponent gleich $-(t_\nu - \tau_\nu)$. Doch da sich die Strahlung unter dem Winkel ϑ gegen die Normale ausbreitet, ist der Exponent gleich

$$-(t_\nu - \tau_\nu) \sec\vartheta. \tag{3.29}$$

Daher ist die von dem Massenelement ausgestrahlte Energie (3.28) in der Tiefe τ_ν gleich

$$j_\nu e^{-(t_\nu - \tau_\nu)\sec\vartheta} \varrho \, ds \, d\omega \, dt \, d\nu \tag{3.30}$$

oder nach (3.10), (3.13) und (2.27):

$$-B_\nu e^{-(t_\nu - \tau_\nu)\sec\vartheta} \sec\vartheta \, dt_\nu \, d\omega \, dt \, d\nu. \tag{3.31}$$

Um den Energieanteil auszurechnen, der nicht nur aus der Tiefe t_ν, sondern aus allen tiefer gelegenen Schichten in der vorgegebenen Richtung die Schicht τ_ν erreicht, müssen wir den Ausdruck (3.31) über alle t_ν von τ_ν bis ∞ integrieren. Als Resultat geht (3.31) in

$$d\omega \, dt \, d\nu \int\limits_{\tau_\nu}^{\infty} B_\nu e^{-(t_\nu - \tau_\nu)\sec\vartheta} \sec\vartheta \, dt_\nu \tag{3.32}$$

über.[1]) Nach Division des Ausdruckes durch $d\omega\, dt\, d\nu$ erhalten wir die Intensität der Strahlung, die in der Richtung ϑ von unten her auf die Schicht in der Tiefe τ_ν auftrifft:

$$I_\nu(\tau_\nu, \vartheta) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} B_\nu e^{-(t_\nu - \tau_\nu)\sec\vartheta} \sec\vartheta\, dt_\nu, \tag{3.33}$$

d.h. das zweite Glied des Ausdruckes (3.26).

Somit drückt das zweite Glied des Ausdruckes (3.26) aus, daß die unter dem spitzen Winkel ϑ gegen die äußere Normale in der Schicht mit der Tiefe τ_ν ankommende Strahlung aus Bestandteilen zusammengesetzt ist, die ihren Ursprung in sämtlichen Schichten mit Tiefen $t_\nu > \tau_\nu$ haben. Das erste Glied in (3.26) berücksichtigt irgendeine zusätzliche Strahlung, die von einer nicht in einer endlichen Tiefe gelegenen Schicht in die Schicht mit der Tiefe τ_ν gelangt. Dieses Glied entspricht einer in unendlicher Tiefe vorhandenen Fläche, die Strahlung von unendlich großer Intensität aussendet, wobei diese mit zunehmender Entfernung nach außen exponentiell abfällt. Bei unserem physikalischen Problem existiert eine solche Fläche nicht. Daher ist $C_\nu = 0$.

Ebenso leicht ist einzusehen, daß bei der unter dem spitzen Winkel ψ gegen die innere Normale nach innen gerichteten Strahlung die Intensität aus den Beiträgen der einzelnen, in den verschiedenen Tiefen $t_\nu < \tau_\nu$ liegenden Schichten der Photosphäre zusammengesetzt ist. Dies ist die physikalische Deutung des zweiten Gliedes in dem Ausdruck (3.27). Was das erste Glied anbetrifft, so stellt es eine von außen in die Photosphäre eindringende Strahlung dar, die bei Erreichung der Tiefe τ_ν um den Bruchteil $e^{-\tau_\nu \sec\psi}$ geschwächt ist. In allen Fällen – mit Ausnahme naher Doppelsterne, bei denen die Strahlung des einen Sternes in der Photosphäre des andern eine gewisse Rolle spielen kann – ist eine in die Photosphäre eindringende Strahlung kaum vorhanden. Daher kann man $D_\nu = 0$ setzen.

Somit haben wir

$$C_\nu = 0, \tag{3.34}$$

$$D_\nu = 0. \tag{3.35}$$

Setzen wir in (3.26) $C_\nu = 0$ und berücksichtigen wir (3.35), so erhalten wir entsprechend (3.26) und (3.27)

$$I_\nu(\vartheta, \tau_\nu) = e^{\tau_\nu \sec\vartheta} \int_{\tau_\nu}^{\infty} B_\nu e^{-t_\nu \sec\vartheta} \sec\vartheta\, dt_\nu, \tag{3.36}$$

$$I'_\nu(\psi, \tau_\nu) = e^{-\tau_\nu \sec\psi} \int_0^{\tau_\nu} B_\nu e^{t_\nu \sec\psi} \sec\psi\, d\tau_\nu. \tag{3.37}$$

---

[1]) Weil bei uns die Größe s vom Sternmittelpunkt aus anwächst, muß die Integration von (3.31) von $t_\nu = \infty$ bis $t_\nu = \tau_\nu$ ausgeführt werden (siehe Abb. 4). Wenn wir (unter Umkehrung des Vorzeichens vor dem Integral) die Integrationsgrenzen vertauschen, erhalten wir (3.32).

Aus der Gleichung (3.36) folgt unter anderem für die aus der Oberfläche der Photosphäre in Richtung ϑ austretende Strahlung:

$$I_\nu(\vartheta, 0) = \int_0^\infty B_\nu e^{-\tau_\nu \sec\vartheta} \sec\vartheta \, d\tau_\nu, \tag{3.38}$$

weil an der Grenze der Photosphäre $\tau_\nu = 0$ ist.

4. Die Mittelung der Strömungsgleichung

Wir befassen uns jetzt mit der Frage der Mittelung der Strömungsgleichung. Mathematisch gesehen, ist die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes in Sternphotosphären wie auch die im folgenden Kapitel des Buches behandelte Theorie der Absorptionslinien äußerst kompliziert. Eine der größten Schwierigkeiten besteht darin, daß man bei der Lösung des Problems die Änderung der Strahlungsintensität mit der Richtung, d.h. ihre Abhängigkeit von den Winkeln ϑ und ψ, in jedem Punkte der Photosphäre berücksichtigen muß. Wenn man an die Endergebnisse keine besonders hohen Genauigkeitsforderungen stellt, kann man gewisse vereinfachende Voraussetzungen über die Größen $I_\nu(\vartheta)$ und $I'_\nu(\psi)$ einführen. Wir werden sie über die Richtungen mitteln.

Wo sich die Möglichkeit dazu bietet, werden wir durch den Vergleich der gefundenen Resultate mit denen, die aus einer strengeren Behandlung der entsprechenden Probleme abgeleitet worden sind, die Fehler der Mittelung abschätzen.

Wir schreiben noch einmal die Gleichungen (3.12) und (3.17) auf:

$$0 \leqslant \vartheta < \frac{\pi}{2}, \quad \cos\vartheta \frac{d I_\nu(\vartheta)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\vartheta) - B_\nu, \tag{3.12}$$

$$0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \cos\psi \frac{d I'_\nu(\psi)}{d\tau_\nu} = -I'_\nu(\psi) + B_\nu. \tag{3.17}$$

Wir multiplizieren beide Seiten dieser Gleichungen mit $\frac{d\omega}{2\pi}$ und integrieren das Resultat über die zugehörigen Halbkugeln. Dann erhalten wir

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d}{d\tau_\nu} \int_{2\pi} I_\nu(\vartheta) \cos\vartheta \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{2\pi} I_\nu(\vartheta) \frac{d\omega}{2\pi} - B_\nu, \tag{3.39}$$

$$0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d}{d\tau_\nu} \int_{2\pi} I'_\nu(\psi) \cos\psi \frac{d\omega}{2\pi} = -\int_{2\pi} I'_\nu(\psi) \frac{d\omega}{2\pi} + B_\nu, \tag{3.40}$$

da B_ν von ϑ und ψ nicht abhängt.

Wir ziehen jetzt nach dem Mittelwertsatz in (3.39) und (3.40) die Größen $\cos\vartheta$ und $\cos\psi$ vor das Integralzeichen und bezeichnen ihre Mittelwerte mit

$\overline{\cos\vartheta}$ und $\overline{\cos\psi}$. Es ist klar, daß infolge der Abhängigkeit von $I_\nu(\vartheta)$ und $I'_\nu(\psi)$ von τ_ν auch $\overline{\cos\vartheta}$ und $\overline{\cos\psi}$ im allgemeinen von τ_ν abhängen werden.

Wenn wir jedoch in unserer Näherung voraussetzen, daß beide Größen konstant sind, finden wir

$$\overline{\cos\vartheta}\frac{d I_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - B_\nu, \tag{3.41}$$

$$\overline{\cos\psi}\frac{d I'_\nu}{d\tau_\nu} = -I'_\nu + B_\nu, \tag{3.42}$$

wobei

$$I_\nu = \int\limits_{2\pi} I_\nu(\vartheta)\frac{d\omega}{2\pi}, \tag{3.43}$$

$$I'_\nu = \int\limits_{2\pi} I'_\nu(\psi)\frac{d\omega}{2\pi} \tag{3.44}$$

die m i t t l e r e n Intensitäten in den entsprechenden Halbkugeln sind.

Um aus den Gleichungen (3.41) und (3.42) die Intensitäten I_ν und I'_ν zu finden, müssen wir $\overline{\cos\vartheta}$ und $\overline{\cos\psi}$ bestimmen. Die beiden angegebenen Größen sind nicht die einfachen Mittelwerte aus den Cosinus der Winkel in den entsprechenden Halbkugeln.[1]) Nach (3.39) und (3.40) sind die Mittelwerte von $\cos\vartheta$ und $\cos\psi$ entsprechend den Intensitäten $I_\nu(\vartheta)$ und $I'_\nu(\psi)$ *gewichtete Mittel.* Daher muß die Bestimmung der Größen $\overline{\cos\vartheta}$ und $\overline{\cos\psi}$ gemeinsam mit der Berechnung der allgemeinen Größen, die das Strahlungsfeld in einer Sternphotosphäre charakterisieren, vorgenommen werden. Zu diesem Zweck sehen wir für den Augenblick von der Aufteilung des Strahlungsfeldes in zwei Halbkugeln und von der Mittelung der Intensitäten völlig ab und rechnen mit dem von 0 bis π variierenden Winkel ϑ. In diesem Falle müssen wir für die Strömungsgleichung die Form (3.12) benutzen. Wir multiplizieren letztere mit $\cos\vartheta\,\frac{d\omega}{4\pi}$ und integrieren das Resultat über die ganze Kugel. Dann erhalten wir

$$\frac{d}{d\tau_\nu}\int\limits_{4\pi} I_\nu(\vartheta)\cos^2\vartheta\frac{d\omega}{4\pi} = \int\limits_{4\pi} I_\nu(\vartheta)\cos\vartheta\frac{d\omega}{4\pi} - \int\limits_{4\pi} B_\nu\cos\vartheta\frac{d\omega}{4\pi}. \tag{3.45}$$

Wenn wir beachten, daß B_ν nicht von ϑ abhängt, finden wir auf Grund von (2.8) leicht, daß das zweite Glied der rechten Seite von (3.45) gleich Null ist.

---

[1]) Das einfache Mittel von $\cos\vartheta$ ist gleich $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2}$. Das gleiche erhält man auch für $\overline{\cos\psi}$. Nehmen wir $\overline{\cos\vartheta} = \overline{\cos\psi} = \frac{1}{2}$ an, so erhalten wir eine sehr grobe Näherung, die als SCHWARZSCHILDsche Näherung bekannt ist.

Ferner führen wir die Größe

$$K_\nu = \int_{4\pi} I_\nu(\vartheta) \cos^2\vartheta \frac{d\omega}{4\pi} \tag{3.46}$$

ein. Dann erhalten wir unter Beachtung der Definition des Strahlungsstromes (2.5) an Stelle von (3.45)

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{H_\nu}{4}. \tag{3.47}$$

Diese Gleichung besitzt strenge Gültigkeit und ist mit keinerlei Näherung verknüpft. Mit ihrer Hilfe bestimmen wir die Größen $\overline{\cos\vartheta}$ und $\overline{\cos\psi}$. Zu diesem Zweck drücken wir die Größen K_ν, H_ν und die von uns durch den Ausdruck (3.15) eingeführte Größe J_ν durch die mittleren Intensitäten aus. Wir beginnen mit der Größe K_ν. Gemäß (3.46) und (2.8) ist sie gleich

$$K_\nu = \int_{4\pi} I_\nu(\vartheta)\cos^2\vartheta \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\int_0^\pi I_\nu(\vartheta)\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(\vartheta)\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} I_\nu(\vartheta)\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(\vartheta)\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} I'_\nu(\psi)\cos^2\psi\sin\psi\, d\psi\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\overline{I_\nu(\vartheta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta + \overline{I'_\nu(\psi)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\sin\psi\, d\psi\right\}, \tag{3.48}$$

wobei $\overline{I_\nu(\vartheta)}$ und $\overline{I'_\nu(\psi)}$ die nach dem Mittelwertsatz gefundenen mittleren Intensitäten in den entsprechenden Halbkugeln bedeuten.

Wenn wir zulassen, daß diese Mittelwerte gleich den entsprechenden Mittelwerten in den Gleichungen (3.41) und (3.42) sind, und in (3.48) die Integrale in der letzten geschweiften Klammer ausrechnen, die beide den Wert $\frac{1}{3}$ ergeben, dann erhalten wir

$$K_\nu = \frac{1}{6}(I_\nu + I'_\nu). \tag{3.49}$$

Auf völlig analogem Wege kann man aus den Gleichungen (2.5) und (3.15) H_ν und J_ν ausrechnen:

$$H_\nu = I_\nu - I'_\nu, \tag{3.50}$$

$$J_\nu = \frac{1}{2}(I_\nu + I'_\nu). \tag{3.51}$$

Folglich besteht unsere grundlegende vereinfachende Voraussetzung darin, daß wir bei der Berechnung von K_ν, H_ν und J_ν annehmen, daß in allen drei Fällen die mittleren Intensitäten $\overline{I_\nu(\vartheta)}$ und $\overline{I'_\nu(\psi)}$ gleich den entsprechenden Mittelwerten I_ν und I'_ν aus den Gleichungen (3.41) und (3.42) sind.

Zu denselben Ausdrücken (3.49), (3.50) und (3.51) und ebenfalls zu den Gleichungen (3.41) und (3.42) wären wir gelangt, wenn wir gleich zu Beginn unserer Überlegungen vorausgesetzt hätten, daß die Intensitäten $I_\nu(\vartheta)$ und $I'_\nu(\psi)$ in den entsprechenden Halbkugeln von der Richtung unabhängig sind. In diesem Falle (siehe Abb. 7) erhalten wir:

$$0 \leqslant \vartheta < \frac{\pi}{2}, \quad I_\nu(\vartheta) \equiv I_\nu, \tag{3.52}$$

$$0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad I'_\nu(\psi) \equiv I'_\nu. \tag{3.53}$$

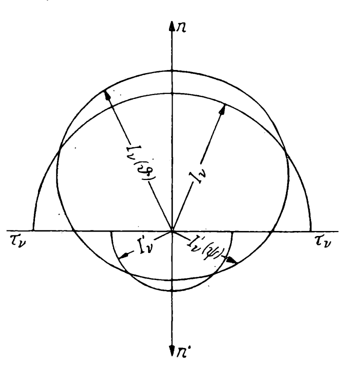


Abb. 7

Vergleichen wir jetzt (3.49) und (3.51), so finden wir, daß

$$J_\nu = 3K_\nu \tag{3.54}$$

ist. In Verbindung hiermit erhält die Gleichung (3.47) die Gestalt

$$\frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{3}{4}H_\nu. \tag{3.55}$$

Auf Grund von (3.50) und (3.51) kann man diese Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{d(I_\nu + I'_\nu)}{d\tau_\nu} = \frac{3}{2}(I_\nu - I'_\nu). \tag{3.56}$$

Mit Rücksicht darauf, daß die Eigenschaften des Strahlungsfeldes in der oberen Halbkugel sich nicht wesentlich von denen in der unteren Halbkugel unterscheiden können, nehmen wir an, daß die Mittelwerte der Cosinus in den Gleichungen (3.41) und (3.42) einander gleich sind. Dies ist unsere letzte Vereinfachung:

$$\overline{\cos\vartheta} = \overline{\cos\psi} = a. \tag{3.57}$$

Somit nehmen unsere Gleichungen (3.41) und (3.42) die Gestalt

$$a \frac{d I_\nu}{d \tau_\nu} = I_\nu - B_\nu, \tag{3.58}$$

$$a \frac{d I'_\nu}{d \tau_\nu} = -I'_\nu + B_\nu \tag{3.59}$$

an. Ihre Addition ergibt

$$a \frac{d (I_\nu + I'_\nu)}{d \tau_\nu} = I_\nu - I'_\nu. \tag{3.60}$$

Wenn wir endlich (3.60) und (3.56) vergleichen, so finden wir, daß $a = \frac{2}{3}$ ist. In Verbindung hiermit erhalten unsere Strömungsgleichungen für die mittleren Intensitäten die endgültige Gestalt

$$\frac{2}{3} \frac{d I_\nu}{d \tau_\nu} = I_\nu - B_\nu, \tag{3.61}$$

$$\frac{2}{3} \frac{d I'_\nu}{d \tau_\nu} = -I'_\nu + B_\nu. \tag{3.62}$$

Die Lösung dieser Gleichungen kann man sofort hinschreiben. In der Tat kann man sie formal genauso wie die Gleichungen (3.12) und (3.17) mit $\cos\vartheta = \cos\psi = \frac{2}{3}$ behandeln. Da die Lösung der Gleichungen (3.12) und (3.17) durch die Gleichungen (3.36) und (3.37) gegeben ist, werden demnach die Lösungen der Gleichungen (3.61) und (3.62)

$$I_\nu = e^{\frac{3}{2}\tau_\nu} \int_{\tau_\nu}^{\infty} B_\nu e^{-\frac{3}{2}t_\nu} \frac{3}{2}\, d t_\nu, \tag{3.63}$$

$$I'_\nu = e^{-\frac{3}{2}\tau_\nu} \int_{0}^{\tau_\nu} B_\nu e^{\frac{3}{2}t_\nu} \frac{3}{2}\, d t_\nu. \tag{3.64}$$

§ 4. *Die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes für den frequenzunabhängigen Absorptionskoeffizienten*

1. Die Temperaturverteilung in einer Photosphäre in Abhängigkeit von der Tiefe

Im vorliegenden Paragraphen betrachten wir den Fall, daß der Absorptionskoeffizient im Innern einer Photosphäre in allen Tiefen von der Frequenz unabhängig ist. Stoffe mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als graue Materie.

Hierbei sei sogleich darauf hingewiesen, daß sich der vorliegende Fall sehr oft beträchtlich von den wirklichen Verhältnissen unterscheidet. Sogar bei einem Stern vom Sonnentypus, der am geringsten von der „Grauheit" abweicht, ändert sich – wie wir später sehen werden – der Absorptionskoeffizient beträchtlich mit der Frequenz. Dessenungeachtet ist das Studium der Eigenschaften der Photosphären mit $\varkappa_\nu = \varkappa = \text{const}$ in mancherlei Hinsicht von großem Interesse. Erstens können wir in diesem Fall am leichtesten die Fehler abschätzen, die beim Mitteln der Intensitäten $I_\nu(\vartheta)$ und $I'_\nu(\psi)$ und durch die Substitution der Größen I_ν und I'_ν entstehen. Zweitens ist der Fall $\varkappa_\nu = \varkappa = \text{const}$ ein Modell, das die Möglichkeit gibt, uns ein Bild über die Abhängigkeit von $\varkappa_\nu$ von der Frequenz zu machen. Endlich ist der Fall $\varkappa_\nu = \varkappa$ historisch früher behandelt als die andern Fälle. Er hat die Entwicklung der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes eingeleitet.

Behandeln wir zunächst das Problem der Temperaturverteilung in einer Photosphäre. Weil der Absorptionskoeffizient von der Frequenz nicht abhängt, d.h. weil die Bedingung

$$\varkappa_\nu = \varkappa = \text{const} \tag{4.1}$$

erfüllt ist, können wir für die optische Tiefe

$$d\tau = \varkappa\varrho\, dh \tag{4.2}$$

schreiben. Die Bedingung des Strahlungsgleichgewichtes (3.16) nimmt auf Grund von (4.1) die Gestalt

$$J = B \tag{4.3}$$

an, wobei

$$J = \int_0^\infty J_\nu\, d\nu \tag{4.4}$$

und

$$B = \int_0^\infty B_\nu\, d\nu. \tag{4.5}$$

Wir ersetzen in den Strömungsgleichungen (3.61) und (3.62) das Differential $d\tau_\nu$ durch $d\tau$ und integrieren beide Gleichungen über alle Frequenzen von 0 bis ∞. Dann erhalten wir

$$\frac{2}{3}\frac{dI}{d\tau} = I - B, \tag{4.6}$$

$$\frac{2}{3}\frac{dI'}{d\tau} = -I' + B, \tag{4.7}$$

wobei

$$I = \int_0^\infty I_\nu\, d\nu \quad \text{und} \quad I' = \int_0^\infty I'_\nu\, d\nu \tag{4.8}$$

ist.

Wenn wir die Gleichungen (3.50) und (3.51) in denselben Grenzen über die Frequenz integrieren, finden wir

$$H = I - I', \tag{4.9}$$

$$J = \frac{1}{2}(I + I'). \tag{4.10}$$

Wir addieren jetzt (4.6) und (4.7) und beachten dabei (4.9) und (4.10). Wir erhalten dann

$$\frac{dJ}{d\tau} = \frac{3}{4} H. \tag{4.11}$$

Ferner ersetzen wir in Übereinstimmung mit (4.3) die Größe J durch B und berücksichtigen die von uns in § 3 bewiesene Konstanz des Stromes der Gesamtstrahlung H mit der Tiefe. Dann können wir die Gleichung (4.11) integrieren, was

$$B = \frac{3}{4} H\tau + B_0 \tag{4.12}$$

ergibt, wobei B_0 eine Integrationskonstante ist. Wir bestimmen sie folgendermaßen: Da an der Begrenzung des Sternes, wo $\tau = 0$, eine einströmende Strahlung nicht existiert, erhält man auf Grund von (4.9)

$$H = (I)_{\mathrm{gr}}. \tag{4.13}$$

Weiter gilt nach (3.63) für $\tau = 0$

$$(I_\nu)_{\mathrm{gr}} = \int\limits_0^\infty B_\nu e^{-\frac{3}{2}t} \frac{3}{2} dt \tag{4.14}$$

oder, über das gesamte Spektrum integriert,

$$(I)_{\mathrm{gr}} = \int\limits_0^\infty B e^{-\frac{3}{2}t} \frac{3}{2} dt. \tag{4.15}$$

Indem wir (4.13) und (4.15) gleichsetzen und unter dem Integral die Lösung (4.12) einsetzen, erhalten wir

$$H = \int\limits_0^\infty \left(\frac{3}{4} Ht + B_0\right) e^{-\frac{3}{2}t} \frac{3}{2} dt, \tag{4.16}$$

wobei wir berücksichtigt haben, daß die Funktion B unter dem Integralzeichen von der Integrationsveränderlichen t abhängt. Ersetzen wir ferner in

(4.16) die Größe $\frac{3}{2}\,t$ durch x und beachten wir die allgemein gültigen Relationen

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = \ldots 1, \tag{4.17}$$

so finden wir unmittelbar

$$B_0 = \frac{H}{2}. \tag{4.18}$$

Folglich ist gemäß (4.12) und (4.18)

$$B = \frac{H}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right). \tag{4.19}$$

Jetzt gehen wir zur Temperatur über. Nach der Theorie der Wärmestrahlung gilt

$$\pi B = \pi \int_0^\infty B_\nu\,d\nu = \sigma T^4, \tag{4.20}$$

wobei σ eine Konstante mit dem Werte $5{,}672 \cdot 10^{-5}$ erg/cm² sec grad⁴ ist.

Wir führen jetzt die sogenannte *effektive Temperatur* T_e des Sternes ein. Wir definieren sie mit Hilfe des Strahlungsstromes folgendermaßen:

$$\pi H = \sigma T_e^4. \tag{4.21}$$

Somit muß das Produkt σT_e^4 die Energiemenge in erg angeben, die in 1 sec nach allen Richtungen und im gesamten Spektrum von einem Quadratzentimeter der Sternoberfläche ausgestrahlt wird. Die durch die Relation (4.21) eingeführte effektive Temperatur besitzt in gewisser Hinsicht nur formalen Charakter. Sie hängt mit unserer früheren Annahme zusammen, daß die Sternoberflächen nach dem PLANCKschen Gesetz (3.11) strahlen.

Die effektive Temperatur definiert bis zu einem gewissen Grade eine mittlere Temperatur der Sternphotosphäre und mit Hilfe der Relation (4.21) den Strom der Gesamtstrahlung.[1])

Infolge von (4.21) ist die *absolute bolometrische Helligkeit* eines Sternes mit dem Radius R gleich

$$L = 4\pi R^2 \cdot \pi H = 4\pi R^2 \cdot \sigma T_e^4. \tag{4.22}$$

Wenn wir jetzt (4.20) und (4.21) in (4.19) einführen, finden wir

$$T^4 = \frac{T_e^4}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right). \tag{4.23}$$

---

[1]) Hierbei kann sich die spektrale Zusammensetzung sogar stark von einer PLANCKschen Kurve (3.11) mit der Temperatur $T = T_e$ unterscheiden.

Aus (4.23) folgt, daß die der optischen Tiefe $\tau = 0$ entsprechende Grenztemperatur T_0 der Photosphäre durch die Relation

$$T_0^4 = \frac{T_e^4}{2} \tag{4.24}$$

definiert ist. Hieraus folgt, daß $T_0 = 0{,}841\ T_e$.

Ferner erkennen wir aus (4.23), daß auf dem Niveau $\tau = \frac{2}{3}$ die Temperatur der Photosphäre gleich der effektiven Temperatur ist.

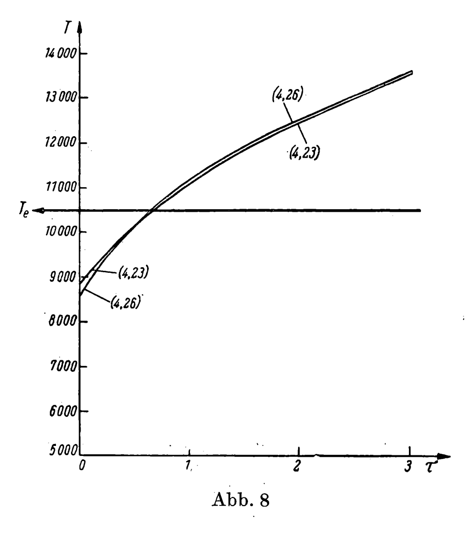


Abb. 8

Bevor wir aus (4.19) oder (4.23) weitere Folgerungen ziehen, geben wir eine Abschätzung der Genauigkeit dieser Gleichungen.

Die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes im Falle der grauen Materie ist verhältnismäßig einfach. Deshalb war es hier möglich, ohne zusätzliche vereinfachende Voraussetzungen mathematisch voranzukommen.

Mathematische Untersuchungen zeigten, daß in dem vorliegenden Fall der genaue Zusammenhang zwischen T_0 und T_e folgender ist:

$$T_0^4 = \frac{\sqrt{3}}{4} T_e^4. \tag{4.25}$$

Hieraus folgt, daß $T_0 = 0{,}811\ T_e$.

Chandrasekhar fand unter Anwendung einer von ihm entwickelten Methode der sukzessiven Approximation in der vierten – praktisch genauen – Näherung folgenden Zusammenhang zwischen B und τ:

$$B = \frac{3}{4} H (\tau + 0{,}70692 - 0{,}08392\, e^{-4{,}45808\,\tau} - 0{,}03619\, e^{-1{,}59178\tau} - 0{,}00946\, e^{-1{,}10319\,\tau}), \tag{4.26}$$

wobei auch hier die Relation (4.25) gültig ist.

Um die Näherungslösung (4.23) mit der Lösung (4.26) vergleichen zu können, zeigen wir in Abb. 8 das Anwachsen von T mit τ, berechnet für Sterne mit $T_e = 10500°$. Der Vergleich beider Kurven zeigt, daß wir uns für praktische Zwecke auf die Näherungslösung (4.23) beschränken können. Andererseits entsteht diese Näherung im wesentlichen durch das Mitteln der Intensitäten über alle Richtungen. Folglich ist zu vermuten, daß für praktische Zwecke der gleiche Prozeß des Mittelns der Intensitäten auch auf den allge-

meineren Fall, bei einer Frequenzabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten anwendbar ist. Diese Vermutung findet durch entsprechende numerische Rechnungen ihre Bestätigung.

2. Das Gesetz der Randverdunkelung der Sterne

Wir befassen uns jetzt mit der Anwendung der gefundenen Lösungen (4.19) und (4.23). Wir betrachten die aus dem Stern austretende Strahlung in Abhängigkeit von ihrer Richtung. Schon der unmittelbare Anblick der Sonnenscheibe bzw. eine photographische Aufnahme zeigt eine Abnahme der Sonnenhelligkeit von der Mitte zum Rande. Qualitativ ist dies leicht zu erklären.

Wir schreiben zunächst einen allgemeinen Ausdruck für die aus der Sonnen- (Stern-)oberfläche unter dem Winkel ϑ austretende Strahlungsintensität hin. Unter Beachtung von (4.1) und (4.2) wird diese Intensität nach (3.38) gleich

$$I_\nu(\vartheta, 0) = \int_0^\infty B_\nu e^{-t\sec\vartheta} \sec\vartheta\, dt, \tag{4.27}$$

weil an der Begrenzung des Sternes $\tau_\nu = \tau = 0$.

Den Ausdruck (4.27) können wir auch so umschreiben:

$$I_\nu(\vartheta, 0) = \frac{\int_0^\infty B_\nu e^{-t\sec\vartheta} \sec\vartheta\, dt}{\int_0^\infty e^{-t\sec\vartheta} \sec\vartheta\, dt}, \tag{4.28}$$

weil der Nenner in (4.28) gleich Eins ist.

Somit können wir die Intensität $I_\nu(\vartheta, 0)$ als gewichtetes Mittel der Größen B_ν auffassen. Hierbei folgt aus (4.28), daß die Strahlung aus um so geringeren optischen Tiefen zu uns gelangt, je größer $\sec\vartheta$ wird. In der Tat kann für solche t, die beträchtlich kleiner als Eins sind, das Produkt $t\sec\vartheta$ für $\vartheta \to \frac{\pi}{2}$ beliebig groß werden, so daß die Strahlung aus großen Tiefen überhaupt nicht aus der Oberfläche der Sonne austreten kann (Wirkung des Faktors $e^{-t\sec\vartheta}$). Und da B_ν mit t wächst, kommt die aus der Mitte der Scheibe ($\vartheta = 0$) austretende Strahlung aus heißeren (tieferen) Schichten als die Strahlung, die in der Nähe der Peripherie der Scheibe austritt. Daher ist stets die Ungleichung

$$I_\nu(\vartheta, 0) < I_\nu(0, 0) \tag{4.29}$$

erfüllt. Insbesondere folgt aus (4.28), daß am Rande der Sonnenscheibe, wo $\vartheta \to \frac{\pi}{2}$ und $\sec\vartheta \to \infty$, (unabhängig vom Absorptionskoeffizienten)

$$I_\nu\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \approx B_\nu(T_0) \tag{4.30}$$

gilt.

Jetzt wenden wir uns der quantitativen Behandlung der aufgeworfenen Frage zu. Zunächst betrachten wir die Gesamtstrahlung. Zu diesem Zweck multiplizieren wir (4.27) mit $d\nu$ und integrieren das Resultat über ν von 0 bis ∞. Wir erhalten

$$I(\vartheta, 0) = \int_0^\infty B e^{-t \sec\vartheta} \sec\vartheta \, dt. \tag{4.31}$$

Setzen wir (4.19) in (4.31) ein und führen wir die entsprechenden Integrationen aus (wobei wir $t \sec\vartheta$ durch x ersetzen), so erhalten wir

$$I(\vartheta, 0) = \frac{H}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\cos\vartheta\right). \tag{4.32}$$

Im Mittelpunkt der Scheibe, wo $\vartheta = 0$, gilt

$$I(0, 0) = \frac{5}{2}\frac{H}{2}, \tag{4.33}$$

und hiermit

$$I(\vartheta, 0) = I(0, 0)\left(1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cos\vartheta\right) = I(0, 0)\,(1 - u + u\cos\vartheta), \tag{4.34}$$

wobei $u = \frac{3}{5} = 0{,}60$.

Die Beobachtungen bestätigen im allgemeinen das Gesetz (4.34) und ergeben $u = 0{,}56$. Betrachten wir jetzt das Gesetz der Randverdunkelung für monochromatische Strahlung. Da die Beobachter im allgemeinen die Wellenlängenskala benutzen, schreiben wir (4.27) folgendermaßen um:

$$I_\lambda(\vartheta, 0) = \int_0^\infty B_\lambda e^{-t \sec\vartheta} \sec\vartheta \, dt. \tag{4.35}$$

Der Übergang von B_ν, das durch die Gleichung (3.11) gegeben ist, auf B_λ vollzieht sich auf Grund elementarer Überlegungen. Da die Energiemenge, die von einer beliebigen Quelle in einem gegebenen Intervall des Spektrums ausgestrahlt wird, nicht von der benutzten Skala abhängt, können wir schreiben:

$$B_\nu\,|d\nu| = B_\lambda\,|d\lambda|. \tag{4.36}$$

Und weil

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \tag{4.37}$$

so gilt

$$|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2}\,|d\lambda|. \tag{4.38}$$

Benutzen wir (3.11), (4.36), (4.37) und (4.38), erhalten wir

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} . \tag{4.39}$$

Führen wir jetzt (4.39) in (4.35) ein und beachten wir (4.23), so haben wir

$$I_\lambda(\vartheta, 0) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \int_0^\infty \frac{e^{-t \sec \vartheta} \sec \vartheta \, dt}{e^{\frac{hc}{k\lambda T_e \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} t\right)^{1/4}}} - 1} . \tag{4.40}$$

Das Integral in (4.40) kann durch numerische Integration berechnet werden. Die Rechnung führt zu folgenden Ergebnissen:

1. Die Randverdunkelung wächst mit abnehmender Wellenlänge. Insbesondere ist

$$\lim_{\lambda \to 0} \left[\frac{I_\lambda\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{I_\lambda(0, 0)} \right] = 0, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \left[\frac{I_\lambda\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{I_\lambda(0, 0)} \right] = 0{,}817 , \tag{4.41}$$

wobei $I_\lambda(0,0)$ die vom Sonnenmittelpunkt und $I_\lambda\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ die vom äußersten Rand ausgehende Strahlungsintensität ist.

2. Die Übereinstimmung der betrachteten Theorie mit den Beobachtungen ist im allgemeinen zufriedenstellend; die größten Abweichungen überschreiten nicht 15–20%. Im Mittel sind sie beträchtlich kleiner.

3. Das kontinuierliche Spektrum der Sterne

Um die Richtigkeit unserer zugrunde gelegten Voraussetzungen nachzuweisen, genügt es nicht, daß die Theorie der Randverdunkelung mit der Beobachtung übereinstimmt. Wir müssen zu diesem Zweck auch die theoretische und die beobachtete Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Sonne und der Sterne miteinander vergleichen. Dies können wir auf zwei verschiedene Weisen erreichen. Bei der Sonne können wir die Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum an einer beliebigen Stelle der Sonnenscheibe untersuchen. Die theoretische Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum ist in diesem Fall durch den Ausdruck (4.40) gegeben. Tatsächlich können wir nach Einsetzen eines beliebigen Wertes ϑ in (4.40) den Gang von $I_\lambda(\vartheta, 0)$ mit der Wellenlänge für dieses ϑ untersuchen. Diese Methode ist jedoch auf die Sterne nicht anwendbar, weil wir bei ihnen keine Scheibe erkennen und nur die Summe der von der ganzen Scheibe des vorliegenden Sternes ausgehenden Strahlung wahrnehmen können. Wir berechnen diese Strahlung unter der Annahme, daß der Beobachter hinreichend weit vom Stern entfernt ist.

Den Abstand eines beliebigen Punktes der Sternscheibe von deren Mittelpunkt bezeichnen wir mit r. Dann ist die Fläche eines konzentrischen Kreisringes mit der Dicke dr und dem Radius r gleich

$$dS = 2\pi r\, dr. \tag{4.42}$$

Ferner möge die von diesem Kreisring in Richtung des Beobachters ausgehende Energie die Intensität $I_\nu(r, 0)$ besitzen (Abb. 9). Dann strahlt der fragliche Kreisring in der Zeit dt die folgende Energiemenge zum Beobachter hin:

$$dE_\nu = 2\pi r I_\nu(r, 0)\, dr\, d\nu\, dt\, \Delta\Omega, \tag{4.43}$$

wobei $\Delta\Omega$ der Raumwinkel ist, unter dem vom Stern aus die Empfangsapparatur des Beobachters erscheint.

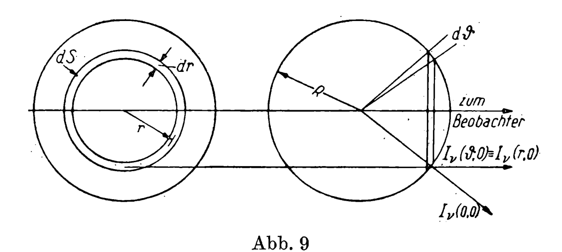


Abb. 9

In Übereinstimmung mit (4.43) ist die von der gesamten Sternscheibe zum Beobachter hin ausgestrahlte Energie gleich

$$\Delta E_\nu = d\nu\, dt\, \Delta\Omega\, 2\pi \int_0^R I_\nu(r, 0)\, r\, dr, \tag{4.44}$$

wobei R der Sternradius ist.

Benutzt man ferner die Relationen

$$r = R \sin\vartheta, \quad dr = R\cos\vartheta\, d\vartheta, \tag{4.45}$$

dann findet man

$$\begin{aligned} \Delta E_\nu &= d\nu\, dt\, \Delta\Omega\, 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(\vartheta, 0) \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta \\ &= R^2 \pi (H_\nu)_{\text{gr}}\, d\nu\, dt\, \Delta\Omega. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Demnach erhalten wir von einem weit entfernten Stern eine Strahlung, deren spektrale Zusammensetzung durch den Strahlungsstrom auf seiner Oberfläche bestimmt wird; den Strahlungsstrom haben wir mit $\pi(H_\nu)_{\text{gr}}$ bezeichnet.

Wenn wir jetzt den Ausdruck (4.46) durch πR^2 (die Fläche der Sternscheibe) und das Produkt $d\nu dt \Delta\Omega$ dividieren, erhalten wir offenbar die von dem weit

entfernten Stern ausgehende mittlere Strahlungsintensität $\overline{I}_\nu$. Nach (4.46) erhalten wir

$$\overline{I}_\nu = (H_\nu)_{\mathrm{gr}}, \tag{4.47}$$

d.h., die mittlere Strahlungsintensität $\overline{I}_\nu$ ist gleich dem durch π dividierten Strahlungsstrom $\pi (H_\nu)_{\mathrm{gr}}$.

Zur Berechnung von $(\pi H_\nu)_{\mathrm{gr}}$ benutzen wir wieder die Näherungsausdrücke aus dem vorangehenden Paragraphen.

Nach (3.50) ist

$$(H_\nu)_{\mathrm{gr}} = (I_\nu)_{\mathrm{gr}}, \tag{4.48}$$

weil an der Begrenzung des Sternes $I'_\nu \equiv 0$ ist. Folglich erhält man mit (3.63)

$$\overline{I}_\nu = (H_\nu)_{\mathrm{gr}} = \int_0^\infty B_\nu e^{-\frac{3}{2} t_\nu} \frac{3}{2} dt_\nu, \tag{4.49}$$

oder, für den Fall der grauen Materie,

$$\overline{I}_\nu = (H_\nu)_{\mathrm{gr}} = \int_0^\infty B_\nu e^{-\frac{3}{2} t} \frac{3}{2} dt. \tag{4.50}$$

Die Ausdrücke (4.49) und (4.50) geben die theoretische Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum weit entfernter Sterne wieder.

Wir gehen jetzt unter Beachtung von (4.50), (4.39) und (4.23) zur Wellenlängenskala über und finden

$$\overline{I}_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{3}{2} t} \frac{3}{2} dt}{e^{\frac{hc}{k \lambda T_e \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} t\right)^{1/4}}} - 1}. \tag{4.51}$$

Wenn wir jetzt einen bestimmten, dem betrachteten Stern entsprechenden Wert für T_e vorgeben, können wir – genauso wie im Falle (4.40) – die Abhängigkeit der kontinuierlichen Sternstrahlung (bzw. Sonnenstrahlung) von der Wellenlänge ermitteln. Entsprechende Rechnungen zeigen, daß die theoretische Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Sterne, die die effektive Temperatur T_e besitzen, nahezu eine PLANCKsche Verteilung (4.39) mit derselben effektiven Temperatur T_e ist. Die hauptsächlichen Abweichungen des Gesetzes (4.51) vom PLANCKschen Gesetz (4.39) für dasselbe T_e sind die folgenden:

1. Die aus (4.51) erhaltene Kurve ist gegen die PLANCKsche Kurve (4.39) ein wenig in Richtung der kurzen Wellenlängen verschoben.

2. Im fernen ultravioletten Spektralbereich ist der PLANCKsche Charakter des Gesetzes (4.51) gestört, und $\overline{I}_\lambda$ ist beträchtlich größer als das nach der

Gleichung (4.39) mit demselben λ und demselben T_e berechnete B_λ. Die zuletzt erwähnte Abweichung wird mit abnehmendem λ ständig größer.

Im allgemeinen stimmt in dem der Beobachtung zugänglichen Bereich des Spektrums eines beliebigen Sternes die aus (4.51) folgende theoretische Energieverteilung genähert mit der PLANCKschen Verteilung (4.39) überein, wenn man für den Parameter T die effektive Sterntemperatur T_e einsetzt. Auch diese Schlußfolgerung müssen wir mit den Beobachtungstatsachen vergleichen, wobei uns nur die relative Energieverteilung, d.h. die Abhängigkeit der Intensität der Sternstrahlung (bzw. Sonnenstrahlung) von der Wellenlänge, interessieren wird.

Um die Energieverteilung in einem gewissen Wellenlängenintervall quantitativ beschreiben zu können, führen wir die sogenannte spektralphotometrische Temperatur[1]) ein. Wir suchen denjenigen Temperaturwert $T = T_c$, für den die nach dem PLANCKschen Gesetz (4.39) berechnete relative Intensitätsverteilung die in diesem Intervall beobachtete Intensitätsverteilung im Sternspektrum am besten darstellt. Diese Temperatur nennen wir die *spektralphotometrische Temperatur* des Sternes [20, S. 155].

Im kontinuierlichen Spektrum eines absolut schwarzen Körpers von der Temperatur T gilt in jedem beliebigen Spektralbereich die Gleichung $T_c = T$. Dagegen kann sich bei nichtschwarzer Strahlung der Parameter T_c für ein und dieselbe Strahlungsquelle bei anderer Wahl des Wellenlängenintervalles beträchtlich ändern.

Wenden wir uns jetzt den Beobachtungen zu. Wir betrachten zunächst die von der gesamten Sonnenscheibe ausgehende Strahlung. Auf Grund von vorliegenden Beobachtungsdaten kann man das kontinuierliche Spektrum dieser Strahlung im Intervall von 4500–7000 Å durch eine PLANCKsche Kurve mit $T_c = 7000$–$7200°$ darstellen, während die effektive Temperatur T_e der Sonne gleich 5710° ist. Eine noch größere Differenz zwischen T_e und T_c tritt bei den Sternen auf, die nicht vom Sonnentyp sind.

Die Spektren der späten Sterne mit den Spektralklassen M–N sind durch von Molekülen herrührende Absorptionsbanden so sehr entstellt, daß die Einführung einer spektralphotometrischen Temperatur hier meistens ihren Sinn verliert.

Im Spektralklassenintervall von G0 bis B0 beobachtet man eine andere Erscheinung. Hier erleidet die Intensität des kontinuierlichen Spektrums an der Grenze der BALMER-Serie ($\lambda = 3646$ Å) einen Sprung. So verringert sich z.B. bei den Sternen der Spektralklasse A0 die Strahlungsintensität plötzlich um das Dreifache, wenn man von dieser Wellenlänge zu kürzeren Wellenlängen übergeht. Auch die Größe T_c ist diesseits und jenseits der Grenze der BALMER-Serie verschieden groß. Für die Sterne der Klasse A0 ist T_c jenseits der Seriengrenze ungefähr gleich 11000°. Dagegen variiert die spektralphotometrische Temperatur diesseits der Seriengrenze, d.h. von $\lambda = 3646$ Å in Richtung längerer Wellenlängen, im allgemeinen mit der Wellenlänge, und ist im Mittel gleich 14000–17000°, während die effektive Sterntemperatur der Spektralklasse A0 in der Nähe von 10500° liegt!

---

[1]) Farbtemperatur.

Analog tritt die Differenz zwischen T_c und T_e bei allen Sternen auf. Hieraus folgt, daß die im vorigen Paragraphen dargelegte Theorie in bestimmter Weise abgeändert werden muß, um so mehr, als das Auftreten des Intensitätssprunges an der Grenze der BALMER-Serie in den Spektren der frühen Sterne vom Standpunkt dieser Theorie völlig unverständlich ist (siehe § 6).

Die weitere Entwicklung der Physik der Sternatmosphäre zeigte, daß die Hauptursache für diese Unstimmigkeiten in der ungerechtfertigten Voraussetzung über die Unabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Frequenz zu suchen ist. In der Tat zeigt die Untersuchung der in den Sternatmosphären herrschenden physikalischen Bedingungen, daß sich der Absorptionskoeffizient mit der Frequenz (der Wellenlänge) ändern muß. Dort, wo diese Abhängigkeit nur schwach ausgeprägt ist, muß die Übereinstimmung zwischen der Theorie mit $\varkappa_\nu = \varkappa = \text{const}$ und den Beobachtungen am besten sein. Insbesondere spricht die Übereinstimmung zwischen der betrachteten Theorie der Randverdunkelung und den Beobachtungen an der Sonne dafür, daß in der Sonnenphotosphäre die Abweichungen von der Gleichung $\varkappa_\nu = \varkappa = \text{const}$ verhältnismäßig gering sind.

Unsere letzten Bemerkungen führen uns dazu, die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes für den frequenzabhängigen Absorptionskoeffizienten zu betrachten. Zuvor wollen wir uns jedoch mit einigen weiteren Problemen, die mit dem Absorptionskoeffizienten zusammenhängen, vertraut machen.

§ 5. Der kontinuierliche Absorptionskoeffizient

1. Die chemische Zusammensetzung der Sternatmosphären

Die Frage nach der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphären ist aus folgendem Grunde von Wichtigkeit. Theoretische physikalische Überlegungen, die durch Experimente bestätigt sind, zeigen, daß das Absorptionsvermögen jedes Stoffes von den physikalischen Bedingungen abhängt, unter denen sich der gegebene Stoff befindet. Hierbei stellt es sich heraus, daß diese Abhängigkeit für die einzelnen Elemente verschieden ist. Außerdem ist das Absorptionsvermögen der einzelnen Elemente verschieden. Daher wird der resultierende Absorptionskoeffizient $\varkappa_\nu$, der durch die chemische Zusammensetzung der gesamten Photosphäre bestimmt ist, stark von der relativen Häufigkeit der einzelnen Elemente in der Sternphotosphäre abhängen.

Die chemische Zusammensetzung der Sternatmosphären wird aus dem Studium der Spektrallinien bestimmt; diese Frage wird im zweiten Kapitel dieses Lehrbuches ausführlich behandelt werden. Im Augenblick werden wir jedoch einige fertige Ergebnisse vorwegnehmen und hierzu eine Reihe notwendiger Bemerkungen machen.

Das gesamte, unsere Fragestellung betreffende astrophysikalische Beobachtungsmaterial spricht dafür, daß die c h e m i s c h e Z u s a m m e n s e t z u n g der A t m o s p h ä r e n der überwiegenden Mehrheit der Sterne praktisch g l e i c h ist.

Von dieser Tatsache ausgehend, kann man die Änderung der Sternspektren in der Folge der Spektralklassifikation zufriedenstellend erklären, wenn man beim Übergang von einem Stern zum andern die Änderung nur eines physikalischen Parameters zuläßt; hierbei kann man nicht nur eine qualitative, sondern auch eine quantitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erzielen. In der letzten Zeit ist die Gleichheit der chemischen Zusammensetzung der Atmosphären für die verschiedenen Sterne der Hauptreihe auf Grund des Studiums der Spektrallinien (Absorptionslinien) bestätigt worden. In Wahrheit unterscheidet sich die chemische Zusammensetzung in besonderen Fällen von einer, sozusagen, ,,Standardzusammensetzung". Eine derartige Abweichung tritt offenbar in den Atmosphären der späten Sterne auf, wo die Spektralklassen in den M-Ast und R-N-Ast aufgespalten sind. Ferner sind die Abweichungen beträchtlich für die Wolf-Rayet-Sterne (Kohlenstoff- und Stickstoffsterne) und für die Sterne, deren Spektren Besonderheiten aufweisen. Diese Sterne werden wir jedoch im Augenblick nicht betrachten. Der chemischen Zusammensetzung legen wir eine Standardzusammensetzung zugrunde und benutzen für sie die für die Sonne erhaltenen Zahlenangaben, da ihre chemische Zusammensetzung am genauesten und am vollständigsten untersucht worden ist.

Da die Dichte der Materie in den Atmosphären der verschiedenen Sterne im allgemeinen verschieden ist, sprechen wir von der relativen chemischen Zusammensetzung, d.h. von dem prozentualen Anteil der einzelnen Elemente an der Sternatmosphäre. Die relative Häufigkeit können wir auf zweierlei Art ausdrücken: 1. Wir können den Anteil irgendeines Elementes als Einheit wählen und den Anteil der übrigen Elemente auf dieses Element beziehen. 2. Wir können den Anteil aller Elemente gleich 100% (oder gleich Eins) setzen und den Anteil jedes Elementes in Prozenten (oder in Bruchteilen) angeben.

Die relative Häufigkeit kann entweder in bezug auf die Zahl der Atome oder in bezug auf die Masse angegeben werden. In 1 cm³ der Sternatmosphäre seien n_1 Atome eines ersten Elementes, n_2 Atome eines zweiten Elementes usw. enthalten. Dann ist der relative Anteil eines s-ten Elementes in bezug auf die Zahl der Atome gleich

$$a_s = \frac{n_s}{n_1}, \tag{5.1}$$

oder im zweiten Falle:

$$a_s(\%) = \frac{n_s}{n_1 + n_2 + \cdots + n_s + \cdots} 100. \tag{5.2}$$

Wenn die Masse eines Atoms des ersten Elementes m_1, die Masse des zweiten m_2 usw. ist, dann ist der relative Anteil des s-ten Elementes in bezug auf die Masse gleich

$$\alpha_s = \frac{n_s m_s}{n_1 m_1}, \tag{5.3}$$

oder in Prozenten ausgedrückt:

$$\alpha_s(\%) = \frac{n_s m_s}{n_1 m_1 + n_2 m_2 + \cdots + n_s m_s + \cdots} 100. \tag{5.4}$$

Hier ist folgende Bemerkung am Platze: Wenn für einen beliebigen Stern die Größen a_s oder α_s vorgegeben sind, so nehmen wir an, daß diese chemische Zusammensetzung für alle Schichten seiner Atmosphäre gleich ist, d.h., daß die Größen a_s und α_s sich in der Photosphäre nicht mit der Tiefe ändern. Sämtliche Tatsachen sprechen dafür, daß diese Annahme hinreichend begründet ist, d.h., daß in den Sternatmosphären eine völlige Durchmischung der Atome der verschiedenen Elemente stattfindet. Zum Beispiel führte die Untersuchung der in der Sonnenkorona vorliegenden Bedingungen I. S. Schklowski und andere Autoren zu der Schlußfolgerung, daß die chemische Zusammensetzung der Sonnenkorona praktisch die gleiche ist wie die mittlere Zusammensetzung der Chromosphäre und derjenigen Schichten der Sonnenatmosphäre, in denen die Absorptionslinien entstehen (d.h. der Schichten der Photosphäre). Da die Ausdehnung der Schichten der Sonnenkorona, in denen die chemische Zusammensetzung untersucht wurde (innere Korona), außerordentlich groß ist (ungefähr 200000 km), ist es im höchsten Grade unwahrscheinlich, daß innerhalb einer so dünnen Schicht, wie es die Sonnenphotosphäre ist (ihre Dicke beträgt 100–300 km), eine wesentliche Änderung der chemischen Zusammensetzung auftreten könnte.

Nach dieser kurzen Vorbemerkung führen wir eine Tabelle an, die für eine Anzahl von Objekten die nach dem Ausdruck (5.1) berechneten Logarithmen der Größen a_s angibt. Die Größe $\lg n_1$ ist in dieser Tabelle gleich 10 gesetzt (für τ Scorpii gleich 9,8).

Tabelle 1

Element	Sonne	τ Scorpii	Planetarische Nebel	Interstellares Gas
H	10,0	9,8	10,0	10,0
He	9,30 (?)	9,1	9,3	
C	6,89	6,0	6,1	
N	7,08	6,4	7,1	
O	6,65	6,8	7,3	
Na	4,33			4,4
Mg	5,57	5,6		
Ca	4,46			5,0
K	3,01			3,6
Al	4,17	4,3		
Si	5,12	5,6		
Fe	5,62[1]			
Cu	2,80			
Zn	2,52			
Sr	0,88			
Ba	0,38			
Hg	0,98			

[1]) Die Angaben von verschiedenen Forschern über den Fe-Gehalt geben zur Zeit recht beträchtlich auseinander.

Aus dieser Tabelle kann man folgende Schlüsse ziehen:

1. Das vorherrschende Element in den Sternatmosphären (ebenso wie in den planetarischen Nebeln und im interstellaren Gas) ist der Wasserstoff. Die Anzahl der Wasserstoffatome ist ungefähr das Zehntausendfache aller Metallatome zusammengenommen. Auf den Wasserstoff folgen Helium, die Atome der leichten Elemente C, N, O und schließlich die Metalle.

2. Die chemische Zusammensetzung der planetarischen Nebel und des interstellaren Mediums ist praktisch die gleiche wie die chemische Zusammensetzung der Sonnenatmosphäre und der Sternatmosphären. Dies spricht dafür, daß die chemische Zusammensetzung für die Mehrheit aller Objekte im Weltall gleich ist.

2. Anregung und Ionisation der Atome

Jetzt wenden wir uns der Frage der Anregung und der Ionisation der Atome zu. Aus Gründen der Anschaulichkeit bedienen wir uns der Terminologie der BOHRschen Theorie und greifen auf quantenmechanische Vorstellungen nur dort zurück, wo es sich nicht umgehen läßt.

Um eine einheitliche Terminologie und einheitliche Bezeichnungen einzuführen, erinnern wir kurz an die Grundbegriffe dieser Theorie.

Bei der Absorption eines Quantes $h\nu_{ik}$ geht ein Elektron von einer inneren Bahn i (energiearmer Zustand des Atoms) auf eine weiter außen gelegene Bahn k über (energiereicher Zustand). Diesen Prozeß bezeichnet man als den *Prozeß der Anregung* des Atoms. Infolge der Anregung vergrößert sich die innere Energie des Atoms um die Größe $h\nu_{ik}$:

$$\varepsilon_k - \varepsilon_i = h\nu_{ik}, \tag{5.5}$$

wobei ε_k bzw. ε_i die innere Energie bedeutet, die das Atom besitzt, wenn sich das Elektron auf der Bahn k bzw. i bewegt.

Wir werden – wie es in der Regel geschieht – das anschauliche Schema der Energieniveaus benutzen. Diese entsprechen den verschiedenen möglichen Atomzuständen. Da uns nur die Energiedifferenzen interessieren, können wir dem tiefsten Niveau die Energie Null zuordnen.

Die Energie, die nötig ist, um ein Elektron vom tiefsten Niveau auf ein vorgegebenes anderes Niveau zu überführen, wird als *Anregungspotential* des betreffenden Niveaus bezeichnet. Folglich können wir wegen der obenerwähnten Festlegung des Nullpunktes die von uns eingeführten Energien ε_i, ε_k usw. mit den Anregungspotentialen der entsprechenden Niveaus identifizieren.

Bisher haben wir den Übergang eines Elektrons von einer im Innern gelegenen Bahn auf eine weiter außen liegende besprochen (Anregung des Atoms). Der umgekehrte Prozeß, d.h. der Übergang eines Elektrons von einer außen liegenden Bahn k auf eine weiter im Innern liegende Bahn i, geht unter Emission eines Quantes $h\nu_{ik}$ in Übereinstimmung mit der Bedingung (5.5) vor sich.

Erinnern wir uns jetzt an die Grundbegriffe der Ionisationstheorie der Atome. Die Abtrennung eines Elektrons von einem Atom (oder Ion) nennt man

die *Ionisation* des Atoms (oder Ions). Durch eine einfache Ionisation eines neutralen Atoms entsteht ein positiv geladenes Ion und ein freies Elektron.

Bei einer zweifachen Ionisation verliert das Atom zwei Elektronen und so fort. Den der Ionisation entgegengerichteten Prozeß nennt man *Rekombination.* Bei der Rekombination vereinigt sich ein positiv geladenes Ion mit einem freien Elektron. Dieser Prozeß führt zur Bildung eines Ions, dessen Ionisationsstufe sich in bezug auf den Zustand vor der Rekombination um Eins verringert hat. Wenn die Rekombination sich zwischen einem einfach ionisierten Atom und einem Elektron vollzieht, entsteht ein neutrales Atom. Es können auch Rekombinationen zwischen neutralen Atomen und Elektronen auftreten. In diesem Falle bildet sich ein *negatives Ion.*

Das neutrale Atom eines beliebigen Elementes bezeichnet man dadurch, daß man hinter das Symbol des Elementes die römische Ziffer I setzt, z. B. Ca I.

Bei einem einfach ionisierten Atom kann man zwischen zwei Bezeichnungsweisen wählen: 1. Man fügt rechts oben dem Symbol des chemischen Elementes ein Pluszeichen an. 2. Man schreibt hinter das Symbol des Elementes die römische Ziffer II. Beispiel: Ca^+ oder Ca II. Im Falle eines zweifach ionisierten Atoms eines beliebigen Elementes schreibt man hinter das Symbol des Elementes zwei Pluszeichen oder die römische Ziffer III, z. B. Ca^{++} oder Ca III. Diese Symbolik findet auch bei höheren Ionisationszuständen Anwendung.

Die zweite Schreibweise (mit den römischen Ziffern) wird man in vielen Fällen der ersten vorziehen, da diese für die mehrfachen Ionisationen sehr ungeeignet ist.

Die Abtrennung eines Leuchtelektrons von einem Atom (oder Ion) kann im allgemeinen von einer beliebigen Bahn aus vor sich gehen. Die Energie, die erforderlich ist, um ein Elektron von der innersten Bahn her abzutrennen, ohne daß diesem kinetische Energie mitgegeben wird, nennt man das *Ionisationspotential* des Atoms. Wir bezeichnen dieses Potential mit χ_r. Für ein neutrales Atom ist $r = 0$, für ein einfach ionisiertes Atom ist $r = 1$ usw.

Das Potential der zweiten Ionisation χ_1 ist das Potential in bezug auf das einfach ionisierte Atom und nicht in bezug auf das neutrale usw. Wie unmittelbar ersichtlich, ist die Größe r zahlenmäßig gleich der Anzahl der vom Atom losgelösten Elektronen.

Um zu unterscheiden, um welches Atom es sich handelt, um das neutrale oder das ionisierte, fügt man zweckmäßigerweise an das Anregungspotential einen Index an, der die Ionisationsstufe des betreffenden Atoms anzeigt. Man schreibt beispielsweise $\varepsilon_{r,k}$.

Die Energie, die zur Ionisation eines Atoms in einem beliebigen Anregungszustand erforderlich ist, nennt man die *Bindungsenergie* des betreffenden Niveaus. Wir bezeichnen sie mit $\chi_{r,k}$. Es ist klar, daß stets

$$\chi_r = \chi_{r,k} + \varepsilon_{r,k} \tag{5.6}$$

ist.

In Abb. 10 ist ein Niveauschema mit den von uns eingeführten Bezeichnungen dargestellt. Das unterste Niveau haben wir mit keinem speziellen In-

dex versehen, weil die Quantenzahlen dieses Niveaus im allgemeinen sehr verschieden sein können.

In der Abb. 10 ist links der Fall dargestellt, daß das vom Atom absorbierte Quant $h\nu$ größer ist als die Größe χ_r, d.h., es findet eine *Ionisation* des Atoms durch *Strahlung* statt. In diesem Falle wird dem Elektron – abgesehen von seiner Ablösung – die Geschwindigkeit v erteilt, und es bewegt sich mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2} m_e v^2$. Hierbei ist die Grundgleichung des Photoeffektes

$$h\nu = \chi_r + \frac{1}{2} m_e v^2 \qquad (5.7)$$

erfüllt, in der m_e die Elektronenmasse bedeutet.

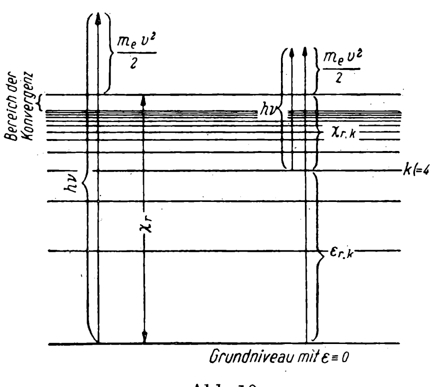


Abb. 10

Wenn die Ionisation von einem Anregungszustand aus vor sich geht (d.h. von einem Niveau aus, dessen Energie größer ist als die des tiefsten Niveaus, wo $\varepsilon \equiv 0$), so haben wir an Stelle von (5.7)

$$h\nu = \chi_{r,k} + \frac{1}{2} m_e v^2. \qquad (5.8)$$

Bei der Rekombination kann das Elektron in ein beliebiges Niveau gelangen. Hierbei wird ein Quant $h\nu$ emittiert, wobei die Gleichungen (5.7) oder (5.8) erfüllt sind.

Jetzt gehen wir daran, quantitative Gleichungen zu betrachten, die die Anregung und die Ionisation beschreiben. Hierbei werden wir vorläufig Gleichungen verwenden, die für das thermodynamische Gleichgewicht gelten. Die Frage, wie diese Formeln abgeändert werden müssen, damit sie den in den Sternphotosphären herrschenden Bedingungen genügen, werden wir später behandeln.

Wir wenden uns einer Formel zu, die die Anregung der Atome beschreibt. In 1 cm³ seien $n_{r,k}$ r-fach ionisierte Atome vorhanden, die sich im k-ten Anregungszustand befinden. Ferner seien in demselben Volumen noch weitere $n_{r,i}$ Atome derselben Art vorhanden, die sich aber im i-ten Anregungszustand befinden. Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt die BOLTZMANN-Formel

$$\frac{n_{r,k}}{n_{r,i}} = \frac{g_{r,k}}{g_{r,i}} e^{-\frac{\varepsilon_{r,k} - \varepsilon_{r,i}}{kT}}; \qquad (5.9)$$

in der $g_{r,k}$ und $g_{r,i}$ die statistischen Gewichte der Niveaus k und i[1]), k die BOLTZMANN-Konstante und T die absolute Temperatur bedeuten. Wenn

[1]) Als *statistisches Gewicht* (oder als Grad der Entartung) bezeichnet man die Zahl der verschiedenen Quantenzustände eines Systems (Atoms), die irgendeinem Quantenniveau

man den Zustand i mit dem energieärmsten Zustand identifiziert, so ist $\varepsilon_i \equiv 0$, und im Exponenten bleibt nur ε_k übrig.

In dem Falle, daß nur von den Daten von r-fach ionisierten Atomen die Rede ist, kann man den Index r fortlassen. Dann wird

$$\frac{n_k}{n_i} = \frac{g_k}{g_i} e^{-\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_i}{kT}}. \tag{5.10}$$

Die statistischen Gewichte und die Energien $\varepsilon_{r,k}$ übernimmt man aus der Theorie der Spektren.

Im Hinblick auf die Gleichungen (5.9) und (5.10) ist folgende wichtige Bemerkung am Platze: Da in der Regel die Energiedifferenzen zwischen einem beliebigen angeregten Niveau und dem Grundniveau ziemlich groß sind, folgt aus den beiden angegebenen Formeln, daß sich in diesen Fällen die Mehrzahl der Atome im (nichtangeregten) Grundzustand befindet. So ist z. B. bei der Temperatur $T = 5700°$ das Verhältnis der Anzahl der Wasserstoffatome im zweiten Anregungszustand zu der Anzahl der Atome im Grundzustand gleich $4{,}2 \cdot 10^{-9}$.

Wenden wir uns jetzt der Ionisationsformel zu. In 1 cm³ seien n_r r-fach ionisierte Atome vorhanden, die sich in allen nur möglichen Anregungszuständen befinden $\left(\text{d. h. } n_r = \sum_k n_{r,k}\right)$. Seien ferner in demselben Volumen noch n_{r+1} weitere Atome derselben Art vorhanden, die jedoch $(r+1)$-fach ionisiert sind. Dann gilt im thermodynamischen Gleichgewicht die SAHAsche Ionisationsformel [2, S. 69]

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} p_e = \frac{u_{r+1}}{u_r} \frac{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} e^{-\frac{\chi_r}{kT}}. \tag{5.11}$$

Zur Berechnung der Ionisation wendet man die SAHAsche Formel besser in der logarithmischen Form an:

$$\lg \frac{n_{r+1}}{n_r} = \lg \frac{u_{r+1}}{u_r} + \frac{5}{2} \lg T - \frac{5040}{T} \chi_r - \lg p_e + \lg \frac{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{5}{2}}}{h^3}. \tag{5.11a}$$

Hier wird die Größe χ_r in Elektronenvolt und nicht, wie in der Gleichung (5.11), in erg ausgedrückt.

ε_k entsprechen. Es gibt an, in wieviel Terme ein betrachteter Atomzustand bei völliger Ausschaltung von Entartungen (z. B. mit Hilfe eines äußeren Magnetfeldes) aufspalten würde oder, in der schärferen Sprache der Quantenmechanik ausgedrückt, wieviel linear unabhängige „Eigenfunktionen" zu dem betrachteten Energiewert gehören.

Wenn wir das statistische Gewicht eines einfachen Terms zu 1 annehmen, besitzt ein Term mit dem Drehimpuls J das statistische Gewicht $2J + 1$, wobei J die innere Quantenzahl ist. Für den Wasserstoff ist das statistische Gewicht gleich $2n^2$, wobei n die Hauptquantenzahl ist.

In der Gleichung (5.11) ist p_e der partielle Elektronendruck. Wenn in einem Kubikzentimeter n_e freie Elektronen vorhanden sind, so ist

$$p_e = n_e k T. \tag{5.12}$$

Die Größe u_r ist die sogenannte *Zustandssumme* des r-fach ionisierten Atoms. Wenn wir den Grundzustand (für den $\varepsilon \equiv 0$) mit dem Index 1 bezeichnen und von hier aus mit der Zählung der aufeinanderfolgenden Niveaus beginnen, erhält u_r die Gestalt

$$u_r(T) = g_{r,1} + g_{r,2} e^{-\frac{\varepsilon_{r,2}}{kT}} + g_{r,3} e^{-\frac{\varepsilon_{r,3}}{kT}} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} g_{r,k} e^{-\frac{\varepsilon_{r,k}}{kT}}, \tag{5.13}$$

wobei die $g_{r,k}$ die statistischen Gewichte der aufeinanderfolgenden Niveaus eines r-fach ionisierten Atoms sind. Häufig gilt die Ungleichung

$$e^{-\frac{\varepsilon_{r,2}}{kT}},\quad e^{-\frac{\varepsilon_{r,3}}{kT}}, \ldots \ll 1. \tag{5.14}$$

In diesem Falle reduziert sich die Funktion $u_r(T)$ auf das statistische Gewicht des Grundniveaus. Wenn aber das erste angeregte Niveau vom Grundniveau nicht mehr als 1 eV[1]) entfernt ist, muß man auch das zweite Glied der Summe (5.13) berücksichtigen, und bisweilen noch weitere. Wenn endlich das erste angeregte Niveau vom Grundniveau um 2 eV entfernt ist, so ist die Berücksichtigung des zweiten Gliedes in der Summe (5.13) nur für hohe Temperaturen ($T > 10000°$) nötig.[2])

Die Größe $u_{r+1}(T)$ stellt die gleiche Temperaturfunktion wie $u_r(T)$ dar, doch bezieht sie sich auf ein $(r+1)$-fach ionisiertes Atom. Der Faktor $\frac{2u_{r+1}}{u_r}$ ist für gewöhnlich von der Größenordnung Eins. Tabellen der Ionisationspotentiale für die verschiedenen Elemente in den verschiedenen Ionisationsstufen und Nomogramme für die Benutzung der SAHAschen Formel sind in dem Buch von UNSÖLD enthalten [2, § 22].

In Verbindung mit (5.11) können wir den sogenannten *Ionisationsgrad* x_r einführen, den wir folgendermaßen definieren:

$$x_r = \frac{n_r}{n_0 + n_1 + \cdots + n_r} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.15}$$

Somit gibt der Ionisationsgrad den Bruchteil der r-fach ionisierten Atome von der Gesamtzahl der vorliegenden Atomsorte an.

Aus der SAHAschen Gleichung (5.11) geht unmittelbar hervor, daß bei gegebenem p_e der Ionisationsgrad eines beliebigen Elementes mit

---

[1]) 1 Elektronenvolt $= 1{,}602 \cdot 10^{-12}$ erg.

[2]) Über die Berechnung der Summen u_0 und u_1 bei Temperaturen von 4900° bis 7300° für verschiedene Elemente siehe W. J. CLAAS, The composition of solar atmosphere. Recherches astronomiques de L'observatoire d'Utrecht XII, Part 1. Über die Konvergenz der Summe (5.13) siehe im Buch von UNSÖLD [2, S. 72].

zunehmender Temperatur T monoton anwächst, wobei dieses Wachstum prozentual um so schneller vor sich geht, je größer das Ionisationspotential χ_r und je niedriger die Temperatur T ist. Bei kleinen Werten von χ_r/kT wächst die Ionisation mit Zunahme der Temperatur T verhältnismäßig langsam. Aus der gleichen Formel folgt, daß für wachsendes p_e (bei vorgegebenem T) die Ionisation abnimmt.

In der Mehrzahl der in der Praxis anzutreffenden Fälle sind die Niveaus der aufeinanderfolgenden Ionisationszustände derart weit voneinander entfernt, daß in einem gegebenen Volumen bei vorgegebenem p_e nur die Atome in genügender Anzahl vorkommen können, die sich in zwei benachbarten Ionisationszuständen r und $r + 1$ befinden. Wenn z.B. neutrale und einfach ionisierte Atome in hinreichend großer Zahl auftreten, so wird die Anzahl der zweifach ionisierten Atome vernachlässigbar klein usw.

Indem wir nur zwei aufeinanderfolgende Ionisationszustände r und $r + 1$ berücksichtigen, können wir sagen, daß, wenn ein gewisser relativer Anteil x der Atome $(r + 1)$-fach ionisiert ist, der Bruchteil $1 - x$ r-fach ionisiert ist.

Folglich können wir die Gleichung (5.11) auch so schreiben:

$$\frac{x}{1-x} p_e = K_r, \tag{5.16}$$

wobei

$$K_r = \frac{u_{r+1}}{u_r} \frac{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} e^{-\frac{\chi_r}{kT}}, \tag{5.17}$$

und

$$x = \frac{n_{r+1}}{n}, \quad 1 - x \approx \frac{n_r}{n}. \tag{5.18}$$

Zum Schluß weisen wir auf eine wichtige Modifizierung der Gleichung (5.11) hin. Sehr oft bestimmt man aus Beobachtungen die Anzahl der Atome, die sich im Grundzustand befinden (siehe Kap. II). Für diesen Fall erhält die Gleichung (5.11) die Gestalt

$$\frac{n_{r+1,1}}{n_{r,1}} p_e = \frac{g_{r+1,1}}{g_{r,1}} \frac{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} e^{-\frac{\chi_r}{kT}}. \tag{5.19}$$

Der zweite Index zeigt an, daß sich das $(r + 1)$-fach und das r-fach ionisierte Atom im Grundzustand befinden.

3. Wahre Absorption der Strahlung

Wir wenden uns jetzt der Behandlung des Absorptionskoeffizienten zu. Wir müssen jedoch einige einführende Bemerkungen vorausschicken.

Der Wärmehaushalt in einem beliebigen Bereich der Sternphotosphäre wird – wie wir in den vorangehenden Paragraphen gesehen haben – durch die Wechsel-

wirkung zwischen Strahlung und Stoff bestimmt. Insbesondere spielen für den Wärmehaushalt die Prozesse der Wärmeleitung und der Konvektion eine untergeordnete Rolle. Praktisch wird die gesamte, von jedem Element des Stoffes der Photosphäre pro Sekunde aufgenommene Wärmeenergie ausschließlich durch Absorption von Strahlung gewonnen. In diesem Zusammenhang interessieren uns für den Augenblick nur die Absorptionsprozesse, die von einer Umwandlung von Strahlungsenergie in Wärmeenergie und umgekehrt, von Wärmeenergie in Strahlungsenergie, begleitet sind. Im Grunde genommen führt auch die Frage nach dem Energietransport aus dem Sterninnern nach außen auf das gleiche Problem.

Hierbei haben derartige Prozesse zur Voraussetzung, daß zwischen den absorbierten und den emittierten Quanten kein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Jedes auffallende Quant der Frequenz ν wird vollständig absorbiert, und die hierbei dem Stoff der Photosphäre mitgeteilte Wärmeenergie wird nach einer gewissen Zeit in anderen Frequenzen emittiert. Dies alles spiegelt sich in der Bedingung des Strahlungsgleichgewichtes (3.14) wider, welche fordert, daß die gesamte, von dem Einheitsvolumen (oder von der Einheitsmasse) in 1 sec absorbierte Energiemenge gleich der gesamten, von demselben Volumen in derselben Zeit emittierten Energiemenge ist.

Die Absorption, bei der die absorbierte Energie in Wärmeenergie verwandelt wird (mit nachfolgender Reemission in anderen Frequenzen), nennen wir *wahre Absorption* (zum Unterschied von der Streuung, die weiter unten besprochen wird). Um das oben Dargelegte verständlicher zu machen, führen wir zwei Beispiele einer wahren Absorption an.

I. Durch die Absorption eines Quantes $h\nu$ vollziehe sich bei einem Atom von irgendeiner Bahn k aus eine Photoionisation. Hierbei wird dem losgetrennten Elektron nach Gleichung (5.8) die Geschwindigkeit v mitgeteilt. Nachdem es eine große Zahl von Zusammenstößen mit anderen Teilchen (hauptsächlich mit Elektronen, siehe § 8) erfahren hat, wird es letzten Endes von irgendeinem Ion eingefangen, d.h., es findet eine Rekombination statt. Die Frequenz des hierbei emittierten Quantes wird im allgemeinen von der Frequenz des absorbierten Quantes verschieden sein, weil die Geschwindigkeit des Elektrons im Augenblick der Rekombination von der Anfangsgeschwindigkeit v (d.h. von der Geschwindigkeit im Augenblick der Photoionisation) verschieden sein wird. Das Elektron kann auch von einem völlig anderen Ion oder von demselben Ion, doch in eine andere Bahn, eingefangen werden.

Jedoch gilt – wie wir gezeigt haben – zwischen der absorbierten und der emittierten Energie für das ganze Spektrum die Gleichung (3.1).

II. Das zweite Beispiel ist die wahre selektive – d.h. die in den Frequenzen der Spektrallinien stattfindende – Absorption. Infolge der Absorption eines Quantes $h\nu_{ik}$ gehe ein Elektron von der Bahn i auf die weiter außen gelegene Bahn k über, und in dem Augenblick, in dem es sich auf dieser Bahn befindet, erleide das Atom mit irgendeinem andern Teilchen einen unelastischen Zusammenstoß – einen Stoß zweiter Art. Als Folge des Zusammenstoßes kann die Anregungsenergie des Atoms (d.h. $\varepsilon_k - \varepsilon_i$) in kinetische Energie des gestoßenen

Teilchens umgewandelt werden. Hierdurch wird die Energie des Quantes $h\nu_{ik}$ gänzlich in Energie der Wärmebewegung des gestoßenen Teilchens umgewandelt; das Elektron fällt wieder auf die tiefere Bahn i zurück, doch das Atom emittiert kein Quant $h\nu_{ik}$. Es ist noch eine andere Variante des betrachteten Falles möglich. Von dem angeregten Niveau k aus kann das Elektron durch Photoionisation losgetrennt werden. Hierbei wird die Energie des absorbierten Quantes in Energie der Wärmebewegung umgewandelt. Wir müssen jedoch darauf hinweisen, daß beide Varianten des vorliegenden Beispiels, die lediglich mit einer selektiven Absorption der Strahlung in einer bestimmten Frequenz verbunden sind, in dem uns interessierenden Temperaturproblem nur von untergeordnetem Interesse sind:

1. Die im zweiten Kapitel dieses Buches durchgeführten Berechnungen sprechen dafür, daß die Prozesse der wahren selektiven Absorption in der Regel eine verhältnismäßig unbedeutende Rolle[1]) in der allgemeinen Energiebilanz spielen;

2. der gesamte Spektralbereich, in dem diese Prozesse an Bedeutung gewinnen, ist gewöhnlich sehr klein. Deshalb betrachten wir im weiteren nur die Prozesse der wahren Absorption für das kontinuierliche Spektrum. Solche Prozesse wollen wir als *wahre kontinuierliche* oder *allgemeine wahre Absorption* bezeichnen. Der Kürze wegen kann man – wie es häufig geschieht – das Wort „wahre“ fortlassen und einfach von *kontinuierlicher* oder *allgemeiner Absorption* sprechen.

Wir beginnen unsere Darstellung mit dem zur Klasse der wahren Absorption gehörigen Prozeß der photoelektrischen Absorption. Dieser Absorptionsprozeß spielt in den Sternatmosphären die wichtigste Rolle.

Betrachten wir den Prozeß der Photoionisation eines Atoms von irgendeinem Niveau k aus. Aus (5.8) folgt, daß die Ionisation des Atoms von diesem Niveau aus durch ein beliebiges Quant bewirkt werden kann, wenn nur die Energie des letzteren größer als die Bindungsenergie $\chi_{r,k}$ oder ihr gleich ist. Auf diese Weise wird eine auf die Gesamtheit der Atome auffallende kontinuierliche Strahlung im Frequenzintervall von $\nu_k = \frac{\chi_{r,k}}{h}$ bis $\nu = \infty$ absorbiert, indem sie die Atome vom Niveau k aus ionisiert. Anders ausgedrückt, eine hinreichend dicke absorbierende Schicht (große optische Dicke) wird in einer durch sie hindurchtretenden kontinuierlichen Strahlung einen kontinuierlichen Absorptionsstreifen erzeugen, der bei der Frequenz ν_k beginnt und sich nach der Seite größerer Frequenzen erstreckt. Da jedes Atom eine unendliche Anzahl von möglichen Bahnen besitzt, wird als Begleiterscheinung der photoelektrischen Absorption eine unendliche Folge von Absorptionsstreifen auftreten. In gewissen Fällen (z. B. bei den negativen Ionen des Wasserstoffs) haben wir es mit einem oder mit nur wenigen Absorptionsstreifen zu tun (siehe weiter unten).

Um einen derartigen Absorptionsprozeß quantitativ beschreiben zu können,

---

[1]) Z. B. sind Stöße zweiter Art wegen der geringen Dichte der Materie in den Sternatmosphären äußerst selten.

betrachten wir vorerst ein sehr einfaches System, das Wasserstoffatom oder ein wasserstoffähnliches Atom. (Ein wasserstoffähnliches Atom besteht aus einem Kern und einem Elektron. Zu den wasserstoffähnlichen Atomen gehören H, He II, Li III, Be IV usw.).

Für die weiteren Betrachtungen wie auch für eine Reihe astrophysikalischer Probleme ist es zweckmäßig, den Absorptionskoeffizienten nicht auf die Masseneinheit der absorbierenden Materie – wie z. B. in (3.13) –, sondern auf ein absorbierendes Atom zu beziehen. Die Masse eines vorgegebenen absorbierenden Atoms, das den Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu$ besitzt, sei gleich m. Dann gilt

$$\varrho = m n, \tag{5.20}$$

wobei n die Anzahl der absorbierenden Atome der vorliegenden Atomsorte in 1 cm^3 und ϱ – wie in (3.13) – die durch sie bestimmte Dichte bedeutet. Führen wir (5.20) in die rechte Seite von (2.13) ein, erhalten wir

$$d I_\nu = - I_\nu \varkappa_\nu m n \, d h. \tag{5.21}$$

Bezeichnen wir ferner

$$k_\nu = \varkappa_\nu m, \tag{5.22}$$

so ist

$$d I_\nu = - I_\nu k_\nu n \, d h. \tag{5.23}$$

Die Größe k_ν bezeichnen wir als den *auf ein Atom bezogenen Absorptionskoeffizienten* (oder oft einfach als *atomaren Absorptionskoeffizienten*). k_ν besitzt die Dimension cm^2. Den Ausdruck (5.23) kann man sofort niederschreiben, ohne auf (2.13) zurückzugehen. Die Zwischenrechnungen waren jedoch nötig, um die Formel (5.21) zu erhalten, die die Beziehung zwischen dem auf die Masseneinheit und dem auf ein Atom bezogenen Absorptionskoeffizienten herstellt.

4. Die photoelektrische Absorption für wasserstoffähnliche Atome

Wir betrachten ein wasserstoffähnliches Atom mit einem Elektron, das sich in dem Felde der Ladung Ze auf einer Bahn mit der Hauptquantenzahl n bewegt. In diesem Falle liefert die Quantenmechanik für k'_ν folgenden Ausdruck:

$$k'_{\nu (n, \Sigma l)} = \frac{32 \pi^2 e^6 R Z^4}{3 \sqrt{3}\, c h^3 \nu^3 n^5} g'. \tag{5.24}$$

Das Zeichen Σl bedeutet, daß der Koeffizient der photoelektrischen Absorption unter Berücksichtigung a l l e r zur gegebenen Hauptquantenzahl n gehörigen Unterniveaus berechnet worden ist. Die Größe R ist die Rydberg-Frequenz

$$R = \frac{2 \pi^2 e^4 m_e}{h^3}, \tag{5.25}$$

gleich $3{,}287871 \cdot 10^{15}$ sec^{-1}. g' ist ein gewisser Korrelationsfaktor, der sich nur

wenig von Eins unterscheidet. Nach MENZEL und PEKERIS[1]) ist er gleich

$$g' \approx 1 - 0{,}1728 \left(\frac{\nu}{RZ^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{RZ^2}{\nu}\right) - 1\right]. \tag{5.26}$$

Aus (5.24) folgt, daß innerhalb eines jeden Streifens, der bei der Frequenz $\nu = \frac{\chi_n}{h}$ beginnt und sich bis $\nu = \infty$ erstreckt, der Absorptionskoeffizient proportional ν^{-3} abnimmt. Was die numerischen Werte von k'_ν anbelangt, so ergeben die Berechnungen in den Frequenzen, die der Grenze der Streifen entsprechen, für Wasserstoff ($Z = 1$) folgende Werte (siehe Tabelle 2).

Tabelle 2

Ausgangs-zustand	$k'_{\nu(n,l)}$ [cm²]
1 s	$6{,}3 \cdot 10^{-18}$
2 s	$1{,}5 \cdot 10^{-17}$
2 p	$1{,}4 \cdot 10^{-17}$
3 s	$2{,}6 \cdot 10^{-17}$
3 p	$2{,}6 \cdot 10^{-17}$
3 d	$1{,}8 \cdot 10^{-17}$

Hier sind die Werte k_ν für die verschiedenen azimutalen Quantenzahlen l einzeln aufgeführt.

Der Absorptionskoeffizient wurde, so wie er in der Gleichung (5.24) angegeben ist, für ein Atom abgeleitet, das sich im n-ten Anregungszustand befindet, und hängt natürlich von keinerlei veränderlichen Parametern, wie z.B. Druck, Temperatur usw., ab. Diese Behauptung ist richtig, wenn wir alle Absorptionsstreifen berücksichtigen. In der Tat kann eine photoelektrische Ionisation (und somit eine Absorption der Strahlung) von einer beliebigen Bahn des Atoms aus vonstatten gehen. Betrachten wir irgendeine feste Frequenz ν. Auf der Seite dieser Frequenz, nach der die kleineren Frequenzen liegen (d.h. nach der längerwelligen Seite des Spektrums), werden alle die Absorptionsstreifen liegen, deren Grenzen die Frequenzen $\nu_n = \frac{\chi_n}{h} \leqslant \nu$ besitzen. Da die Anzahl der Bahnen im Atom unendlich ist, ist auch die Anzahl dieser Streifen unendlich. Jeder Streifen trägt einen Teil zu der Absorption bei der Frequenz ν bei, da sich die Absorptionsstreifen bis $\nu = \infty$ erstrecken. Abb. 11 erläutert das Gesagte. Auf

[1]) D. MENZEL and C. PEKERIS, Absorption coefficients and hydrogen line intensities. Monthly Notices 96, 77, 1935.

dieser Abbildung liegt die betrachtete Frequenz ν zwischen den Frequenzen ν_1 und ν_2. Die Streifen mit $n = 2, 3, 4, \ldots, \infty$ entsprechen der Photoionisation des Atoms von immer höheren Niveaus aus. (In Übereinstimmung mit Abb. 10 verringert sich mit wachsendem n die Bindungsenergie χ_n und damit $\nu_n = \left.\frac{\chi_n}{h}\right)$.

Wie aus den allgemeinen Seriengesetzen folgt, ist die Grenze einer beliebigen Spektralserie, die auf einer Bahn mit der Hauptquantenzahl n beginnt, durch die Bindungsenergie des betreffenden Niveaus bestimmt, d.h. durch die Größe χ_n. Somit beginnen die Streifen der photoelektrischen Absorption an den entsprechenden Seriengrenzen, wie es auch auf der Abb. 11 dargestellt ist (man beachte den unten abgebildeten Teil des Spektrums, in den die Serien eingetragen sind).

Kehren wir wieder zu dem von uns behandelten Problem zurück. Wir haben gezeigt, daß sämtliche Streifen, deren Grenzfrequenzen kleiner als die gegebene Frequenz ν sind, einen Beitrag zu der Absorption bei der Frequenz ν liefern. Folglich müssen wir, um den resultierenden Absorptionskoeffizienten für die gegebene Frequenz ν zu ermitteln, sämtliche Streifen berücksichtigen. Zu diesem Zweck müssen wir irgendeine Hypothese über die Verteilung der Atome auf die verschiedenen Quantenzustände einführen. Wir nehmen an, daß die Verteilung der Atome auf die einzelnen Zustände durch die BOLTZMANN-Formel beschrieben werden kann, die wir in der folgenden Gestalt schreiben:

$$\frac{n_{r,n}}{n_{r,1}} = \frac{g_{r,n}}{g_{r,1}} e^{-\frac{\varepsilon_{r,n}}{kT}}, \tag{5.27}$$

wobei wir $\varepsilon_{r,1} \equiv 0$ setzen. Nach (5.27), (5.23) und (5.24) ist die nur von dem n-ten Absorptionsstreifen herrührende Absorptionswirkung der Atome bei der Frequenz ν gleich

$$\begin{aligned} d I_\nu^{(n)} &= - I_\nu k'_{\nu(n, \Sigma l)} n_{r,n} d h \\ &= - I_\nu \frac{32 \pi^2 e^6 R Z^4 g' n_{r,1} g_{r,n}}{3\sqrt{3}\, c h^3 \nu^3 n^5 g_{r,1}} e^{-\frac{\varepsilon_{r,n}}{kT}} dh . \end{aligned} \tag{5.28}$$

Da nun an der Absorption bei der Frequenz ν alle die Streifen beteiligt sind, deren Grenzfrequenzen kleiner als ν sind, berechnet sich die gesamte Absorption nach der Formel

$$d I_\nu = \sum_{n_0}^{\infty} d I_\nu^{(n)} = - I_\nu \frac{32 \pi^2 e^6 R Z^4 n_{r,1}}{3\sqrt{3} c h^3 \nu^3 g_{r,1}} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{g_{r,n}}{n^5} g' e^{-\frac{\varepsilon_{r,n}}{kT}} dh, \tag{5.29}$$

wobei die Summation bei dem ersten Streifen beginnt, der von ν aus in Richtung kleinerer Frequenzen liegt (siehe Abb. 11) und durch die Hauptquantenzahl n_0 charakterisiert ist.

In Verbindung mit (5.29) gelangt man zu der Feststellung, daß die Intensität der aufeinanderfolgenden Streifen mit wachsender Hauptquantenzahl,

d.h. in Richtung kleinerer Frequenzen, **abnehmen** muß. Dies wird in erster Linie durch das Auftreten des BOLTZMANN-Faktors $e^{-\frac{\varepsilon_{r,n}}{kT}}$ in der Formel (5.29) bedingt. Je größer $\varepsilon_{r,n}$ ist, um so geringer ist die diesem Werte von $\varepsilon_{r,n}$ entsprechende Anzahl der Atome, und um so schwächer ist die Absorption des Gases.

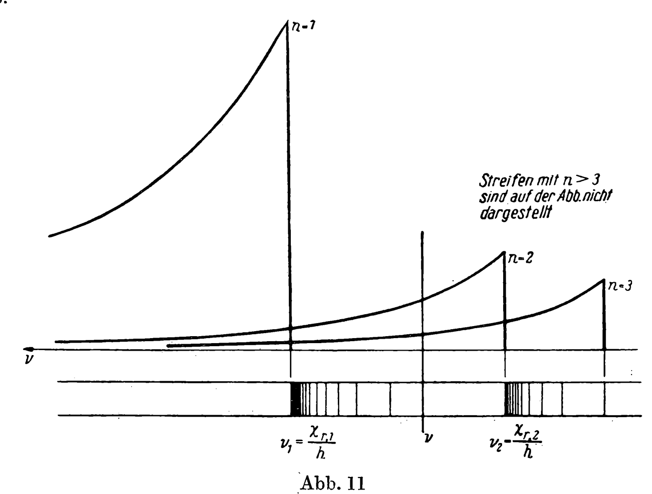


Abb. 11

Um von $n_{r,1}$ zur Gesamtzahl n der gegebenen Atome in 1 cm³ überzugehen, hat man $n_{r,n}$ aus (5.27) über alle Zustände n von $n = 1$ bis $n = \infty$ zu summieren und (5.13) zu berücksichtigen:

$$n_r = \sum_{n=1}^{\infty} n_{r,n} = \frac{n_{r,1}}{g_{r,1}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{r,n}\, e^{-\frac{\varepsilon_{r,n}}{kT}} = \frac{n_{r,1}\, u_r}{g_{r,1}}. \tag{5.30}$$

Mit (5.30) und der Ionisationsgleichung (5.11) erhalten wir

$$\frac{n_{r,1}}{g_{r,1}} = \frac{n_{r+1}}{u_{r+1}}\, p_e \frac{h^3 e^{\frac{\chi_r}{kT}}}{2\,(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}}\,(kT)^{\frac{5}{2}}}. \tag{5.31}$$

Wir führen jetzt (5.31) in (5.29) ein und erhalten

$$\begin{aligned} dI_\nu &= \sum_{n_0}^{\infty} dI_\nu^{(n)} \\ &= -I_\nu \frac{n_{r+1} p_e}{u_{r+1}} \frac{2^4 \pi^2 e^6 R Z^4 dh}{3\sqrt{3}\, c\,(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}}\,(kT)^{\frac{5}{2}}\,\nu^3} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{g_{r,n}\, g'}{n^5}\, e^{-\frac{\varepsilon_{r,n}-\chi_r}{kT}}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Für die betrachteten wasserstoffähnlichen Atome gilt folgende unmittelbar ersichtliche Formel:

$$\varepsilon_{r,n} = hRZ^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \chi_r - \frac{hRZ^2}{n^2}. \tag{5.33}$$

Für diese Atome ist $u_{r+1} = 1$, weil in dem vorliegenden Fall ein $(r + 1)$-fach ionisiertes Atom ein Kern mit der Ladung $+ Ze$ ist und sich folglich die Zustandssumme auf ein Glied, das statistische Gewicht des Kernes, reduziert. Berücksichtigen wir dies und entnehmen wir aus der Theorie der Spektren, daß $g_{r,n} = 2\,n^2$, so erhalten wir

$$dI_\nu = -I_\nu n_{r+1} p_e \frac{C_0 Z^2 T^{-\frac{3}{2}}}{\nu^3}\left[\frac{2hRZ^2}{kT}\sum_{n_0}^{\infty}\frac{g'}{n^3}e^{\frac{hRZ^2}{n^2kT}}\right]dh, \tag{5.34}$$

wobei

$$C_0 = \frac{2^4\pi^2}{3\sqrt{3}}\frac{e^6}{ch}\frac{1}{(2\pi m_e k)^{\frac{3}{2}}} = 2{,}67\cdot 10^{24} \tag{5.35}$$

ist.

5. Berechnung der erzwungenen Emission

Der Ausdruck (5.34) ist nicht endgültig. Wir müssen noch die erzwungene Emission oder, wie man sie auch nennt, die negative Absorption berücksichtigen. Die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Stoff können wir nicht nur mit Hilfe der Emissionskoeffizienten und Absorptionskoeffizienten, sondern auch mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten beschreiben. Es seien in 1 cm³ n_k im k-ten Quantenzustand befindliche Atome irgendeines Stoffes und n_i ebensolche, doch in dem niedrigeren i-ten Zustand befindliche Atome enthalten. Dann ist die Anzahl der Übergänge, bei denen ein Quant $h\nu_{ik}$ emittiert wird, in 1 cm³ des Stoffes und in 1 sec gleich

$$n_{k\to i} = n_k(A_{ki} + \varrho_{\nu_{ik}} B_{ki}), \tag{5.36}$$

wobei

$$\varrho_{\nu_{ik}} = \frac{1}{c}\int I_{\nu_{ik}} d\omega \tag{5.37}$$

die Strahlungsdichte[1]) der gegebenen Frequenz ist und A_{ki} und B_{ki} die Übergangswahrscheinlichkeiten sind; A_{ki} entspricht den spontanen Übergängen und $\varrho_{\nu_{ik}} B_{ki}$ den erzwungenen Übergängen, die unter der Einwirkung eines Strahlungsfeldes der Dichte $\varrho_{\nu_{ik}}$ vor sich gehen.

---

[1]) Die Formel (5.37) können wir mit Hilfe der von uns zu Beginn des § 3 durchgeführten Rechnung gewinnen. Nach (3.3) und Abb. 5 ist die Energiemenge, die innerhalb des Raumwinkels $d\omega$ durch das Flächenelement $d\sigma$ in 1 sec und in der Frequenzeinheit hindurchtritt, gleich $I_\nu\, d\sigma \cos\vartheta\, d\omega$. Die Zeit, die der Strahl braucht, um die Höhe ds des Zylinders zu durchlaufen, beträgt $\frac{ds}{c}$. Folglich ist die Energiemenge aus dem betrachteten Bündel

Die Anzahl der entgegengesetzten Übergänge, d. h. der Übergänge $i \to k$, die in 1 cm³ durch die Einwirkung eines Strahlungsfeldes bewirkt werden und unter Absorption eines Quantes $h\nu_{ik}$ vonstatten gehen, ist in 1 sec gleich

$$n_{i \to k} = n_i \varrho_{\nu_{ik}} B_{ik}, \tag{5.38}$$

wobei B_{ik} ebenfalls die entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit ist.

Bei der Anwendung von (5.36) und (5.38) wird vorausgesetzt, daß sich in unmittelbarer Nähe von ν_{ik}, d. h. innerhalb der gegebenen Spektrallinie, die zu den Übergängen $i \to k$ und $k \to i$ gehört, die Strahlungsdichte nicht sehr stark ändert.

Zwischen den Übergangswahrscheinlichkeiten A_{ki}, B_{ki} und B_{ik} besteht folgender Zusammenhang:

$$g_k B_{ki} = g_i B_{ik}, \tag{5.39}$$

$$A_{ki} = \frac{8\pi h \nu_{ik}^3}{c^3} B_{ki} = \frac{8\pi h \nu_{ik}^3}{c^3} \frac{g_i}{g_k} B_{ik}. \tag{5.40}$$

Unter Anwendung von (5.40) können wir (5.36) auch wie folgt schreiben:

$$n_{k \to i} = n_k A_{ki} \left(1 + \frac{c^3}{8\pi h \nu_{ik}^3} \varrho_{\nu_{ik}}\right). \tag{5.41}$$

Die Wirkung der erzwungenen Emission gegenüber der spontanen Emission drückt sich durch den zweiten Summanden in der Klammer von (5.41) aus.

Die Ausdrücke (5.36), (5.38) und auch (5.41) sind für die Gesamtdichte (5.37) (d. h. unter Berücksichtigung aller Richtungen) aufgeschrieben worden. Für ein schmales Strahlenbündel mit der Öffnung $d\omega$ ist die Strahlungsdichte

$$(\varrho_{\nu_{ik}})_{d\omega} = I_{\nu_{ik}}(\vartheta) \cdot \frac{d\omega}{c}, \tag{5.42}$$

und die Ausdrücke (5.36) und (5.38) gehen über in

$$(n_{k \to i})_{d\omega} = n_k \left(\frac{A_{ki}}{4\pi} + \frac{I_{\nu_{ik}}(\vartheta)}{c} B_{ki}\right) d\omega, \tag{5.43}$$

$$(n_{i \to k})_{d\omega} = n_i \frac{I_{\nu_{ik}}(\vartheta)}{c} B_{ik} d\omega. \tag{5.44}$$

Unter Benutzung von (5.40) kann man (5.43) auch so schreiben:

$$(n_{k \to i})_{d\omega} = n_k A_{ki} \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{c^3}{8\pi h \nu_{ik}^3} \frac{I_{\nu_{ik}}(\vartheta)}{c}\right) d\omega. \tag{5.45}$$

$I_\nu \, d\omega$, die in jedem gegebenen Augenblick in dem Zylinder dv enthalten ist, gleich $I_\nu \, d\sigma \cos\vartheta \, d\omega \, \frac{ds}{c} = \frac{I_\nu}{c} d\omega \, dv$. Nach Integration dieses Ausdruckes über die ganze Kugel und über das Gesamtvolumen Δv erhalten wir die gesuchte Energiedichte, d. h. die Formel (5.37).

Der für die Schwächung eines Lichtstrahles abgeleitete Ausdruck (5.34) berücksichtigt nur die dem Koeffizienten B_{ik} entsprechende erzwungene Absorption.

In diesem Zusammenhang zeigt eine entsprechende Untersuchung, daß beim Auftreten von erzwungener Emission der Ausdruck (5.34) notwendig abgeändert werden muß, wenn man die grundlegende Strömungsgleichung (3.12) verwenden will. Zu diesem Zweck müssen wir Übergangswahrscheinlichkeiten einführen, die den Prozessen der Rekombination entsprechen. Es sei k'_ν der atomare Absorptionskoeffizient, der der Photoionisation eines r-fach ionisierten Atoms vom k-ten Niveau aus entspricht. Dann ist nach (3.6) die Anzahl der Photoionisationsprozesse vom k-ten Niveau aus, die sich in 1 sec in 1 cm³ ereignen und unter Absorption von Quanten, deren Frequenzen zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegen, vonstatten gehen, gleich

$$n_{k\to e} d\nu = n_{r,k} k'_\nu \frac{d\nu}{h\nu} \int I_\nu \, d\omega, \tag{5.46}$$

weil bei jedem Photoionisationsprozeß ein Quant $h\nu$ absorbiert wird. Bei jedem solchen Prozeß ist der Endzustand des Elektrons der freie Zustand mit einer gewissen Geschwindigkeit v, die sich aus der lichtelektrischen Gleichung berechnet. Wir erinnern daran, daß wir von dem auf die Masseneinheit bezogenen Absorptionskoeffizienten vermöge (5.20) und (5.22) auf den atomaren Absorptionskoeffizienten übergegangen sind.

Entsprechend (5.37) können wir den Ausdruck (5.46) umschreiben:

$$n_{k\to e} d\nu = n_{r,k} k'_\nu \frac{c\,d\nu}{h\nu} \varrho_\nu . \tag{5.47}$$

Die der Photoionisation des Atoms vom k-ten Niveau aus entgegengerichteten Prozesse sind die Rekombinationen auf dieses Niveau. Den Rekombinationsprozeß kann man als Zusammenstoß eines Ions mit einem Elektron auffassen. Daher können wir einen „effektiven Stoßquerschnitt" der Rekombination einführen, den wir mit β_ν bezeichnen. Dann ist die Anzahl der während 1 sec in 1 cm³ vor sich gehenden Rekombinationen, die eine Emission von Quanten mit Frequenzen zwischen ν und $\nu + d\nu$ bewirken, gleich

$$n'_{e\to k} d\nu = n_{r+1} \beta_\nu v \, d n_e . \tag{5.48}$$

Dabei ist dn_e die Anzahl der Elektronen, die in 1 cm³ enthalten sind und Geschwindigkeiten in den Grenzen v und $v + dv$ besitzen, wobei dv und $d\nu$ entsprechend (5.8) durch die eindeutige Beziehung

$$v\,dv = \frac{h}{m_e} d\nu \tag{5.49}$$

miteinander verknüpft sind.

Den Ausdruck (5.48) erhält man folgendermaßen. Es sei λ_e die mittlere freie Weglänge eines Elektrons (zwischen den Atomen einer gegebenen Sorte). Dann

erleidet ein Elektron mit der Geschwindigkeit v in 1 sec $\frac{v}{\lambda_e}$ Zusammenstöße. Folglich ist die Zahl der Zusammenstöße dZ, die dn_e Elektronen in 1 sec erleiden, gleich $\frac{v}{\lambda_e} dn_e$. Andererseits können wir bei einem Zusammenstoß von Elektronen mit Atomen und Ionen die letzteren als ruhend ansehen; in diesem Falle ist nach der kinetischen Gastheorie die Größe λ_e gleich $\lambda_e = \frac{1}{qn}$, wobei q der effektive Stoßquerschnitt und n die Anzahl der Atome (Ionen) in 1 cm³ ist, mit denen die Elektronen zusammenstoßen (rekombinieren). Setzen wir den Ausdruck für λ_e in den Ausdruck für dZ ein, so erhalten wir die Formel (5.48).

Der Ausdruck (5.48) berücksichtigt nur die Prozesse der spontanen Rekombination. Wenn sich dagegen das Medium in einem Strahlungsfeld der Dichte ϱ_ν befindet, sind auch die Prozesse der erzwungenen Rekombination zu berücksichtigen. Dies liefert nach (5.41)

$$n_{e\to k}\, d\nu = n_{r+1}\, \beta_\nu v \left(1 + \frac{c^3}{8\pi h \nu^3}\, \varrho_\nu\right) dn_e. \tag{5.50}$$

Um die Verbindung zwischen β_ν und k'_ν herzustellen, benutzen wir das *Prinzip des detaillierten Gleichgewichtes,* welches besagt, daß im thermodynamischen Gleichgewicht jeder Prozeß in der einen Richtung genauso oft erfolgt wie der ihm entsprechende Prozeß in der entgegengesetzten Richtung. Folglich müssen im thermodynamischen Gleichgewicht die Größen (5.47) und (5.50) einander gleich sein. Dies ergibt:

$$n_{r,k}\, k'_\nu \frac{c\, d_\nu}{h\nu}\, \varrho_\nu = n_{r+1}\, \beta_\nu v \left(1 + \frac{c^3}{8\pi h\nu^3}\, \varrho_\nu\right) dn_e. \tag{5.51}$$

Ferner gilt im thermodynamischen Gleichgewicht die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung

$$dn_e = n_e 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_e v^2}{2kT}}\, v^2\, dv. \tag{5.52}$$

Für ϱ_ν erhalten wir im thermodynamischen Gleichgewicht, wo $I_\nu(\vartheta) \equiv B_\nu(T)$ ist, nach (5.37) und (3.11)

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\, \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{5.53}$$

Schließlich finden wir auf Grund von (5.9) und (5.30) für $n_{r,k}$:

$$n_{r,k} = n_{r,1} \frac{g_{r,k}}{g_{r,1}}\, e^{-\frac{\varepsilon_{r,k}}{kT}} = \frac{n_r}{u_r}\, g_{r,k}\, e^{-\frac{\varepsilon_{r,k}}{kT}}, \tag{5.54}$$

und für den Zusammenhang zwischen n_r, n_{r+1} und n_e können wir die SAHAsche Formel (5.11) unter Beachtung von (5.12) verwenden.

Setzen wir dies alles in (5.51) ein, und benutzen wir (5.49), (5.6) und (5.8), so finden wir den gesuchten Ausdruck

$$\beta_\nu = \frac{g_{r,k}\,\nu^2 h^2}{u_{r+1}\,c^2\,m_e^2\,v^2}\,k'_\nu. \tag{5.55}$$

Der Ausdruck (5.55) ist von uns für den Fall des thermodynamischen Gleichgewichtes abgeleitet. Er besitzt jedoch völlig allgemeinen Charakter, weil er einen Zusammenhang zwischen Größen angibt, die für die Atome und Ionen selbst charakteristisch sind. Wir erinnern daran, daß die Ausdrücke (5.39) und (5.40) für die diskreten Übergänge ebenfalls für das thermodynamische Gleichgewicht abgeleitet worden sind. Sie sind nur in dem Fall nicht gültig, daß sich das Strahlungsfeld ϱ_ν in der Nähe von ν_{ik} sehr stark mit der Frequenz ändert.

Wir betrachten jetzt unsere grundlegende Strömungsgleichung (2.28), in der wir unter der Größe $\varkappa_\nu$ den Absorptionskoeffizienten verstehen, der nur die erzwungene Absorption berücksichtigt. Wir kennzeichnen diesen Koeffizienten durch einen Strich. Dann erhalten wir

$$\cos\vartheta\,\frac{d I_\nu(\vartheta)}{d h}\,d\nu\,d\omega = I_\nu(\vartheta)\,\varkappa'_\nu\varrho\,d\nu\,d\omega - j_\nu(\vartheta)\,\varrho\,d\nu\,d\omega. \tag{5.56}$$

Die Gleichung (5.56) betrachten wir für Prozesse, die mit der Ionisation des Atoms vom k-ten Niveau aus und mit der Rekombination auf dieses Niveau verbunden sind. Die Größe $j_\nu(\vartheta)d\nu d\omega$ ist nichts anderes als die Energie, die von 1 g der Photosphäre in 1 sec im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ in den Raumwinkel $d\omega$ emittiert wird. Die Abhängigkeit der Größe $j_\nu(\vartheta)$ von ϑ wird dadurch bedingt, daß in unserem betrachteten Fall in den Koeffizienten j_ν auch die erzwungene Emission mit einbezogen ist. Letztere wird aber durch die Strahlungsdichte in einer gegebenen Richtung bestimmt [Formel (5.42)] und hängt folglich vom Winkel ϑ ab.

Mit Rücksicht darauf, daß in ein Strahlenbündel $d\omega$ nur der Bruchteil $\frac{d\omega}{4\pi}$ der gesamten spontanen Emission emittiert wird, können wir jetzt in Übereinstimmung mit (5.50) und (5.45) schreiben:

$$j_\nu(\vartheta)\,\varrho\,d\nu\,d\omega = n_{r+1}\,\beta_\nu\,v\left(\frac{1}{4\pi} + \frac{c^3}{8\pi h\nu^3}\,\frac{I_\nu(\vartheta)}{c}\right)h\nu\,d n_e\,d\omega, \tag{5.57}$$

weil bei jedem Rekombinationsprozeß ein Quant $h\nu$ emittiert wird.

Mit Hilfe der Sahaschen Formel (5.11) führen wir an Stelle von n_{r+1} die Größe n_r ein, ersetzen daraufhin diese Größe n_r nach (5.54) durch $n_{r,k}$ und benutzen (5.7), (5.8), (5.37), (5.55) sowie (5.52). Wir erhalten

$$j_\nu(\vartheta)\,\varrho\,d\nu\,d\omega = n_{r,k}\,k'_\nu\,e^{-\frac{h\nu}{kT}}\left\{\frac{2h\nu^3}{c^2} + I_\nu(\vartheta)\right\}d\omega\,d\nu. \tag{5.58}$$

Wir ersetzen jetzt das erste Glied in der geschweiften Klammer durch das PLANCKsche Gesetz (3.11) und erhalten an Stelle von (5.58):

$$j_\nu(\vartheta)\,\varrho\,d\nu\,d\omega = n_{r,k}\,k'_\nu\left\{\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)B_\nu + e^{-\frac{h\nu}{kT}}\,I_\nu(\vartheta)\right\}d\omega\,d\nu. \quad (5.59)$$

Wir führen jetzt den Ausdruck (5.59) in die Strömungsgleichung (5.56) ein und ersetzen in ihr entsprechend (5.20) und (5.22) die Größe $\varkappa'_\nu\varrho$ durch die ihr gleiche Größe[1]) $k'_\nu n_{r,k}$:

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu(\vartheta)}{dh} = n_{r,k}\,k'_\nu I_\nu(\vartheta)\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) - n_{r,k}\,k'_\nu B_\nu\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

$$= n_{r,k}\,k'_\nu\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)(I_\nu(\vartheta) - B_\nu). \quad (5.60)$$

Führen wir nunmehr die Größe

$$k_\nu = \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)k'_\nu \quad (5.61)$$

ein, so erhält die Strömungsgleichung (5.60) die Gestalt

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu(\vartheta)}{dh} = n_{r,k}\,k_\nu\,(I_\nu(\vartheta) - B_\nu) \quad (5.62)$$

oder, wenn wir wieder den auf die Masseneinheit bezogenen Absorptionskoeffizienten einführen,

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu(\vartheta)}{dh} = \varrho\varkappa_\nu\,(I_\nu(\vartheta) - B_\nu). \quad (5.63)$$

Auf diese Weise haben wir unsere Ausgangsgleichung (3.12) erhalten.

Folglich muß bei der Anwendung der Strömungsgleichung (3.12) der Absorptionskoeffizient, der nur die erzwungene Absorption[2]) berücksichtigt, entsprechend Formel (5.61) abgeändert werden. Hierbei ist völlig klar, daß die Beziehung (5.61) auf die Photoionisation von einem beliebigen Niveau aus anwendbar ist. Deshalb müssen wir, um die erzwungene Emission zu berücksichtigen, den ganzen Ausdruck (5.34) mit $\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$ multiplizieren.

Im Hinblick auf die erhaltenen Resultate merken wir folgendes an: Erstens erhalten wir – wie sich leicht zeigen läßt – die gleiche Beziehung (5.61), wenn wir nicht Photoionisationsprozesse, sondern diskrete Übergänge zwischen den verschiedenen Quantenbahnen eines Elektrons betrachten. Zweitens setzt die Benutzung der grundlegenden Formel (5.61) die Anwendbarkeit der Formeln von SAHA und BOLTZMANN sowie die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung, d.h. das Vorhandensein von thermodynamischem Gleichgewicht, voraus.

---

[1]) Die Größen $n_{r,k}$ und ϱ beziehen sich hier nur auf Atome, die sich im r-ten Ionisationszustand und im k-ten Anregungszustand befinden.

[2]) Diese entspricht im Falle diskreter Übergänge dem Koeffizienten B_{ik}.

Kehren wir nun zu unserer eigentlichen Behandlung des Absorptionskoeffizienten zurück. Wenn wir (5.61) anwenden, können wir zusammen mit (5.34) für den auf ein $(r+1)$-fach ionisiertes Atom bezogenen Absorptionskoeffizienten folgenden Ausdruck schreiben:

$$k_\nu = \frac{C_0 Z^2 p_e}{T^{\frac{3}{2}} \nu^3} \left\{ \frac{2hRZ^2}{kT} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{g'}{n^3} e^{\frac{hRZ^2}{n^2 kT}} \right\} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right). \tag{5.64}$$

6. Frei-frei-Übergänge. Abschließende Ergebnisse

Der hingeschriebene Absorptionskoeffizient berücksichtigt nur die Photoionisationsprozesse von den verschiedenen Niveaus aus. Diese Übergänge nennt man häufig *gebunden-frei*-Übergänge und die ihnen entgegengerichteten, d. h. die Rekombinationen, *frei-gebunden*-Übergänge. Außer diesen Übergängen gibt es jedoch noch weitere, die man als *frei-frei*-Übergänge bezeichnet. Die klassische Elektrodynamik und die Quantenmechanik lehren, daß ein System, das aus einem Ion und einem sich in dem Feld des Ions auf einer hyperbolischen Bahn bewegenden Elektron besteht, Lichtenergie absorbieren und emittieren kann. Im ersten Fall vergrößert ein derartiges System seine Energie, im zweiten Falle verringert es sie. Als Resultat eines jeden Absorptions- oder Emissionsprozesses ändern sich die Parameter der hyperbolischen Bahn des Elektrons.

Die Quantentheorie liefert für diese Prozesse folgenden Ausdruck für den Absorptionskoeffizienten, der ebenfalls auf ein $(r+1)$-fach ionisiertes wasserstoffähnliches Atom bezogen ist:

$$k_\nu = \frac{C_0 Z^2 p_e}{T^{\frac{3}{2}} \nu^3} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) g''. \tag{5.65}$$

In diese Formel ist schon der Faktor, der die Prozesse der negativen Absorption berücksichtigt (in runden Klammern), aufgenommen. Die Größe g'' im Ausdruck (5.65) ist ein Korrektionsfaktor, der sich in der Mehrzahl der Fälle nur wenig von Eins unterscheidet. Er kann durch die Formel

$$g'' = 1 + 0{,}1728 \left(\frac{\nu}{RZ^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[1 + \frac{2kT}{h\nu}\right] \tag{5.66}$$

abgeschätzt werden.

Der Absorptionskoeffizient (5.65), der den frei-frei-Übergängen entspricht, ist in der Regel nur für den fernen infraroten Spektralbereich von Bedeutung. Im visuellen und photographischen Bereich erreicht er nur bei sehr hohen Temperaturen (höher als 50000 bis 100000°) eine merkliche Wirkung.

Nach seiner Definition (2.13) besitzt der Absorptionskoeffizient die Eigenschaft der Additivität (die wir in der Formel (5.29) ausgenutzt haben). Um

daher sowohl die gebunden-frei-Übergänge als auch die frei-frei-Übergänge zu berücksichtigen, müssen wir die beiden Koeffizienten (5.64) und (5.65) addieren; als Resultat erhalten wir folgenden, den Absorptionskoeffizienten für wasserstoffähnliche Atome darstellenden Ausdruck:

$$k_\nu = \frac{C_0 Z^2 p_e}{\nu^3 T^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{2hRZ^2}{kT} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{g'}{n^3} e^{\frac{hRZ^2}{n^2 kT}} + g'' \right\} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right). \tag{5.67}$$

Dieser Absorptionskoeffizient bezieht sich auf ein $(r + 1)$-fach ionisiertes Atom. Wenn wir mit Hilfe der ersten Gleichung der beiden Beziehungen (5.18)

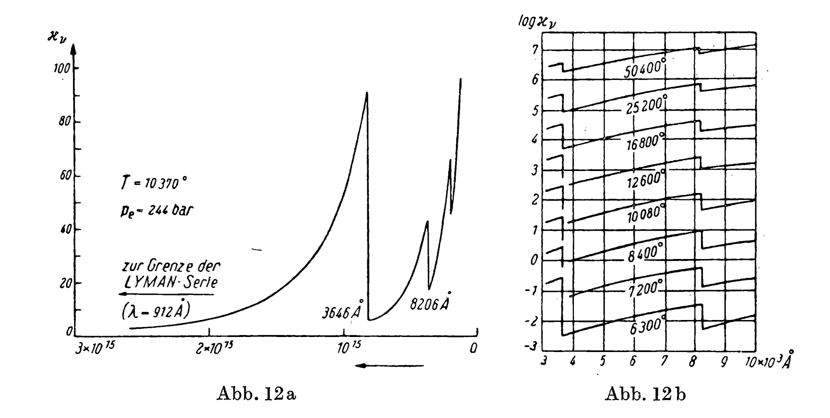


Abb. 12a Abb. 12b

den Ionisationsgrad x einführen, so wird nach der allgemeinen Formel (5.23) der auf ein wasserstoffähnliches Atom bezogene Absorptionskoeffizient (unter Berücksichtigung aller Ionisationsstufen) gleich

$$k_\nu = \frac{C_0 Z^2 x p_e}{\nu^3 T^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{2hRZ^2}{kT} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{g'}{n^3} e^{\frac{hRZ^2}{n^2 kT}} + g'' \right\} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right). \tag{5.68}$$

Bei starker Abweichung des Materiezustandes vom thermodynamischen Gleichgewicht darf man die Formeln (5.67) und (5.68) nicht verwenden. In diesem Falle muß man von der Grundgleichung (5.24) ausgehen, in der der Absorptionskoeffizient nicht von den äußeren Bedingungen abhängt.

Als Illustration der Formel (5.68) bringen wir ein Diagramm (Abb. 12a), das den Verlauf von $\varkappa_\nu$ für Wasserstoff bei $T = 10370°$ und $p_e = 244$ bar darstellt. In dieser Abbildung ist der Absorptionskoeffizient auf die Masseneinheit bezogen. Dies wird erreicht, indem man nach (5.22) die Gleichung (5.68) durch die Masse des Wasserstoffatoms dividiert, wobei natürlich darauf zu achten ist, daß für Wasserstoff $Z = 1$ ist. In Abb. 12b ist die Abhängigkeit des $\lg \varkappa_\nu$ von der

Wellenlänge für verschiedene Temperaturen angegeben. Der Koeffizient $\varkappa_\nu$ ist hier auf ein Gramm neutralen Wasserstoff bezogen. Um den auf ein Gramm Wasserstoff allgemein (mit Berücksichtigung des neutralen und des ionisierten Zustandes) bezogenen Absorptionskoeffizienten zu erhalten, sind die Zahlen in der Abb. 12b mit $(1 - x_\mathrm{H})$ zu multiplizieren, wobei x_H der Ionisationsgrad des Wasserstoffs ist.

7. Wasserstoffunähnliche Atome. Die negativen Wasserstoffionen. Die Streuung der Strahlung an freien Elektronen

Sämtliche abgeleiteten Formeln und insbesondere die Ausgangsgleichung (5.24) sind auf wasserstoffähnliche Atome, d. h. auf die Atome H, He II, Li III, Be IV usw. anwendbar. Auf die übrigen Elemente darf man die Formel (5.24) und alle sich aus ihr ergebenden Schlußfolgerungen nicht anwenden. In diesem Falle ist der Absorptionskoeffizient entweder experimentell zu bestimmen oder mit Hilfe der Quantenmechanik zu berechnen. Hierbei zeigt es sich, daß die Abweichungen der gefundenen Größen k_ν von denjenigen Werten, die man bei Anwendung von (5.24) erhält, um so kleiner ausfallen, je größer n ist, d. h., je größer die Dimension der Bahn ist, von der aus die Photoionisation vor sich ging. Daher ist in den meisten Fällen die Anwendung von (5.24) auf Niveaus mit hinreichend hohem Anregungspotential nicht mit wesentlichen Fehlern behaftet. Dagegen kann die Anwendung dieser Formel auf die Photoionisation vom Grundzustand aus (oder von einem ihm hinreichend benachbarten Niveau) zu Ergebnissen führen, die sich von den wahren Verhältnissen um das Zehn- bis Hundertfache unterscheiden. Fehler der gleichen Größenordnung ergeben sich auch bei Anwendung der Formel (5.24) auf solche (wasserstoffunähnliche) Atome oder Ionen, bei denen außerhalb der abgeschlossenen Schalen nur ein Elektron vorhanden ist. Solche Systeme, z. B. K I, werden als Systeme mit einem Valenzelektron bezeichnet.

Wir geben jetzt eine kurze Übersicht über einige Daten für die vom astrophysikalischen Standpunkt aus wichtigsten Atome [5, S. 80]. Hierbei betrachten wir die Photoionisation vom Grundniveau aus (die Absorption jenseits der Grenze der Hauptserie).

In der Abb. 13 ist der Verlauf von k'_ν unmittelbar jenseits der Grenze der Hauptserie des Heliums dargestellt. Hier nimmt k'_ν mit ν schwächer als ν^{-3} ab. In der Abb. 14 ist der Verlauf von k'_ν für C, N, O und F dargestellt. Auf der Abszisse ist die Energie der abgetrennten Elektronen in Elektronenvolt aufgetragen. Für O und F ist die Abweichung vom ν^{-3}-Gesetz besonders groß, und wir beobachten sogar ein gewisses Maximum!

Für Na ist k_ν unmittelbar an der Grenze der Hauptserie gleich $3{,}1 \cdot 10^{-19}$ cm². Die weitere Abnahme von k_ν mit der Frequenz geht schneller als im ν^{-3}-Gesetz vor sich. Für Ca folgt der Verlauf von k_ν annähernd dem ν^{-3}-Gesetz; unmittelbar an der Grenze der Hauptserie ist $k_\nu = 2{,}5 \cdot 10^{-17}$ cm². Für K besitzen die entsprechenden Berechnungen noch nicht die nötige Genauigkeit, doch ist hier offenbar k_ν beträchtlich kleiner, als die Formel (5.24) angibt. Für die

übrigen Elemente der Tabelle 1 sind bisher noch keine Berechnungen durchgeführt worden. Ebenfalls liegen fast keine Berechnungen von k_ν für die Photoionisation der besprochenen Atome von den angeregten Niveaus aus vor. In diesem Falle kann man jedoch meistens die Formel (5.24) benutzen, indem man die „Wasserstoffähnlichkeit" der entsprechenden Bahnen beachtet.

Fast gar keine quantitativen Angaben über die Größen k_ν liegen für Ionen vor. Eine Ausnahme bilden die wasserstoffähnlichen Ionen (wie He II, Li III usw.) und eine geringe Anzahl ausgewählter Elemente.

Ebenso wie für die wasserstoffähnlichen Ionen sind auch für alle übrigen Elemente (neutrale und ionisierte) Absorptionen charakteristisch, die sich aus

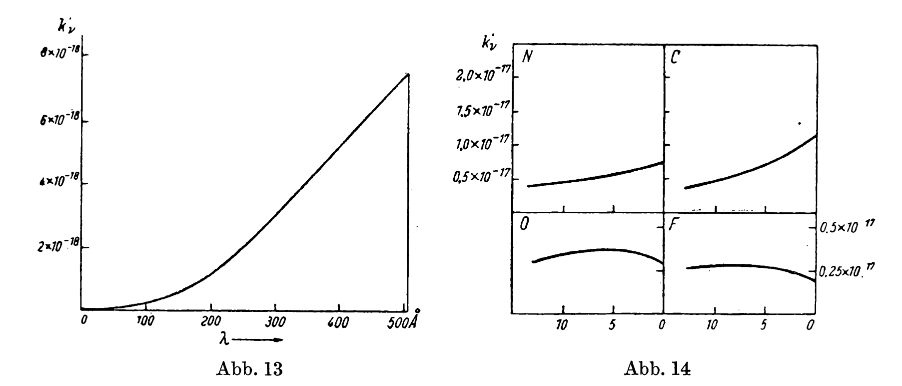


Abb. 13 Abb. 14

einzelnen, einander überlagernden Streifen zusammensetzen. Um den Absorptionskoeffizienten für die Frequenz ν zu bestimmen, müssen wir alle diese Streifen berücksichtigen, wobei wir natürlich nur diejenigen Streifen mit einbeziehen dürfen, deren Grenzen von der vorgegebenen Frequenz aus in Richtung größerer Wellenlängen liegen. Die Berechnung des Absorptionskoeffizienten geschieht auf die gleiche Weise wie bei den wasserstoffähnlichen Atomen, nämlich unter Verwendung der Formeln von BOLTZMANN und SAHA und unter Berücksichtigung der negativen Absorption nach Formel (5.61).

Im Jahre 1939 entdeckte man, daß, beginnend mit den Sternen der Klassen A 2-F 0 und zu den Sternen mit einem späteren Spektraltyp fortschreitend, die Absorption der Strahlung durch negative Ionen des Wasserstoffs eine immer stärkere und schließlich die beherrschende Rolle (für die Sonne) spielt. Als *negatives Wasserstoffion* bezeichnet man ein System, das aus einem neutralen Wasserstoffatom besteht, an das ein zusätzliches Elektron angelagert ist. Die für dieses System charakteristischen Absorptionsprozesse sind die gleichen wie bei den gewöhnlichen Atomen, nämlich die gebunden-frei-Übergänge, d.h. die photoelektrische Absorption, und die frei-frei-Übergänge, d.h. die Absorption von Strahlung durch ein System, das aus einem neutralen Wasserstoffatom und aus einem sich in seiner Nähe auf einer offenen Bahn be-

wegenden freien Elektron zusammengesetzt ist. Doch besteht zwischen den negativen Wasserstoffionen und den gewöhnlichen Atomen ein gewisser Unterschied, nämlich, daß im ersten Fall praktisch nur ein wesentlicher Absorptionsstreifen vorhanden ist. Weil in den wichtigsten Bereichen des Spektrums die photoelektrische Absorption des negativen Wasserstoffions die dominierende Rolle spielt, stellen wir in der Abb. 15a den Absorptionskoeffizienten, der sich nur auf diese Absorption bezieht, für sich dar. Er ist auf ein negatives Wasserstoffion bezogen. Es ist zu bemerken, daß das Ionisationspotential, das die Grenze des Absorptionsstreifens festlegt, für dieses System gleich 0,75 eV ist. In der Abb. 15b ist der Absorptionskoeffizient für negative Ionen unter Berücksichtigung der frei-frei-Übergänge dargestellt. Er ist für verschiedene Temperaturen aufgetragen und auf ein neutrales Wasserstoffatom und auf die Einheit des Elektronendruckes (1 bar) bezogen. Um k_λ für ein beliebiges p_e zu erhalten, hat man das aus der graphischen Darstellung gefundene k_λ mit diesem Wert von p_e zu multiplizieren.

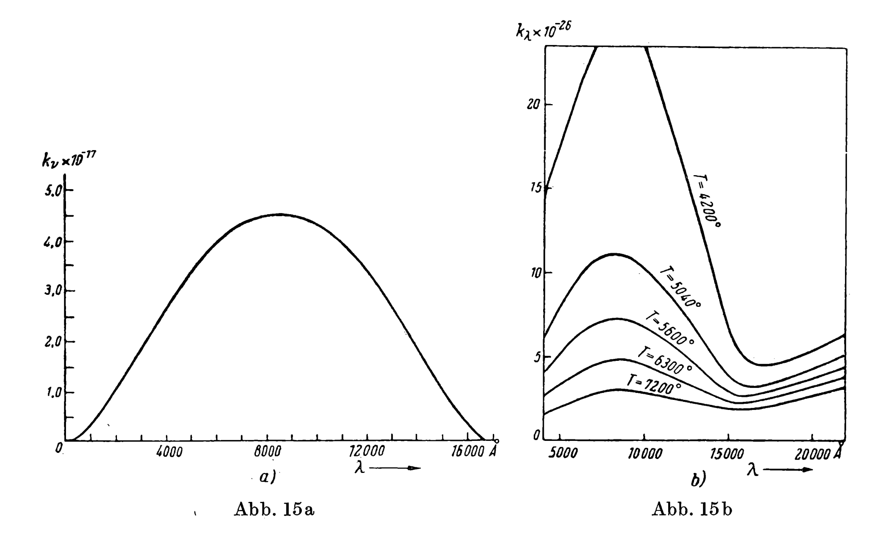


Abb. 15a

Abb. 15b

Analytische Ausdrücke für den Absorptionskoeffizienten der negativen Wasserstoffionen gibt es nicht. Die hierfür gültigen Werte von k_ν entnimmt man geeigneten Tabellen.[1]) Außer den Rechnungen für die negativen Ionen des Wasserstoffs (die mit H^- bezeichnet werden) liegen gegenwärtig Rechnungen für die negativen Ionen des Sauerstoffs vor.

---

[1]) S. Chandrasekhar and F. Breen, On the continuous absorption coefficient of the negative hydrogen ion. III. Astrophysical Journal **104**, 430, 1946.

In den Photosphären der heißen Sterne der Klassen O und B, in denen infolge der hohen Temperatur sehr wenig neutrale Wasserstoffatome vorhanden sind, beginnen die Prozesse der Streuung der Strahlung an freien Elektronen eine bedeutende Rolle zu spielen. Hierbei müssen wir jedoch im Auge behalten, daß wir es im vorliegenden Fall nicht mit einer wirklichen Absorption, sondern mit einer Streuung der Strahlung zu tun haben. Der Streuprozeß läuft nämlich darauf hinaus, daß die streuenden Teilchen nur die Richtung der auf sie treffenden Quanten ändern. Eine Verwandlung von Strahlungsenergie in Wärmeenergie und umgekehrt findet hierbei nicht statt. Daher darf man in diesem Falle das KIRCHHOFFsche Gesetz (3.10) für den Emissionskoeffizienten nicht direkt anwenden.

Der Streukoeffizient wird – genauso wie der Absorptionskoeffizient – durch den üblichen Ausdruck (5.23) definiert. Wenn in 1 cm³ n_e freie Elektronen vorhanden sind und der auf ein freies Elektron bezogene Streukoeffizient s_e ist, so wird die durch die Streuung an freien Elektronen hervorgerufene Schwächung der Intensität I_ν durch den Ausdruck

$$d I_\nu = - I_\nu s_e n_e d h \tag{5.69}$$

definiert, wobei

$$s_e = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \tag{5.70}$$

ist.

Zahlenmäßig ist s_e gleich $0{,}665 \cdot 10^{-24}$ cm². Aus (5.70) folgt, daß die Streuung an freien Elektronen nicht von der Wellenlänge abhängt. Die Streuung der Strahlung an Protonen, die in großer Anzahl in den Atmosphären der heißen Sterne vorhanden sind, ist geringfügig, weil der Streukoeffizient für Protonen beträchtlich kleiner als s_e ist.

Wenn in den Sternatmosphären die Absorption der Strahlung nicht nur von einem Element, sondern von zwei oder mehr Elementen bewirkt wird, muß man nach Formel (5.23) eine summierte Absorption einführen. Wenn in 1 cm³ n_1 absorbierende Atome eines beliebigen Elementes mit dem atomaren Absorptionskoeffizienten $k_\nu^{(1)}$, n_2 Atome mit dem Absorptionskoeffizienten $k_\nu^{(2)}$ usw. vorhanden sind, wird die summierte Absorption bei der Frequenz ν auf Grund von (5.23) folgendermaßen definiert:

$$d I_\nu = \sum_s d I_\nu^{(s)} = - I_\nu d h \sum_s n_s k_\nu^{(s)} . \tag{5.71}$$

Wenn wir jetzt alle Absorptionskoeffizienten auf ein Atom des häufigsten Elementes, z.B. des Wasserstoffs beziehen wollen, so müssen wir Formel (5.1) anwenden. In diesem Falle erhalten wir zusammen mit (5.71):

$$d I_\nu = - I_\nu n_1 d h \sum_s a_s k_\nu^{(s)} . \tag{5.72}$$

Die Größe

$$k_\nu = \sum_s a_s k_\nu^{(s)} \tag{5.73}$$

können wir als *gesamten* oder *summierten Absorptionskoeffizienten* bezeichnen. Nach Formel (5.2) können wir den gesamten Absorptionskoeffizienten auch auf die Gesamtzahl aller Atome in 1 cm³ beziehen. Da jedoch die Zahl der Wasserstoffatome n_H in 1 cm³ die Zahl aller Atome der übrigen Elemente (ebenfalls in 1 cm³) bei weitem übertrifft, ist praktisch $n_1 \approx n_H \approx n$.

Nachdem wir uns nun in großen Zügen mit dem Absorptionskoeffizienten vertraut gemacht haben, können wir uns wieder der Frage nach der Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Sterne zuwenden.

§ 6. Die Energieverteilung in den kontinuierlichen Spektren der Sterne bei frequenzabhängigem Absorptionskoeffizienten

1. Die Absorption der Strahlung in den Sternphotosphären für verschiedene Spektralklassen

Im vierten Paragraphen des vorliegenden Kapitels kamen wir zu der Schlußfolgerung, daß der Widerspruch zwischen der dort behandelten Theorie und den Beobachtungsergebnissen hauptsächlich auf die in den Sternphotosphären bestehende Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Frequenz zurückzuführen ist. In diesem Zusammenhang haben wir uns im vorangehenden Paragraphen mit den wichtigsten Daten für den Absorptionskoeffizienten beschäftigt. Um die Lösung der späteren Aufgaben zu erleichtern, ist noch die Frage zu klären, welche Atome und Ionen denn in den Photosphären der Sterne der verschiedenen Spektralklassen vorwiegend die Absorption bewirken. Hierbei gehen wir auf die Formel (5.23) zurück, nach der die Schwächung der Strahlungsintensität der Anzahl der absorbierenden Atome in 1 cm³ und dem atomaren Absorptionskoeffizienten dieser Atome proportional ist. Diesen grundlegenden Satz machen wir zum Ausgangspunkt unserer Überlegung und untersuchen, welche Rolle die verschiedenen Atome und Ionen spielen. Wir beginnen mit den Sternen der Spektralklassen M und N. Unmittelbare spektroskopische Beobachtungen zeigen, daß praktisch das gesamte kontinuierliche Spektrum dieser Sterne durch Banden, die von den verschiedenartigsten molekularen Bindungen herrühren, stark verzerrt ist. Die Berechnung der Absorptionswirkung dieser Banden ist mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Außerdem ist die Schwächung der Strahlung durch die Molekülbanden in den meisten Fällen offenbar nicht auf eine wahre Absorption, sondern auf eine Streuung zurückzuführen.

Neben der Absorption durch Moleküle kann in den Photosphären der genannten Sterne auch die Absorption durch die negativen Wasserstoffionen H^- eine gewisse – wenn auch anscheinend geringe – Rolle spielen. Diese Absorption ist um so wirksamer, je größer die Zahl n_{H^-} ist, d.h. die Anzahl der negativen Wasserstoffionen in 1 cm³, und diese ist um so größer, je größer die Anzahl der neutralen Wasserstoffatome und die Anzahl n_e der freien Elektronen in 1 cm³ ist. Die erste Bedingung ist für alle Sterne erfüllt, deren effektive Temperatur T_e niedriger als 7000°–8000° ist. In den Atmosphären dieser Sterne

ist praktisch der gesamte Wasserstoff neutral. Die zweite Bedingung ist in den Photosphären der zu den Spektralklassen M, N und R gehörigen Sterne nicht erfüllt. Das Studium der Absorptionslinien zeigt (siehe Tabelle 8, § 15), daß in den Photosphären der Sterne dieser Spektralklassen die Größe n_e (verhältnismäßig) klein ist. Erst in den Atmosphären der K-Sterne, in denen n_e schon hinreichend groß ist (n_e wächst bei Erhöhung von T_e, da der Ionisationsgrad der Atome zunimmt), gewinnen die negativen Wasserstoffionen an Bedeutung und spielen in der Photosphäre der Sonne (d G 3) sogar die dominierende Rolle.

Bei einer weiteren Erhöhung der effektiven Temperatur beginnen die H^--Ionen für die Absorption wieder an Bedeutung zu verlieren. Dies beruht hauptsächlich auf dem Anwachsen des Absorptionsvermögens des atomaren Wasserstoffs (siehe weiter unten). Außerdem nimmt mit steigender Temperatur die Ionisation der H^--Ionen, d.h. ihr Zerfall in neutrale H-Atome und Elektronen, zu. Dieser Faktor ist jedoch von viel geringerer Bedeutung, da das Ionisationspotential des H^--Ions gleich 0,75 eV ist und sich bei einem so niedrigen Ionisationspotential nach der SAHA-Formel (5.11) der Ionisationsgrad verhältnismäßig langsam mit T ändert. Diese Änderung geht am langsamsten bei hinreichend hohen Temperaturen vor sich, weil dann der Exponent in der SAHA-Formel besonders klein wird und folglich selbst eine große Änderung von T nur wenig ins Gewicht fällt. Jedoch gewinnt bei weiterem Anwachsen von T_e die Ionisation der H^--Ionen sowie die der neutralen Wasserstoffatome an Bedeutung.

Unmittelbare Berechnungen zeigen, daß die H^--Ionen in den Photosphären der normalen Sterne vom Typ A 0 eine unbedeutende Rolle spielen, obwohl in den Photosphären der weißen Zwerge, in denen der Elektronendruck sehr groß ist, auch für diesen Spektraltyp ihr Einfluß anscheinend groß ist.

Abschließend bemerken wir noch, daß die Elektronen, die zusammen mit den neutralen Wasserstoffatomen die H^--Ionen bilden, bei niedrigeren Temperaturen durch Ionisation solcher Elemente entstehen, deren Ionisationspotential verhältnismäßig gering ist. Zu diesen Elementen gehören Na ($\chi_0 = 5{,}12$ eV), Mg ($\chi_0 = 7{,}61$ eV), Ca ($\chi_0 = 6{,}09$ eV) usw. Dagegen besitzt der Wasserstoff, obgleich er zahlenmäßig das vorherrschende Element ist, ein verhältnismäßig hohes Ionisationspotential (13,59 eV). Daher liefert seine Ionisation bei niedrigen Temperaturen eine geringe Anzahl freier Elektronen. Das gleiche gilt auch für He, N und O. Erst bei Temperaturen, die höher als 6000–7000° sind und bei den üblichen Elektronendrücken, wie sie in den Sternphotosphären herrschen (siehe Tabelle 8, § 15), beginnt auch der Wasserstoff eine wesentliche Quelle der freien Elektronen zu werden.

Kehren wir zu den Sternen der Klassen M und N zurück. Außer der Molekülabsorption und der Absorption durch die H^--Ionen scheint bei ihnen die Absorption der Strahlung durch Metallatome eine bestimmte Rolle zu spielen. Bisher sind jedoch noch keinerlei Rechnungen, die quantitative Angaben über die relative Rolle der Moleküle, der H^--Ionen und der Metalle in den Photosphären der Sterne der Klassen M und N liefern könnten, durchgeführt worden.

Zum Abschluß sagen wir noch einige Worte über den Einfluß der Wasserstoffatome. Obgleich praktisch alle Wasserstoffatome in den Photosphären der

späten Sterne neutral sind, spielen sie eine völlig untergeordnete Rolle. In der Tat wird die Absorption der Strahlung durch die neutralen Wasserstoffatome bis zur Grenze der LYMAN-Serie, wo $\lambda = 912$ Å ist, durch Photoionisationen von angeregten Niveaus aus hervorgerufen. Schon für das erste angeregte Niveau mit $n = 2$ jedoch ist bei den Wasserstoffatomen das Anregungspotential sehr groß; es beträgt 10,16 eV. Daher ist bei niedrigen Temperaturen die Anzahl der neutralen Wasserstoffatome in den Anregungszuständen überaus gering. Zum Beispiel sahen wir, daß selbst für $T = 5700°$ $\frac{n_2}{n_1} = 4{,}2 \cdot 10^{-9}$ war. Für Sterne der Klassen M und N ist dieses Verhältnis noch um einige Größenordnungen kleiner. Daher können wir den Einfluß des neutralen Wasserstoffs in dem vorliegenden Fall vernachlässigen. Allerdings darf man das Vorhandensein von neutralen Wasserstoffatomen im Grundzustand nicht vergessen. Infolge der großen prozentualen Häufigkeit des Wasserstoffs ist die Anzahl dieser Atome außerordentlich groß. Jedoch folgt aus physikalischen Überlegungen und aus dem Studium der Gleichungen des Strahlungsgleichgewichtes, daß die Spektralbereiche, die bei der Aufstellung eines Gesetzes für die Änderung der Temperatur mit der Tiefe die wichtigste Rolle spielen, diejenigen sind, in denen der Absorptionskoeffizient und die Intensität der photosphärischen Strahlung gleichzeitig hinreichend groß sind. Dies ist insbesondere aus der Gleichung (3.14) ersichtlich. Nun ist aber bei den Sternen mit niedriger Temperatur die Strahlungsintensität in dem Spektralbereich, in dem die Photoionisation des neutralen Wasserstoffs vom Grundzustand aus vor sich geht, äußerst gering.

In der Tat ist dieser gesamte Bereich im fernen Ultraviolett jenseits der Grenze der LYMAN-Serie mit $\lambda = 912$ Å, d.h. im LYMAN-*Kontinuum*, gelegen. Daher können wir den Einfluß des neutralen Wasserstoffs in den Photosphären der Sterne mit niedriger Temperatur auch von diesem Gesichtspunkt aus gänzlich vernachlässigen.

Wir wenden uns jetzt den Sternen zu, die heißer als die Sterne der Klassen M und N sind. Insbesondere betrachten wir die Sterne vom Sonnentypus, bei denen n_e schon hinreichend groß ist.

In den Photosphären der Sterne vom Sonnentypus spielen die Molekülabsorptionen keine wesentliche Rolle mehr. Aus direkten Berechnungen geht hervor, daß auch die Absorption der Strahlung durch angeregte Metallatome im Vergleich mit der Absorption durch die H^--Ionen völlig unbedeutend ist.

Daher sind in dem sehr großen Wellenlängenbereich, der das infrarote, das visuelle und das nahe ultraviolette (bis 4000 Å) Gebiet umfaßt, die negativen Wasserstoffionen die hauptsächlichen Urheber der Absorption. Die Metalle spielen anscheinend erst in solchen Wellenlängen eine wesentliche Rolle, die kleiner als 3000 Å sind, d.h. in Gebieten, in denen ihre Photoionisation vom Grundniveau aus vor sich geht. In den Wellenlängen, die kleiner als 4000 Å sind, ist auch die Schwächung der Photosphärenstrahlung durch die sich hier sehr stark zusammendrängenden Absorptionslinien von Bedeutung. (Man halte sich vor Augen, daß in den Absorptionslinien im wesentlichen keine

wahre Absorption der Strahlung, sondern eine Streuung der Strahlung stattfindet.) Dies folgt auch unmittelbar aus den Beobachtungen. Sie zeigen unmittelbar jenseits von $\lambda = 4000$ Å eine anomal starke Intensitätsabnahme des kontinuierlichen Spektrums. Der Einfluß der Absorptionslinien muß auch im fernen ultravioletten Spektralbereich bis zur Grenze der LYMAN-Serie sehr bedeutend sein, weil in diesem Bereich eine große Zahl starker Resonanzlinien verschiedener Elemente konzentriert ist, d.h. solcher Linien, die durch Übergänge vom niedrigsten Niveau aus entstehen. Besonders stark müssen die Linien der LYMAN-Serie sein. Weil jedoch in dem betrachteten Spektralbereich die Strahlungsintensität verhältnismäßig gering ist, kann der Einfluß der fernen ultravioletten Spektralgebiete auf die Energiebilanz der Sonnenphotosphäre nicht besonders groß sein.

Aus dem gleichen Grunde hat die Absorption durch neutrale Wasserstoffatome für die Sonnenatmosphäre keine Bedeutung. Auf diese Weise sind in den Photosphären der Sterne vom Sonnentyp und von benachbartem Typ die H^--Ionen die hauptsächlichen Urheber der Absorption. Zu dieser Absorption tritt im ultravioletten Spektralbereich die Absorption der Metalle (Photoionisation vom Grundniveau) und die Streuung der Strahlung in den Absorptionslinien hinzu.

Wir wenden uns jetzt noch heißeren Sternen zu. Mit der Erhöhung der Temperatur vergrößert sich die Anzahl der angeregten Atome des neutralen Wasserstoffs kontinuierlich. Wenn diese Zahl mit den negativen Wasserstoffionen[1]) vergleichbar wird, werden beide Ursachen für die Absorption in gleicher Weise wirksam. In der Tat zeigt die Gegenüberstellung der Tabelle 2 und der Abb. 15a, daß in beiden Fällen der atomare Absorptionskoeffizient in den wichtigsten Spektralbereichen von der gleichen Größenordnung (10^{-17} cm^2) ist.

Bei einer weiteren Erhöhung der Temperatur beginnt die Zahl der angeregten Wasserstoffatome, die Zahl der H^--Ionen zu übersteigen, und der neutrale Wasserstoff wird zu dem die Absorption bestimmenden Element. Schon in den Sternphotosphären der Klasse A 0 ist die Absorption der H^--Ionen unbeträchtlich.

Folglich findet in den Photosphären der Sterne der Klassen F und A ein kontinuierlicher Übergang von den H^--Ionen zu den neutralen Wasserstoffatomen statt.

Mit dem Ansteigen der Temperatur verringert sich der Einfluß der Absorptionslinien der Metalle im Ultravioletten. Schon bei den Sternen vom Typ A ist er anscheinend gering.

In den Photosphären der zu den Klassen A 0 bis B 2 gehörenden Sterne ist der neutrale Wasserstoff das vorherrschende absorbierende Element. In den Photosphären der zu denselben Klassen gehörenden Riesensterne beginnt auch die Streuung der Strahlung an freien Elektronen eine merkliche Rolle zu spielen.

---

[1]) Die Zahl der H^--Ionen n_{H^-} ist stets um einige Größenordnungen kleiner als die Gesamtzahl der neutralen H-Atome (in allen Zuständen), weil jene, d.h. n_{H^-}, durch die Anzahl der freien Elektronen eingeschränkt ist.

In den Photosphären der Sterne vom Typ O, B 0 und B 2 kommt zu der Absorption durch die neutralen Wasserstoffatome noch die Absorption durch die Heliumatome hinzu (im fernen ultravioletten Spektralbereich). Außerdem wird in den Photosphären dieser Sterne die Streuung der Strahlung an freien Elektronen ein wichtiger Faktor; da in den Photosphären dieser Sterne der Wasserstoff fast völlig ionisiert ist, sind viele Elektronen und nur wenig neutrale Wasserstoffatome vorhanden. Hier sei daran erinnert, daß die Streuung an Elektronen nicht zu den Prozessen der wahren Absorption gehört und daß man das KIRCHHOFFsche Gesetz (3.10) auf sie nicht anwenden darf.

Aus der Betrachtung der Bedingungen für die Absorption folgt, daß diese Bedingungen im wesentlichen durch den Ionisationsgrad der Atome bestimmt werden. Überdies wird die Ionisation nicht nur durch die Temperatur, sondern auch durch die Größe des Elektronendruckes bestimmt. (Wie aus der SAHA-Formel (5.11) ersichtlich ist, übt die Änderung der Temperatur T einen stärkeren Einfluß auf die Größe x_n aus als eine Änderung des Elektronendruckes p_e.) Im allgemeinen ist auf Grund von (5.11) eine Erhöhung von T einer Verringerung von p_e äquivalent.

Wir wenden uns jetzt der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes für den frequenzabhängigen Absorptionskoeffizienten zu. Die Lösung der vorliegenden Aufgabe, die mit großen mathematischen Schwierigkeiten verbunden ist, wird noch dadurch erschwert, daß bei den verschiedenen Spektralklassen die Absorptionen in den Sternphotosphären auf unterschiedliche Ursachen zurückzuführen sind und $\varkappa_\nu$ auf die verschiedenartigsten Weisen von der Frequenz abhängt. Daher müssen wir die Lösung dieser Aufgabe für jeden einzelnen Fall gesondert durchführen. Hierbei erweist es sich als notwendig, verschiedene vereinfachende Annahmen einzuführen oder die Methode der sukzessiven Approximation zu benutzen.

2. Das Strahlungsgleichgewicht in den Photosphären der Sterne vom Typ A 0–B 2

Wir betrachten das Strahlungsgleichgewicht in den Photosphären der Sterne vom Typ A 0–B 2 (von den Sternen mit anderen Spektraltypen sprechen wir später). In diesem Fall vereinfacht sich die Aufgabe dadurch, daß die Absorption der Strahlung in der Hauptsache durch den neutralen Wasserstoff bewirkt wird (über die Streuung der Strahlung an Elektronen in diesen Photosphären siehe weiter unten).

Die Aufgabe, die wir uns gestellt haben, werden wir mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation[1]) lösen, wobei wir das Verfahren der Mittelung der Intensitäten (über alle Richtungen) benutzen, das wir am Schluß des dritten Paragraphen behandelt haben. (Daß diese Methode für die meisten in der Praxis vorkommenden Fälle völlig ausreicht, haben wir im vierten Paragraphen durch Anführung geeigneter Argumente nachgewiesen.)

---

[1]) Die im folgenden dargelegte Theorie wurde von E. R. MUSTEL entwickelt [7]. (Zusatz des Redakteurs).

Auf Grund von (5.68) können wir für den auf die Atome des Wasserstoffs bezogenen Absorptionskoeffizienten schreiben:

$$\varkappa_\nu = \Phi(p_e, T)\,\Psi(\nu, T)\,, \tag{6.1}$$

mit

$$\Phi(p_e, T) = \frac{C_0 x p_e}{m_{\rm H} T^{\frac{3}{2}}}\,, \tag{6.2}$$

$$\Psi(\nu, T) = \left[\frac{2hR}{kT}\sum_{n_0}^{\infty}\frac{g'}{n^3}e^{\frac{hR}{n^2kT}} + g''\right]\frac{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{\nu^3}\,, \tag{6.3}$$

wobei wir in (5.68) berücksichtigt haben, daß für Wasserstoff $Z = 1$ ist. Beim Übergang von $\varkappa_\nu$ zu k_ν haben wir in Übereinstimmung mit (5.22) die Masse des Wasserstoffatoms mit $m_{\rm H}$ bezeichnet.

Nach (6.1) nimmt der Ausdruck für das Differential der optischen Tiefe die Gestalt

$$d\tau_\nu = \Phi(p_e, T)\,\Psi(\nu, T)\,\varrho\,dh \tag{6.4}$$

an.

Zur Vereinfachung unserer Untersuchungen führen wir die neue Veränderliche ζ durch folgende Substitution ein:

$$d\zeta = \frac{3}{2}\Phi(p_e, T)\,\varrho\,dh\,. \tag{6.5}$$

Dann erhalten wir

$$\frac{3}{2}d\tau_\nu = \Psi(\nu, T)\,d\zeta\,, \tag{6.6}$$

$$\frac{3}{2}\tau_\nu = \int_0^\zeta \Psi(\nu, T)\,d\zeta\,. \tag{6.7}$$

Nach (6.6) und (6.7) schreiben wir die Gleichung (3.55) und die Ausdrücke (3.63) und (3.64) folgendermaßen um:

$$\frac{1}{\Psi(\nu, T)}\frac{dJ_\nu}{d\zeta} = \frac{H_\nu}{2}\,, \tag{6.8}$$

$$I_\nu = e^{\int_0^\zeta \Psi(\nu, T)\,d\zeta'}\int_\zeta^\infty \Delta_\nu e^{-\int_0^{\zeta'} \Psi(\nu, T)\,d\zeta'}\,d\zeta' \tag{6.9}$$

und

$$I'_\nu = e^{-\int_0^\zeta \Psi(\nu, T)\,d\zeta'}\int_0^\zeta \Delta_\nu e^{\int_0^{\zeta'} \Psi(\nu, T)\,d\zeta'}\,d\zeta'\,. \tag{6.10}$$

Auf Grund von (6.3) und (3.11) wird die Funktion

$$\Delta_\nu = B_\nu \Psi(\nu, T) = \frac{2h}{c^2}\left[\frac{2hR}{kT}\sum_{n_0}^{\infty}\frac{g'}{n^3}e^{\frac{hR}{n^2kT}} + g''\right]e^{-\frac{h\nu}{kT}} \tag{6.11}$$

eine vollständig definierte Funktion der Temperatur und der Frequenz.

Um die Integrationsgrenzen von der unabhängigen Integrationsveränderlichen zu unterscheiden, haben wir die letztere mit einem Strich versehen.

Aus den Ausdrücken (6.8)–(6.11) folgt, daß unser Problem darauf hinausläuft, die Abhängigkeit der Temperatur T von ζ zu ermitteln. In dem vorliegenden Fall nimmt die Veränderliche ζ die Stelle der von uns im vierten Paragraphen betrachteten Veränderlichen τ ein.

Berücksichtigen wir die Gleichung

$$\frac{dJ_\nu}{d\zeta} = \frac{dJ_\nu}{dT}\frac{dT}{d\zeta} \tag{6.12}$$

und integrieren wir (6.8) über das gesamte Spektrum, so erhalten wir die für unsere Aufgabe grundlegende Differentialgleichung

$$\frac{dT}{d\zeta} = \frac{H}{2\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Psi(\nu, T)}\frac{dJ_\nu}{dT}d\nu}. \tag{6.13}$$

Da die Ableitung der Funktion J_ν nach der Temperatur unbekannt ist, müssen wir die Gleichung (6.13) nach der Methode der sukzessiven Approximation lösen. Als erste Näherung benutzen wir für die Ableitung $\frac{dJ_\nu}{dT}$ denjenigen Ausdruck, der in hinreichend tiefen Schichten der Sternphotosphäre Gültigkeit besitzt. Wir zeigen nämlich, daß für $\tau_\nu \to \infty$ folgende Gleichung gilt:

$$\frac{dJ_\nu}{dT} = \frac{dB_\nu}{dT}, \tag{6.14}$$

In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, daß die Gleichung $J_\nu = B_\nu$ oder (6.14) erfüllt ist, wenn strenges thermodynamisches Gleichgewicht herrscht, bei dem die Strahlungsintensität nach allen Richtungen konstant ist und durch die PLANCKsche Formel (3.11) bestimmt wird. In diesem Fall folgt $J_\nu = B_\nu$ aus der Formel (3.15). Somit ist der Nachweis der Richtigkeit von (6.14) gleichzeitig der Nachweis dafür, daß in den tiefen Schichten einer Sternphotosphäre mit hinreichend großer Genauigkeit ein strenges thermodynamisches Gleichgewicht vorhanden ist. Zum Beweis von (6.14) dividieren wir die Gleichung (3.50) durch I_ν und gehen für $\tau_\nu \to \infty$ zur Grenze über. Dann erhalten wir

$$\lim_{\tau_\nu \to \infty}\frac{H_\nu}{I_\nu} = 1 - \lim_{\tau_\nu \to \infty}\frac{I'_\nu}{I_\nu}. \tag{6.15}$$

Wir zeigen jetzt, daß die linke Seite von (6.15) für $\tau_\nu \to \infty$ gegen Null strebt. Zu diesem Zweck erinnern wir uns daran, daß der Strom der Gesamtstrahlung πH auf allen Niveaus konstant ist. Da dieser nach (2.6) das Integral von πH_ν über $d\nu$ ist, kann die Größe H_ν für jede beliebige Frequenz nicht unbeschränkt wachsen.[1] Beim Eindringen in die Tiefe der Sternphotosphäre findet nur eine Verschiebung des Stromes in Richtung größerer Frequenzen statt, doch können die Größen πH_ν selbst eine gewisse Schranke nicht übersteigen (siehe Abb. 18 und die zugehörigen Erläuterungen). Da aber für $\tau_\nu \to \infty$ die Temperatur des Mediums kontinuierlich steigt und mit ihr die Intensität I_ν unbeschränkt anwächst, ist der Grenzwert des Quotienten $\frac{H_\nu}{I_\nu}$ gleich Null.

Folglich können wir schreiben:

$$\lim_{\tau_\nu \to \infty} \frac{I_\nu'}{I_\nu} = 1\,. \tag{6.16}$$

Wir betrachten jetzt einen beliebigen Punkt in der Sternphotosphäre mit der optischen Tiefe τ_ν. Von diesem Punkt aus (und nicht von der Grenze der Photosphäre) zählen wir die optische Tiefe nach oben und nach unten.

Dann wird für $t_\nu \geqslant \tau_\nu$ und $t_\nu \leqslant \tau_\nu$

$$t_\nu^* = t_\nu - \tau_\nu\,, \quad t_\nu^* = \tau_\nu - t_\nu\,. \tag{6.17}$$

Mit diesen Bezeichnungen schreiben sich die Gleichungen (3.63) und (3.64)

$$\left.\begin{aligned} I_\nu &= \int\limits_0^\infty B_\nu e^{-\frac{3}{2} t_\nu^*} \frac{3}{2}\, dt_\nu^*\,, \\ I_\nu' &= \int\limits_0^{\tau_\nu \to \infty} B_\nu e^{-\frac{3}{2} t_\nu^*} \frac{3}{2}\, dt_\nu^*\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

Diese Gleichungen ermöglichen es uns (unter Beachtung der im Zusammenhang mit der Formel (4.27) gemachten Bemerkungen), die Größen I_ν und I_ν' als gewichtete Mittel der Größen B_ν anzusehen.

Die Temperatur in dem von uns gewählten Punkt sei T. Dann haben alle höher gelegenen Schichten der Photosphäre eine niedrigere Temperatur als T und die tiefer gelegenen Schichten (d. h. in Richtung zum Sternmittelpunkt) eine höhere Temperatur. Dieselbe Ungleichung gilt auch für die Funktionen B_ν selbst. Dann können wir aber auf Grund unserer eben gemachten Bemerkung über die Intensitäten I_ν und I_ν' für den vorgegebenen Punkt schreiben:

$$I_\nu > B_\nu(T) > I_\nu'. \tag{6.19}$$

[1]) Man muß beachten, daß die Größe πH_ν für alle Frequenzen eine positive Größe ist und daß folglich die Kompensation eines Spektralbereiches mit großem positivem H_ν durch einen anderen Bereich mit ebenfalls großem, jedoch negativem H_ν unmöglich ist.

Auf Grund dieser Ungleichung und auch wegen (6.16) dürfen wir schreiben:

$$\lim_{\tau_\nu \to \infty} \frac{I'_\nu}{B_\nu} = 1, \qquad \lim_{\tau_\nu \to \infty} \frac{I_\nu}{B_\nu} = 1. \tag{6.20}$$

Wir dividieren jetzt (3.51) durch B_ν und gehen für $\tau_\nu \to \infty$ zur Grenze über:

$$\lim_{\tau_\nu \to \infty} \frac{J_\nu}{B_\nu} = \frac{1}{2}\left\{ \lim_{\tau_\nu \to \infty} \frac{I_\nu}{B_\nu} + \lim_{\tau_\nu \to \infty} \frac{I'_\nu}{B_\nu} \right\}. \tag{6.21}$$

Führen wir in (6.21) die Ausdrücke (6.20) ein, so finden wir in der Tat, daß für $\tau_\nu \to \infty$ die Größe J_ν gegen B_ν strebt, und dadurch können wir (6.14) schreiben.

Wenn wir jetzt (6.14) in (6.13) einsetzen, erhalten wir für die erste Näherung die Gleichung

$$\frac{dT}{d\zeta} = \frac{H}{2\,Z(T)}, \tag{6.22}$$

wobei

$$Z(T) = \int_0^\infty \frac{1}{\Psi(\nu,T)} \frac{dB_\nu}{dT}\, d\nu \tag{6.23}$$

eine wohldefinierte Funktion ist, die nur von der Temperatur T abhängt.

Führen wir unter dem Integral in (6.23) die Funktion $\Psi(\nu, T)$ aus (6.3) und die Ableitung von B_ν nach der Temperatur ein, so können wir $Z(T)$ für eine Reihe von T-Werten mit Hilfe numerischer Methoden bestimmen [8].

Nach der Berechnung der Funktion $Z(T)$ können wir die Gleichung (6.22) bei vorgegebenem H, d.h. bei vorgegebenem T_e, integrieren. Weil für $\zeta = 0$ die Temperatur T gleich der Grenztemperatur T_0 ist, ergibt die Integration:

$$\int_{T_0}^{T} Z(T)\, dT = \frac{H}{2}\zeta. \tag{6.24}$$

Die als Integrationskonstante auftretende Temperatur T_0 ist zu bestimmen. Wenn wir eine exakte Lösung der Aufgabe besäßen, würde die erhaltene Temperaturverteilung in allen Tiefen ein und denselben Strom πH, der gleich σT_e^4 ist, ergeben, so daß sich eine Abweichung von σT_e^4 als Maß für den Fehler der erhaltenen Lösung erweist. Daher bestimmen wir die Integrationskonstante so, daß die gefundene Lösung der ersten Näherung (d.h. die Abhängigkeit der Größe T von ζ) an der Grenze, wo $\zeta = 0$ ist, den vorgegebenen Strom σT_e^4 ergibt.

Nach (6.9) ist die Intensität I_ν an der Grenze der Photosphäre gleich

$$(I_\nu)_{\text{gr}} = \int_0^\infty \Delta_\nu(T)\, e^{-\int_0^\zeta \Psi(\nu,T)\, d\zeta}\, d\zeta. \tag{6.25}$$

An der Grenze der Photosphäre, wo $I'_\nu \equiv 0$ ist, erhalten wir mit (3.50) und (6.25)

$$(\pi H)_{\text{gr}} = \pi \int_0^\infty (H_\nu)_{\text{gr}} d\nu = \pi \int_0^\infty (I_\nu)_{\text{gr}} d\nu$$

$$= \pi \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \Delta_\nu(T)\, e^{-\int_0^\zeta \Psi(\nu,\, T)\, d\zeta} d\zeta \right\} d\nu. \qquad (6.26)$$

Wir nehmen an, daß wir irgendeine Oberflächentemperatur T_0 vorgegeben haben. Dann kann man die Temperaturverteilung aus der Gleichung (6.24) ableiten. Kennen wir ferner für jeden Wert von ζ die Größe T, so können wir nach (6.3), (6.11) und (6.25) durch einfache Quadraturen die Größen $(I_\nu)_{\text{gr}}$ für die verschiedenen Frequenzen und dann nach der Formel (6.26) auch den Gesamtstrahlungsstrom $(\pi H)_{\text{gr}}$, den man ebenfalls durch mechanische Quadraturen bestimmen muß, ausrechnen. Somit gehen wir bei der Ermittlung der Größe T_0, die die grundlegende Bedingung

$$(\pi H)_{\text{gr}} = \sigma T_e^4 \qquad (6.27)$$

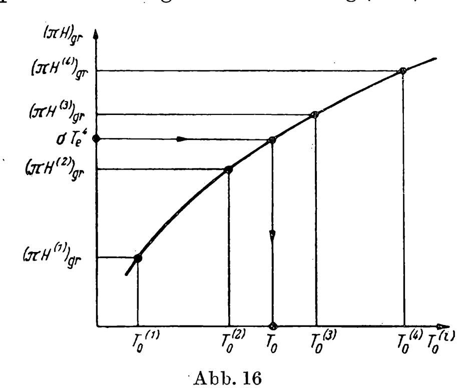


Abb. 16

befriedigen muß, folgendermaßen vor: Wir geben eine Reihe von Werten (3–4 Werte) für T_0 vor. Seien dies die Werte $T_0^{(1)}, T_0^{(2)}, T_0^{(3)}$ und $T_0^{(4)}$, die in der Nähe des erwarteten Wertes liegen; für jeden dieser Werte integrieren wir die Gleichung (6.24). Danach ermitteln wir für jede auf diese Weise gefundene Temperaturverteilung die Größen $(I_\nu)_{\text{gr}}$, und berechnen dann auf Grund von (6.26) die $(\pi H)_{\text{gr}}$, d.h. die den gewählten Werten T_0 entsprechenden Ströme $(\pi H^{(1)})_{\text{gr}}$, $(\pi H^{(2)})_{\text{gr}}$, $(\pi H^{(3)})_{\text{gr}}$ und $(\pi H^{(4)})_{\text{gr}}$. In einer graphischen Darstellung tragen wir auf der Abszissenachse die $T_0^{(i)}$ und auf der Ordinatenachse die ihnen entsprechenden Ströme $(\pi H^{(i)})_{\text{gr}}$ auf ($i = 1, 2, 3, 4$). Die erhaltenen Punkte verbinden wir durch eine interpolierte Kurve und finden sodann in dieser Darstellung die Temperatur T_0, die dem vorgegebenen Strahlungsstrom σT_e^4 entspricht. Sie ist die gesuchte Oberflächentemperatur (Abb. 16). Wenn wir mit Hilfe dieser Temperatur die Gleichung (6.24) von neuem integrieren und – genauso wie früher – die Größen $\pi (I_\nu)_{\text{gr}}$ und $(\pi H)_{\text{gr}}$ ausrechnen, müssen wir für $(\pi H)_{\text{gr}}$ die Größe σT_e^4 erhalten. (Dies dient gleichzeitig als Kontrolle für die Richtigkeit des ermittelten T_0.)

Die Größen $(I_\nu)_{gr}$ für die schließlich erhaltene Temperatur T_0 sind mit der Energieverteilung im Spektrum der gesamten Sternstrahlung identisch. In der Tat ist nach (4.47) die mittlere Intensität der Sternstrahlung gleich $(H_\nu)_{gr}$ und dadurch auf Grund von (3.50) gleich der Größe $(I_\nu)_{gr}$, weil an der Grenze $I'_\nu \equiv 0$ ist. Dabei geht die Rede vorläufig nur um die erste Näherung.

Die von uns in der ersten Näherung erhaltene Temperaturverteilung ergibt auf der Oberfläche des Sternes den vorgegebenen Strahlungsstrom σT_e^4. Eine ausführliche Behandlung des Problems zeigt jedoch, daß πH nicht nur an der Grenze selbst (wo $\zeta \equiv 0$), sondern auch in größeren Tiefen für $\tau_\nu \to \infty$ konstant ist, wenn wir T_0 auf die beschriebene Weise ermitteln. In der Tat ist in Übereinstimmung mit (6.14) der Temperaturgradient für diese τ_ν, die von uns mit Hilfe von (6.22) ermittelt wurden, praktisch genau. Außerdem zeigen unmittelbare Berechnungen und auch physikalische Untersuchungen, daß ein Fehler in der Temperatur der äußeren Schichten auf die Verteilung der Temperatur in den tiefen Schichten nur einen geringen Einfluß hat. Dadurch ist in der ersten Näherung der Strom πH sowohl in den Oberflächenschichten des Sterns als auch in größeren Tiefen konstant und gleich der Größe σT_e^4.

Wenden wir uns jetzt der zweiten Näherung zu. Die bei der ersten Näherung gefundene Temperaturverteilung, d. h. die Funktion $T(\zeta)$, gestattet es, für eine Reihe von Werten für ζ und folglich für T, nach den Formeln (6.9) und (6.10) die Größen I_ν und I'_ν zu bestimmen. Demzufolge können wir für dieselben ζ und T nach der Formel (3.51) die Größen J_ν und aus ihnen zugleich durch numerische Differentiation auch die Größen $\frac{dJ_\nu}{dt}$ berechnen. Somit setzen wir in die Gleichung (6.13) für jedes ζ nicht die Größen $\frac{dB_\nu}{dt}$, sondern die aus der ersten Näherung abgeleiteten genaueren Werte $\frac{dJ_\nu}{dt}$ ein. Die Aufgabe läuft auf die numerische Integration der Gleichung (6.13) hinaus, wobei die Größe $\frac{dJ_\nu}{dt}$ eine Funktion von ζ und die Größe $\Psi(\nu, T)$ eine Funktion der wieder zu ermittelnden Temperaturverteilung ist.

Die Oberflächentemperatur in der zweiten Näherung ist genauso zu ermitteln wie in der ersten Näherung.

Wenn es erforderlich ist, kann man eine dritte Näherung durchführen usw. Konkrete Berechnungen zeigen jedoch, daß schon die erste Näherung völlig zufriedenstellende Resultate, d. h. einen praktisch genauen Strahlungsstrom, in allen Niveaus liefert. Daher kann man sich auf die erste Näherung beschränken.

3. Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen

Nach der dargelegten Theorie wurden für die effektiven Temperaturen $T_e = 10500°$, $15000°$ und $20000°$ numerische Berechnungen in der ersten Näherung durchgeführt [8]. Wir zitieren hier die prinzipiell wichtigsten Resultate. In Abb. 17 sind die auf dem angegebenen Wege berechnete Energie-

verteilung im kontinuierlichen Spektrum eines Sternes mit $T_e = 10500°$ (dicke Linie) und zum Vergleich die PLANCKsche Funktion B_λ für die gleiche Temperatur 10500° (dünne Linie) aufgetragen.

Ein auffallendes Charakteristikum der von den Sternen emittierten Strahlung ist das Auftreten von Sprüngen in der mittleren Intensität $\bar{I}_\lambda$ an den Seriengrenzen. Die Entstehung dieser Sprünge ist leicht zu erklären. Dazu greifen

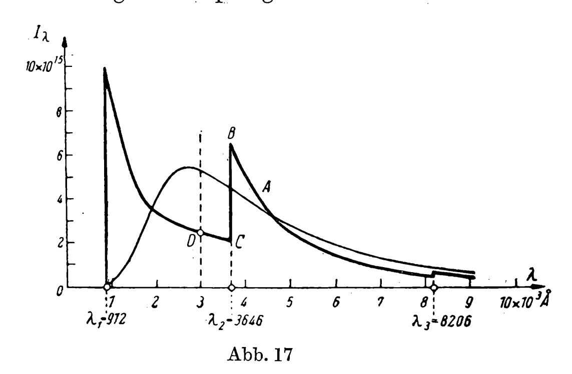


Abb. 17

wir auf die Abb. 12 zurück. Nach dieser Abbildung ist der Absorptionskoeffizient unmittelbar jenseits der Grenze der BALMER-Serie sehr groß. Dies bedeutet, daß wir in dem vorliegenden Spektralbereich eine Strahlung beobachten, die von den obersten Schichten der Sternphotosphäre ausgeht, in denen die Temperatur verhältnismäßig niedrig ist (diese Temperatur liegt in der Nähe der Oberflächentemperatur des Sternes). Folglich ist in Übereinstimmung mit Abb. 17 (Abschnitt CD) die Intensität $\bar{I}_\lambda$ jenseits der Grenze der BALMER-Serie verhältnismäßig gering. In diesem Abschnitt (näher zum Punkte C) liegt die mittlere Strahlungsintensität $\bar{I}_\lambda$ in der Nähe der PLANCKschen Intensität B_λ für die Oberflächentemperatur!

Dagegen ist diesseits der Grenze der BALMER-Serie der Absorptionskoeffizient verhältnismäßig klein. Dies bedeutet, daß hier die Strahlung aus hinreichend tiefen und relativ heißen Schichten der Sternphotosphäre zu uns gelangt. Daher ist auch $\bar{I}_\lambda$ verhältnismäßig groß (Abschnitt AB in Abb. 17).

Ebenso erklären sich die Sprünge an den Grenzen der anderen Serien.

Eine zweite charakteristische Eigenschaft der theoretischen Kurve in Abb. 17 ist, daß sich in gewissen Spektralbereichen die spektralphotometrische Temperatur T_c sehr stark von der effektiven Temperatur unterscheidet und überhaupt mit der Wellenlänge veränderlich ist. So ist im vorliegenden Fall, d. h. für $T_e = 10500°$, die Größe T_c jenseits der Grenze der BALMER-Serie bei $\lambda \approx 3350$ Å von der Größenordnung 11000°, diesseits der Grenze dieser Serie bei $\lambda \approx 4400$ Å ist die Größe $T_c \approx 19000°$, und bei $\lambda \approx 5500$ Å endlich liegt sie in der Nähe von 15000°. Mit anderen Worten, für die Sterne

mit $T_e = 10\,500°$ weicht der Verlauf von $\bar{I}_\lambda$ außerordentlich stark von dem Verlauf einer PLANCKschen Kurve mit $T = T_e$ ab. Dies alles wird durch zwei Faktoren bewirkt: erstens durch die Änderung der Temperatur in der Sternphotosphäre und zweitens durch die Abhängigkeit der Größe $\varkappa_\nu$ von der Frequenz. Wenn z. B. die Temperatur T im Innern der Photosphäre konstant und gleich T_e wäre, so wäre die Funktion B_ν konstant, und es bestünde bei beliebiger Abhängigkeit der Größe $\varkappa_\nu$ von ν gemäß (4.49) die für beliebige Frequenzen gültige Gleichung $\bar{I}_\nu = B_\nu\,(T_e)$. [Wenn man in (4.49) die Größe B_ν vor das Integralzeichen zieht, wird das übrigbleibende Integral gleich Eins.] Ein der in Abb. 17 dargestellten Abhängigkeit analoger Verlauf liegt auch für $T_e = 15\,000°$ und $20\,000°$ vor, nur mit dem Unterschied, daß mit wachsendem T_e der durch die Beziehung

$$D = \lg \frac{I_B}{I_C}, \tag{6.28}$$

[wobei I_B und I_C die Intensitäten in den Punkten B bzw. C sind (siehe Abb. 17)] definierte Sprung sich an der Grenze der BALMER-Serie verringert. Die Tabelle 3 gibt die Größe des Sprunges an.

Tabelle 3

T_e	D	T_0	$T_0^{(g)}$	Spektraltyp
10500°	0,49	8430°	8830°	A 0
15000	0,22	11880	12610	B 5
20000	0,10	16300	16820	B 2

In Abb. 18 ist für einen Stern mit $T_e = 10\,500°$ und für verschiedene ζ der monochromatische Strahlungsstrom H_ν dargestellt. Auf dieser Abbildung tritt die schon mehrfach erwähnte Verschiebung des Stromes H_ν in Richtung größerer Frequenzen beim Eindringen in das Innere der Photosphäre deutlich in Erscheinung. Der Gesamtstrahlungsstrom bleibt hierbei konstant.

Zahlreiche Überlegungen (wir behandeln sie im zweiten Kapitel), die sich zum Teil auf die Resultate der oben angegebenen Berechnungen stützen, führen zu der Schlußfolgerung, daß man den Sternen der Spektralklassen A 0, B 5 und B 2 der Reihe nach die effektiven Temperaturen $T_e = 10\,500°$, $15\,000°$ und $20\,000°$ zuschreiben muß. In diesem Fall zeigen die Beobachtungen eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den theoretischen Kurven, die den Verlauf von $\bar{I}_\lambda$ sowohl im Verhalten der Größe D als auch im Verhalten der Größen T_c für die verschiedenen Spektralbereiche angeben [2, S. 513–514]. Dies spricht dafür, daß unsere zugrunde gelegte Voraussetzung über das Vorhandensein eines Strahlungsgleichgewichtes in den Photosphären der zu den Klassen A 0 bis B 2 gehörigen Sterne im großen und ganzen richtig ist. Gleichzeitig erweist

sich unsere zugrunde gelegte Annahme als richtig, daß in dem vorliegenden Fall die Absorption der Strahlung in der Hauptsache durch den Wasserstoff bestimmt wird.

Abschließend erwähnen wir, daß für die betrachteten Sterne die Oberflächentemperaturen T_0 niedriger sind als im Falle der grauen Materie. Die nach der Formel (4.24) berechneten und mit $T_0^{(g)}$ bezeichneten Oberflächen-

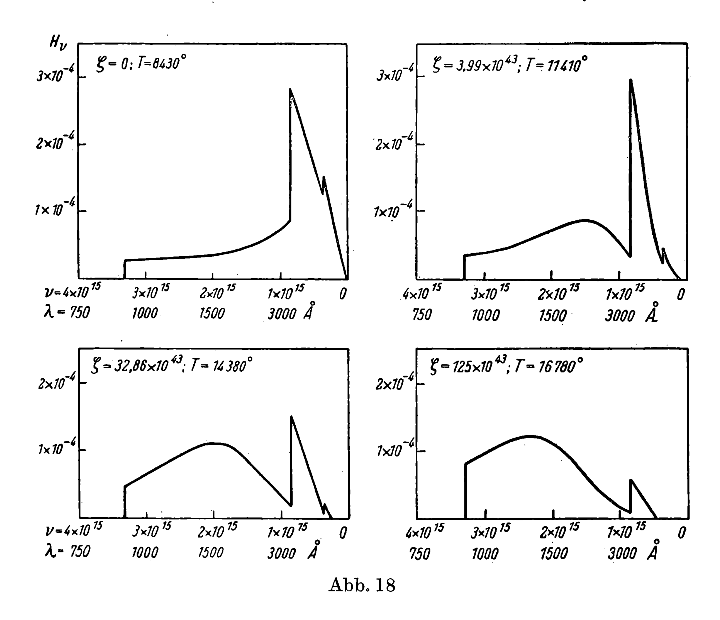


Abb. 18

temperaturen sind in die vorletzte Spalte der Tabelle 3 eingetragen. Das Bestehen der Umgleichung $T_0 < T_0^{(g)}$ ist darauf zurückzuführen, daß die Oberflächentemperatur des Sternes im wesentlichen durch diejenigen Spektralbereiche bestimmt wird, in denen gleichzeitig die Strahlungsintensität und der Absorptionskoeffizient groß sind. Dies sind in unserem Falle die Frequenzen, die unmittelbar jenseits der Grenze der Balmer-Serie liegen. Aus der Abb. 17 entnehmen wir aber, daß für diese Frequenzen (Abschnitt CD) die Ungleichung $\bar{I}_\lambda < B_\lambda(T_e)$ gilt. Dieser Umstand führt auf die Ungleichung $T_0 < T_0^{(g)}$. Überhaupt können die wahren Werte von T_0 noch niedriger sein als die in Tabelle 3 aufgeführten Größen. Tatsächlich haben wir gesehen, daß im Falle der grauen Materie die exakte Berücksichtigung der Änderung der Strahlungsintensität mit der Richtung die Größe T_0 bei gegebenem T_e verkleinert. Das gleiche kann auch für das mit der Frequenz veränderliche $\varkappa_\nu$ zutreffen. Jedoch zeigen zahl-

reiche Überlegungen, die wir hier nicht durchführen wollen, daß in dem vorliegenden Fall (Wasserstoffabsorption) eine exakte Berücksichtigung der Änderung der Intensität $I_\nu(\vartheta)$ mit ϑ das Endresultat weit weniger verändert als im Fall $\varkappa_\nu = \varkappa = \text{const}$.

4. Die Sterne von sonnenähnlichem Spektraltyp

Wir wenden uns jetzt der Behandlung der Sterne anderer Spektralklassen zu. Hierbei müssen wir, wie wir schon erwähnt haben, in jedem einzelnen Fall eine besondere, dem vorliegenden Fall am besten angepaßte Methode ausarbeiten. Eine dieser Methoden, die am bekanntesten ist, beruht auf der Einführung eines gewissen über das Spektrum gemittelten Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu$. Am besten eignet sich dieses Verfahren für den Fall, in dem das Verhältnis von $\varkappa_\nu$ zu dem eingeführten mittleren Absorptionskoeffizienten $\bar{\varkappa}$, d.h. die Größe

$$p_\nu = \frac{\varkappa_\nu}{\bar{\varkappa}}, \tag{6.29}$$

sich nicht sehr stark mit der Frequenz ändert.

Der vorliegende Fall ist in hinreichend guter Näherung in den Photosphären der Sterne vom Sonnentypus verwirklicht, in denen die Absorption der Strahlung in der Hauptsache durch die negativen Ionen des Wasserstoffs hervorgerufen wird und (die effektive Sonnentemperatur beträgt 5710°) die Änderung von $\varkappa_\nu$ in dem Wellenlängenbereich von $\lambda = 3000$–7000 Å im Vergleich zu der Änderung von $\varkappa_\nu$ im Falle der Absorption durch den Wasserstoff (siehe Abb. 12) verhältnismäßig gering ist (siehe Abb. 15).

In den Photosphären der Sterne vom Sonnentypus (und den benachbarten) muß p_ν auch schwach von der Tiefe abhängen. Tatsächlich kann sich bei schwacher Abhängigkeit der Größe $\varkappa_\nu$ von ν für jedes beliebige Verfahren der Mittelung von $\varkappa_\nu$ das Verhältnis von $\varkappa_\nu$ zu $\bar{\varkappa}$ nicht merklich von Eins unterscheiden. Daher kann sich dieses Verhältnis nicht merklich mit der Tiefe ändern.

In ziemlich umfangreichen Untersuchungen zeigte CHANDRASEKHAR, daß man im Falle einer völligen Unabhängigkeit der Größen p_ν von der Tiefe die für die graue Materie abgeleitete Temperaturverteilung, d.h. z.B. die Ausdrücke (4.23) und (4.26), benutzen kann. Die optische Tiefe τ, die in diese Ausdrücke eingeht, muß man durch den mittleren Absorptionskoeffizienten $\bar{\varkappa}$ bestimmen. $\bar{\varkappa}$ wird für jedes vorgegebene Niveau folgendermaßen aus den Größen $\varkappa_\nu$ gewonnen:

$$\bar{\varkappa} = \frac{\int\limits_0^\infty H_\nu^{(1)} \varkappa_\nu \, d_\nu}{H}, \tag{6.30}$$

wobei $\pi H_\nu^{(1)}$ der für dieses Niveau und für den von der Frequenz unabhängigen Absorptionskoeffizienten berechnete Strahlungsstrom ist; die Berechnungen

werden für das vorgegebene $\pi H = \sigma T_e^4$ durchgeführt. Mit anderen Worten, für die Berechnung von $H_\nu^{(1)}$ verwendet man wieder die Lösung (4.23) oder (4.26).

Die Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der austretenden Strahlung findet man im betrachteten Fall auf folgende Weise. Wegen der Konstanz von p_ν können wir für die optische Tiefe schreiben:

$$\tau_\nu = \int \varkappa_\nu \varrho \, dh = \int \varkappa_\nu \frac{\bar{\varkappa}}{\bar{\varkappa}} \varrho \, dh = p_\nu \int \bar{\varkappa} \varrho \, dh = p_\nu \tau . \tag{6.31}$$

Nach (3.38) wird die Intensität der austretenden Strahlung an der Grenze des Sternes

$$I_\nu (\vartheta, 0) = \int_0^\infty B_\nu e^{-p_\nu \tau \sec\vartheta} \sec\vartheta \, p_\nu \, d\tau . \tag{6.32}$$

Die mittlere Intensität der beobachteten Sternstrahlung, die nach (4.47) der Größe H_ν an der Grenze gleich ist, beträgt

$$\bar{I}_\nu = (H_\nu)_{\text{gr}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu (\vartheta, 0) \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= 2 \int_0^\infty B_\nu \, d\tau \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-p_\nu \tau \sec\vartheta} p_\nu \sin\vartheta \, d\vartheta . \tag{6.33}$$

Setzen wir hier $\sec\vartheta = w$, erhalten wir

$$\bar{I}_\nu = 2 \int_0^\infty B_\nu (T) \, E i_2 (p_\nu \tau) \, p_\nu \, d\tau , \tag{6.34}$$

wobei $E i_2 (x)$ ein Spezialfall der Funktion $E i_n (x)$ ist, die durch die allgemeine Beziehung

$$E i_n (x) = \int_1^\infty \frac{e^{-x w}}{w^n} dw = x^{n-1} \int_x^\infty \frac{e^{-u} du}{u^n} \tag{6.35}$$

definiert ist.

Die partielle Integration von (6.35) führt auf folgende Rekursionsformel:

$$(n - 1) E i_n (x) = e^{-x} - x E i_{n-1} (x) , \tag{6.36}$$

die insbesondere

$$E i_2 (x) = e^{-x} - x E i_1 (x) \tag{6.37}$$

ergibt.

$E i_1 (x)$ ist in zahlreichen Tafeln tabuliert (siehe z. B. [6]). Folglich können wir bei bekanntem $p_\nu \tau$ nach Formel (6.37) auch $E i_2 (p_\nu \tau)$ bestimmen.

Somit müssen wir, um nach der Formel (6.34) die Intensität des kontinuierlichen Spektrums zu ermitteln, für eine Reihe von Frequenzen p_ν kennen. Der

Zusammenhang zwischen T und τ wird – wie wir schon erwähnten – durch die Lösungen (4.23) oder (4.26) oder durch die Lösung

$$T^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \tau \right), \tag{6.38}$$

die den Gradienten der Lösung (4.23) und die Beziehung (4.25) zusammenfaßt, angegeben. Die Lösung (6.38) ist genauer als (4.23), doch weniger genau als (4.26).

Die beschriebene Methode wurde von CHANDRASEKHAR und MÜNCH auf die Sonnenstrahlung für $T_e = 5710°$ angewandt. Wenn p_ν, unserer Voraussetzung entsprechend, tatsächlich für die verschiedenen Tiefen konstant wäre, könnte man die Bestimmung von p_ν auf ein beliebiges Niveau beziehen. Doch ist die Voraussetzung über die Konstanz von p_ν selbstverständlich etwas schematisiert, so daß eine gewisse Änderung von p_ν mit der Tiefe tatsächlich auftritt. Daher muß man p_ν für das Niveau bestimmen, das den größten Beitrag zur Bildung des kontinuierlichen Sternspektrums liefert. Dieses Niveau entspricht im allgemeinen den Schichten der Photosphäre, in denen die lokale Temperatur T gleich der effektiven Temperatur T_e ist (τ ist angenähert gleich 0,6). Die Berechnungen, die auf diesen Überlegungen fußen und unter der Voraussetzung durchgeführt worden sind, daß die Haupt- und einzigen Quellen der Absorption in der Sonnenphotosphäre die negativen Wasserstoffionen sind, führen zu folgenden Resultaten: Es ergibt sich, daß man die Theorie und die Beobachtungen in dem hinreichend großen Wellenlängenintervall von $\lambda \approx 4000$ bis 16000 Å in genügende Übereinstimmung bringen kann, wenn man nur das durch (6.30) theoretisch gefundene $\bar{\varkappa}$ um das 1,4fache vergrößert. Dieser letzte Umstand ist zu erwarten; denn er folgt daraus, daß $\bar{\varkappa}$ aus der Mittelbildung von $\varkappa_\nu$ über das Gesamtspektrum bestimmt werden muß. Wir haben aber schon darauf hingewiesen, daß im ultravioletten Bereich des Spektrums jenseits 3000 die Absorption der Sonnenstrahlung durch die Metalle infolge der Photoionisation vom Grundniveau aus eine bedeutende Rolle spielen wird. Dieser Umstand ist in den betrachteten Berechnungen nicht berücksichtigt, da ja vorausgesetzt war, daß nur die negativen Wasserstoffionen an der Absorption beteiligt sind. Die Einführung der Absorption der Metalle muß natürlich $\bar{\varkappa}$ im Vergleich zu $\bar{\varkappa}$ (H^-) vergrößern.

Es gibt noch eine andere Methode (siehe S. 89–90), die auf Grund der beobachteten Abhängigkeit der Größe $I_\nu(\vartheta, 0)$ vom Winkel ϑ die Änderung von $\varkappa_\nu$ mit der Frequenz für die verschiedenen Niveaus in der Photosphäre, d.h. für die verschiedenen lokalen Temperaturen, zu bestimmen gestattet. Auch diese Methode ergibt Kurven für $\varkappa_\nu$, die im Intervall 4000–16000 Å annähernd mit den in Abb. 15 unten dargestellten Kurven zusammenfallen. Also sind die negativen Ionen des Wasserstoffs in dem angegebenen Intervall zweifellos die Hauptquelle der Absorption in der Sonnenatmosphäre. Außerdem zeigt die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung, daß die Anwendung der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes auf die Sonnenphotosphäre in genügendem Maße gerechtfertigt ist. Die Divergenz zwischen Theorie und Beobachtung

jenseits $\lambda = 4000$ Å hängt – wie wir schon erwähnten – offenbar mit der Verdichtung der Absorptionslinie zusammen. Was jedoch den infraroten Bereich mit $\lambda > 16000$ Å anbetrifft, so sind die dortigen Verhältnisse bisher noch nicht geklärt, weil die Messungen der Energieverteilung in diesem Bereich zur Zeit noch mit großer Unsicherheit behaftet sind.

Wenn man sich darauf stützt, daß die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes mit dem Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu(H^-)$ das Sonnenspektrum zufriedenstellend erklärt, kann man annehmen, daß das gleiche für die Sterne gilt, deren Spektraltyp sich nicht stark von dem der Sonne (d G 3) unterscheidet. Jedoch stößt die Anwendung der Theorie bei den Sternen der späten Spektraltypen und auch bei den Sternen der frühen Spektraltypen (im Vergleich zur Sonne) auf verschiedene Schwierigkeiten. Im ersten Fall rühren diese Schwierigkeiten von den Molekülbanden her, die bei dem Spektraltyp K 5 in Erscheinung treten und bei den Typen M, R, N und S hohe Intensitäten erreichen. Eine Theorie, die den Einfluß dieser Banden auf die Temperaturverteilung berücksichtigt, liegt bisher noch nicht vor.

5. Die Sterne der anderen Spektralklassen. Sterne mit ausgedehnten Photosphären

Der oben erwähnte zweite Fall bildet den Übergang von den Sternen vom Sonnentypus zu den Sternen der frühen Spektralklassen F und A. Die Hauptschwierigkeit besteht hier darin, daß in den Photosphären dieser Sterne sowohl die negativen Ionen des Wasserstoffs als auch der neutrale Wasserstoff eine wesentliche Rolle spielen. Daher ist p_ν schon von der Tiefe abhängig. Andererseits ist in dem vorliegenden Fall die Darstellung von $\varkappa_\nu$ durch die Formel (6.1) ebenfalls nicht gerechtfertigt. In Anbetracht all dieser Schwierigkeiten sind hier bisher keinerlei zuverlässige Berechnungen durchgeführt worden.

Abschließend betrachten wir die sehr heißen O- und B-Sterne der frühen Unterklassen. Hier beginnt – worauf wir schon in der Einführung zu dem vorliegenden Paragraphen hingewiesen haben – die Streuung der Strahlung an freien Elektronen eine wichtige Rolle zu spielen. Die Rolle dieses Faktors wächst kontinuierlich mit steigender Temperatur, wie man aus den folgenden Überlegungen erkennen kann. Es mögen in 1 cm³ n Wasserstoffatome enthalten sein. Da diese bei den betrachteten Temperaturen größtenteils ionisiert sind, werden sie wegen ihrer großen prozentualen Häufigkeit zur Hauptquelle der freien Elektronen. Folglich erhalten wir, wenn n_+ die Anzahl der Protonen in 1 cm³ ist:

$$n_e \approx n_+ = x n . \tag{6.39}$$

Bei hinreichend hohen Temperaturen spielen sogar die durch die Ionisation des Heliums entstandenen Elektronen eine gewisse Rolle.

Entsprechend (6.39) und (5.69) finden wir im Falle der Streuung an freien Elektronen:

$$d I_\nu = -I_\nu n_e s_e \, dh = -I_\nu x n m_{\mathrm{H}} \frac{s_e}{m_{\mathrm{H}}} dh = -I_\nu x \frac{s_e}{m_{\mathrm{H}}} \varrho \, dh, \qquad (6.40)$$

wobei m_{H} die Masse des Wasserstoffatoms und ϱ die durch die Wasserstoffatome bestimmte Materiedichte in 1 cm³ ist.

Nach (6.40) ist der auf die Masseneinheit bezogene Streukoeffizient an freien Elektronen gleich

$$s = x \frac{s_e}{m_{\mathrm{H}}}, \qquad (6.41)$$

wobei s_e durch den Ausdruck (5.70) gegeben ist.

Ferner wird in den Atmosphären der betrachteten Sterne die wahre Absorption in dem der Beobachtung zugänglichen Bereich des Spektrums durch den neutralen Wasserstoff bestimmt. Demzufolge können wir für $\varkappa_\nu$ die Ausdrücke (6.1) bis (6.3) benutzen. Mit diesen Ausdrücken und ebenfalls mit (6.41) können wir für α_ν – das Verhältnis des Absorptionskoeffizienten zum Streukoeffizienten –

$$\alpha_\nu = \frac{\varkappa_\nu}{s} = \frac{C_0 p_e}{s_e} \frac{\Psi(\nu, T)}{T^{\frac{3}{2}}} \qquad (6.42)$$

schreiben.

Da auf Grund von (6.3) der zweite Faktor in (6.42) mit steigender Temperatur abnimmt, kann schon bei niedriger Temperatur α_ν für eine gegebene Frequenz und ein gegebenes p_e kleiner als Eins werden, d.h., die Rolle der Streuung an den Elektronen bei der Schwächung der Intensität wird sogar wichtiger als die wahre Absorption (wenn auch natürlich im KIRCHHOFFschen Gesetz nach wie vor $\varkappa_\nu$ auftritt). Außerdem folgt aus (6.42), daß bei Sternen mit derselben effektiven Temperatur die Rolle der Streuung an freien Elektronen um so größer wird, je kleiner das mittlere p_e in ihren Photosphären ist. Mit anderen Worten, die Rolle der Streuung an Elektronen ist in den Photosphären der Überriesen bedeutend größer als in den Photosphären der gewöhnlichen Sterne.

Unmittelbare Berechnungen zeigen, daß die Streuung an freien Elektronen sogar in den Photosphären der Überriesen vom Typ A von Bedeutung werden kann. Dies wird auch durch Beobachtungen bestätigt. Sie zeigen, daß der Sprung an der Grenze der BALMER-Serie, genauer, die Größe D, die nach Formel (6.28) die Größe des Sprunges an der Grenze der BALMER-Serie charakterisiert, in den Spektren der Überriesen vom frühen Spektraltyp kleiner ist als in den Spektren der zu denselben Spektraltypen gehörigen gewöhnlichen Sterne. Dies ist vom Standpunkt der Streuung an freien Elektronen leicht zu erklären. In der Tat verringert jede zusätzliche Quelle der Absorption die Rolle des Wasserstoffs und verkleinert folglich D.

Eine besonders große Rolle spielt die Streuung an freien Elektronen in den Photosphären der Sterne der Klasse O und solcher heißen Sterne wie z.B. der WOLF-RAYET-Sterne. Jedoch gibt es bedauerlicherweise zur Zeit keine ge-

nügend zuverlässige Theorie, die den Einfluß der Streuung an freien Elektronen auf die Temperaturverteilung in den Sternphotosphären der Klassen A, B und O berücksichtigt. Für die WOLF-RAYET-Sterne, die im Kapitel VI behandelt werden, wurden solche Berechnungen zum erstenmal von V. A. AMBARZUMJAN durchgeführt [9].

Bevor wir die Behandlung der Sterne der frühen Spektralklassen abschließen, erwähnen wir noch, daß bei den sehr heißen Sternen, und zwar bei den Sternen der frühen Untergruppen der Klassen B und O, die Absorption der Strahlung im ultravioletten Spektralbereich außer durch Wasserstoff durch das neutrale und ionisierte Helium bewirkt wird.

Am Schluß des vorliegenden Paragraphen können wir feststellen, daß in den Fällen, in denen die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes am weitesten ausgearbeitet ist (Sonne und die Sterne vom Typ A 0 – B 2), ihre Folgerungen bezüglich der Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum und – bei der Sonne – auch in bezug auf das Gesetz der Randverdunkelung befriedigend mit den Beobachtungsergebnissen übereinstimmen. (Die Einführung der negativen Wasserstoffionen ändert das im Falle der grauen Materie erhaltene Gesetz für die Randverdunkelung nicht merklich.) Daher können wir annehmen, daß die Voraussetzungen, die wir der von uns entwickelten Theorie des Strahlungsgleichgewichtes zugrunde gelegt haben, nicht sehr von der Wirklichkeit abweichen, wenn auch natürlich eine ganze Reihe von Fragen und Unstimmigkeiten noch weiterer Forschung bedürfen. Endlich bliebe noch übrig, den Einfluß der Absorptionslinien auf das Strahlungsgleichgewicht zu untersuchen, in deren Frequenzen ein Teil der Photosphärenstrahlung zurückgeworfen wird. Dieses Problem ist außerordentlich kompliziert und ist bis auf den heutigen Tag noch nicht vollständig ausgearbeitet worden. Daher werden wir diese Frage hier nicht behandeln.

Bisher haben wir die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes, angewandt auf Photosphären mit planparallelen Schichten, behandelt. Bei den Photosphären, deren lineare Dicke mit dem Radius des Sterns vergleichbar ist (oder sogar größer als dieser ist), ruft die Anwendung der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes große Schwierigkeiten hervor. Für den Fall der grauen Materie sind die allgemeinen physikalischen Prinzipien einer Theorie des Strahlungsgleichgewichtes für ausgedehnte Photosphären von N. KOSYREW [10, S. 34–40] ausgearbeitet worden. In der ausströmenden (beobachtbaren) Strahlung der Sterne mit ausgedehnten Photosphären spielen verhältnismäßig kalte Schichten mit relativ kleiner optischer Dicke eine wesentliche Rolle (Ausdehnungseffekt). Daher muß die Farbtemperatur der Sterne mit ausgedehnten Photosphären niedrig sein.

In den wirklichen Sternatmosphären hängt der Absorptionskoeffizient jedoch von der Frequenz ab. Daher muß man die Wirkung der Absorption des Wasserstoffs jenseits der Grenze der LYMAN-Serie berücksichtigen. Ferner ist bei den WOLF-RAYET-Sternen die große Rolle der Streuung der Strahlung an Elektronen zu beachten. Außerdem findet man keine genügende Begründung dafür, daß man das KIRCHHOFFsche Gesetz (3.10) auf Photosphären mit großer Ausdehnung anwenden darf.

Einige Probleme der Theorie der ausgedehnten Photosphären werden in Kapitel VI besprochen, das den Sternen gewidmet ist, in deren Spektren helle Linien auftreten.

§ 7. Der Bau der Sternphotosphären

1. Der Bau der Photosphären der Sterne der Klasse A 0 – B 2

Wie wir in der Einleitung zu diesem Kapitel ausgeführt haben, besteht die Hauptaufgabe einer Theorie der Sternphotosphären darin, ein Gesetz für die Änderung der verschiedenen physikalischen Parameter in der Stern- (Sonnen-) photosphäre mit der Tiefe aufzustellen. In den §§ 4 und 6 haben wir uns mit der Frage der Temperaturverteilung beschäftigt. Zugleich ist aber für zahlreiche astrophysikalische Probleme nicht nur die Kenntnis der Temperatur, sondern auch des Druckes, der Dichte usw. in jedem Punkte der Photosphäre erforderlich. Dies ist für die Aufstellung einer quantitativen Theorie der Absorptionslinien in den Sternspektren besonders wichtig. Als unabhängige Veränderliche können wir jetzt die lineare Tiefe in der Sternphotosphäre wählen, die wir von einem beliebigen Niveau aus, z. B. von dem Niveau, bei dem die Temperatur T gleich der effektiven Temperatur T_e ist, nach oben und nach unten zählen.

Ebenso wie bei der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes gibt es hier gegenwärtig keine allgemeine, universelle Methode. In jedem einzelnen Fall muß man die vorgelegte Aufgabe gesondert lösen.

Als einfachstes Beispiel behandeln wir die Photosphäre der Sterne der Klassen A 0 – B 2.

In den Photosphären dieser Sterne wird sowohl die Absorption als auch der gesamte Gasdruck praktisch durch nur ein Element, den Wasserstoff, bestimmt. Eine entsprechende Theorie wurde zum erstenmal von E. R. Mustel und danach von W. S. Berditschewskaja[1]) entwickelt.

Die grundlegende Voraussetzung, von der wir ausgehen, besteht darin, daß auf jedem Niveau der von uns untersuchten statischen Photosphären nicht nur Strahlungsgleichgewicht, sondern auch mechanisches (hydrostatisches) Gleichgewicht herrscht. (Wir merken an, daß diese Voraussetzung nur im Mittel richtig ist, da in den Sternphotosphären lokale Bewegungen der Materie verschiedenen Ursprungs existieren. Hierfür sprechen nicht nur die Untersuchungen an der Sonne [z. B. die Granulation], sondern auch an den Sternen.)

Das mechanische Gleichgewicht der Sternphotosphäre herrscht zwischen den folgenden, gleichzeitig wirkenden und entgegengesetzt gerichteten Kräften:

1. Gravitation (zum Sternzentrum hin),
2. Gas- und Strahlungsdruck (vom Sternzentrum weg).

Um die Gleichgewichtsbedingung abzuleiten, betrachten wir einen Zylinder mit einer Grundfläche von 1 cm^2 und der Höhe dh, die bedeutend kleiner ist als

---

[1]) W. S. Berditschewskaja, Der Bau der Sternphotosphären vom Typ A 0, Astronomisches Journal, **22**, 359, 1945 (В. С. Бердичевская, Строение фотосфер звезд типа A 0. Астрономический журнал **22**, 359, 1945).

die Leneardimensionen der Grundfläche. Die Achse des Zylinders falle mit der Normalen zu den als eben angenommenen Schichten der Photosphäre zusammen. Das Gewicht eines derartigen Zylinders ist gleich $g\varrho dh$, wobei g die Schwerebeschleunigung in dem gegebenen Punkt und ϱ die (aus sämtlichen Atomen bestimmte) Gesamtdichte der Materie auf dem gegebenen Niveau ist. Es sei ferner p der gesamte Gasdruck auf dem gegebenen Niveau und p' der Strahlungsdruck auf demselben Niveau. Dann können wir der Gleichgewichtsbedingung für unseren Zylinder folgende Gestalt geben:

$$dp + dp' = g\varrho dh, \tag{7.1}$$

weil beim Eindringen ins Sterninnere um das Stück dh die Zunahme des Gas- und Strahlungsdruckes um die Größe $d(p + p')$ durch eine entsprechende Vergrößerung des Gewichtes der darüberliegenden Materiesäule (mit der Grundfläche von 1 cm²) um die Größe $g\varrho dh$ kompensiert wird. Hierbei erinnern wir daran, daß bei uns h zum Sternzentrum hin anwächst.

Wir führen einen Ausdruck für dp' ein. Die klassische elektromagnetische Theorie lehrt, daß bei der Absorption der sich in einer gegebenen Richtung ausbreitenden Strahlungsenergie E durch ein Materieteilchen diesem in dieser Richtung der Impuls $\frac{E}{c}$ mitgeteilt wird, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Dies wurde zum erstenmal von dem bedeutenden russischen Physiker P. N. Lebedew im Jahre 1901 experimentell nachgewiesen.

Wenn insbesondere ein Atom aus einem Strahlenbündel ein Quant $h\nu$ absorbiert, so erhält es dadurch in Richtung des Bündels den Impuls $\frac{h\nu}{c}$.

Auf Grund dieser Feststellungen berechnen wir den Strahlungsimpuls, der dem betrachteten Zylinder mit der Grundfläche von 1 cm² und der Höhe dh in Richtung der Normalen zu der Ebene der Schichten mitgeteilt wird, weil die Wirkung der Schwerkraft ebenfalls mit der Normalen (in Richtung zum Sternzentrum) zusammenfällt. Insbesondere existieren in dem von uns betrachteten Fall nicht irgendwelche „seitlichen Spannungen", die vom Strahlungsdruck herrühren; denn wir haben schon erwähnt, daß die Strahlungsintensität in jedem Punkte der Sternphotosphäre nur vom Winkel ϑ und nicht vom Azimut abhängt.

Die Energiemenge, die von unserem Zylinder aus dem Bündel $I_\nu(\vartheta)\,d\omega$ in der Zeit dt und im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ absorbiert wird, ist nach der grundlegenden Definition des zweiten Paragraphen gleich

$$I_\nu(\vartheta)\cos\vartheta\, d\omega\, d\nu\, dt \cdot \varkappa_\nu \varrho\, dh \sec\vartheta, \tag{7.2}$$

wobei $\cos\vartheta$ mit Rücksicht auf die Projektion der Grundfläche mit dem Flächeninhalt Eins [Formel (2.3)] und $\sec\vartheta$ wegen des schrägen Durchtritts des Bündels durch den betrachteten Zylinder [Formel (2.27)] auftreten. Der Impuls, der auf den Zylinder in die Richtung übertragen wird, die mit der Normalen den

Winkel ϑ bildet, ist (die Seitenwände des Zylinders bleiben wegen der Kleinheit von $d h$ unberücksichtigt):

$$\frac{I_\nu(\vartheta)\, d\omega}{c} \varkappa_\nu \varrho\, d\nu\, d h\, d t. \tag{7.3}$$

Der resultierende Impuls in Richtung der Normalen ist gleich dem mit $\cos\vartheta$ multiplizierten Ausdruck (7.3).

Außerdem hat man die Strahlung aus allen Richtungen zu berücksichtigen, d.h. die Integration über $d\omega$ auszuführen. Dies ergibt:

$$\frac{\int I_\nu(\vartheta) \cos\vartheta\, d\omega}{c} \varkappa_\nu \varrho\, d\nu\, d h\, d t = \frac{\pi H_\nu}{c} \varkappa_\nu \varrho\, d\nu\, d h\, d t. \tag{7.4}$$

Um die Kraft zu erhalten, die auf unseren Zylinder wirkt, müssen wir (7.4) durch dt dividieren. Außerdem ist das Resultat über das gesamte Spektrum zu integrieren. Da der am Zylinder angreifende Strahlungsdruck gleich der Differenz des Druckes p' an seiner unteren und oberen Grundfläche ist, erhalten wir

$$d p' = \frac{\pi \int\limits_0^\infty H_\nu \varkappa_\nu\, d\nu}{c} \varrho\, d h. \tag{7.5}$$

Der Ausdruck (7.5) besitzt sehr allgemeinen Charakter. Um die negative Absorption (d.h. die erzwungene Emission) zu berücksichtigen, muß man auf den Absorptionskoeffizienten Formel (5.61) anwenden, d.h., der Koeffizient für die erzwungene Absorption (die dem Koeffizienten B_{ik} entspricht) ist mit $\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$ zu multiplizieren. Hiervon kann man sich durch folgende Überlegungen überzeugen:

Auf die Atome treffe die innerhalb des unendlich kleinen Raumwinkels $d\omega$ verlaufende Strahlung der Intensität $I_\nu(\vartheta)$. Dann wirkt das betrachtete Strahlenbündel folgendermaßen auf die Atome ein: Bei der Absorption der Strahlungsenergie erhalten die Atome den Impuls $\frac{h\nu}{c}$ in Richtung des einfallenden Strahls. Nach jedem Absorptionsprozeß erfolgt (nach einer gewissen Zeit) die spontane Emission des absorbierten Quants, wodurch das Atom einen Rückstoßimpuls $\frac{h\nu}{c}$ in der dem ausgestoßenen Quant entgegengesetzten Richtung erhält. Da aber die Reemission im allgemeinen in jeder beliebigen Richtung erfolgen kann, vernichten sich gegenseitig im Mittel alle diese Rückstoßimpulse, und das Atom erleidet nur einen Strahlungsdruck in Richtung des einfallenden Bündels.

Dagegen wirkt der Prozeß der *erzwungenen Emission* so, daß ein sich innerhalb des Strahls bewegendes Quant $h\nu$ auf ein Atom trifft und dieses zur Emission eines gleichen Quants $h\nu$ in derselben Richtung anregt. Dadurch

emittiert das Atom ein Quant in Richtung des Strahlenbündels und erhält immer einen Rückstoßimpuls in der entgegengesetzten Richtung. Es ist klar, daß dieser Prozeß den Strahlungsdruck des Strahlenbündels auf die Atome verringert.

Quantitativ wird die Rolle der erzwungenen Emission durch das Verhältnis der Anzahl der erzwungenen Emissionsprozesse zur Anzahl der gewöhnlichen (erzwungenen)Absorptionsprozesse bestimmt, wobei das angegebene Verhältnis nicht vom Winkel ϑ abhängig wird, weil in beiden Fällen die Anzahl der Übergänge der Strahlungsdichte proportional ist. Aus diesem Grunde ist der resultierende Impuls, der der Materie durch den Strahlungsdruck mitgeteilt wird, proportional dem Strahlungsstrom πH_ν.

Wir wollen das oben angegebene Verhältnis berechnen. Gemäß (5.47) und (5.50) [wobei an Stelle von ϱ_ν der Ausdruck (5.42) einzusetzen ist] wird dieses Verhältnis gleich

$$\frac{n_{r+1}\beta_\nu v \dfrac{c^3}{8\pi h\nu^3} I_\nu(\vartheta)\dfrac{d\omega}{c}\, dn_e}{n_{r,k}k'_\nu \dfrac{c\,d\nu}{h\nu} I_\nu(\vartheta)\dfrac{d\omega}{c}}. \tag{7.6}$$

Wenn wir die Ausdrücke (5.54), (5.52), (5.11), (5.12), (5.55), (5.49), (5.6) und (5.8) benutzen, finden wir, daß das hingeschriebene Verhältnis gleich $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ ist, d. h., die Verminderung von dp' auf Grund der Berücksichtigung der erzwungenen Emission wird durch den Faktor $1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ bestimmt. Dies war zu zeigen.

Die Anwendung des Ausdruckes (5.7) für die Abschätzung von dp' im Falle der Photosphären der Sterne früher Klassen ist mit großem Aufwand verbunden, weil hierbei der Strahlungsstrom πH_ν für die verschiedenen Tiefen ausgerechnet werden muß. Wie wir jedoch sehen werden, ist die Rolle des Strahlungsdruckes in dem betrachteten Fall sehr klein. Daher begehen wir keinen großen Fehler, wenn wir dp' für den Fall der grauen Materie berechnen und das gefundene Resultat auf die Photosphäre mit einem frequenzabhängigen Absorptionskoeffizienten anwenden.

Für $\varkappa_\nu = \varkappa$ nimmt der Ausdruck (5.7) die Gestalt

$$dp' = \frac{\pi\int\limits_0^\infty H_\nu\, d\nu}{c}\,\varkappa\varrho\, dh = \frac{\pi H}{c}\, d\tau = \frac{\sigma T_e^4}{c}\, d\tau \tag{7.7}$$

an; andererseits erhalten wir durch Differentiation von (4.23)

$$d\tau = \frac{4}{3}\frac{dT^4}{T_e^4}. \tag{7.8}$$

Führen wir (7.8) in (7.7) ein, so finden wir

$$dp' = \frac{1}{3}\frac{4\sigma}{c}\, dT^4 = \frac{1}{3} a\, dT^4, \tag{7.9}$$

wobei $a = \frac{4\sigma}{c}$ die Konstante der Dichte der Gesamtstrahlung ist. Sie beträgt $7{,}569 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{erg} \cdot \mathrm{cm}^{-3} \cdot \mathrm{grad}^{-4}$.

Die Integration von (7.9) liefert

$$p' = \frac{1}{3} a T^4, \tag{7.10}$$

weil bei $T = 0$ auch $p' = 0$ und folglich die Integrationskonstante gleich Null ist. Somit ist im Fall der grauen Materie der Strahlungsdruck in der betrachteten Näherung genauso groß wie im Fall des strengen thermodynamischen Gleichgewichtes.

Kehren wir wieder zur Gleichung (7.1) zurück. Weil in unserem Fall die Absorption der Strahlung durch den Wasserstoff bestimmt wird, dürfen wir sämtliche Ergebnisse benutzen, die wir in dem vorangehenden Paragraphen gewonnen haben. Insbesondere können wir wieder die durch den Ausdruck (6.5) definierte Veränderliche ζ einführen. Dann läßt sich die Gleichung (7.1) wie folgt umschreiben:

$$\left(\frac{dp}{dT} + \frac{dp'}{dT}\right)\frac{dT}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dh} = g\varrho. \tag{7.11}$$

Für die Temperaturverteilung in den betrachteten Sternphotosphären können wir mit hinreichender Genauigkeit die Gleichung (6.22), d.h. die Gleichung der ersten Näherung, verwenden. Für die Oberflächentemperatur ist der Wert T_0 zu nehmen, den man durch die dort dargelegte Methode erhält. (Erfüllung von $\pi H = \sigma T_e^4$ an der Grenze der Photosphäre für den gegebenen Strom.)

Unter Benutzung von (6.22) und (6.5) erhalten wir an Stelle von (7.11)

$$\left(\frac{dp}{dT} + \frac{dp'}{dT}\right)\frac{3\sigma T_e^4}{4\pi Z(T)}\Phi(p_e, T) = g\alpha, \tag{7.12}$$

wobei $\alpha = \frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{H}}}$ und $\varrho_{\mathrm{H}} = m_{\mathrm{H}} \cdot n_{\mathrm{H}}$ ist; n_{H} ist die Anzahl der Wasserstoffatome in 1 cm³. ϱ_{H} geht auch in (6.5) ein. Nach Tabelle 1 können wir annehmen, daß $\alpha \approx 1{,}8$ ist.

Unsere nächste Aufgabe ist es, die Gleichung (7.12) in eine Differentialgleichung für die Größen p_e und T umzuformen, wobei wir p_e als unabhängige Veränderliche nehmen. Folglich müssen wir die in (7.12) eingehenden Größen durch T und p_e ausdrücken.

Wir drücken den Gasdruck p durch T und p_e aus. Hierbei beachten wir, daß infolge der sehr großen prozentualen Häufigkeit des Wasserstoffs dieser praktisch den gesamten Gasdruck bestimmt. Es seien in 1 cm³ n_{H} Wasserstoffatome (neutrale und ionisierte) enthalten. Dann ist der von den Wasserstoffatomen herrührende Partialdruck:

$$p_{\mathrm{H}} = n_{\mathrm{H}} k T. \tag{7.13}$$

Um den gesamten Gasdruck zu erhalten, müssen wir zu p_{H} noch den Partial-

druck der Elektronen p_e hinzufügen:

$$p_e = n_e k T, \tag{7.14}$$

wobei n_e die Anzahl der freien Elektronen in 1 cm³ ist.

Ferner ist für die uns interessierenden Temperaturen und Elektronendrücke (in den Photosphären der Sterne A 0 – B 2) – wie man nach der Formel von SAHA mit dem aus den Beobachtungen bekannten p_e berechnen kann – der Wasserstoff die Hauptquelle für die freien Elektronen. Der Anteil der Elektronen, die durch die Ionisation der Metalle entstehen, ist hier wegen der geringen prozentualen Häufigkeit der Metalle sehr klein. Daher können wir schreiben

$$n_e = x n_{\mathrm{H}}, \tag{7.15}$$

wobei x der Ionisationsgrad des Wasserstoffs ist.

Aus (7.13), (7.14) und (7.15) finden wir

$$p = p_{\mathrm{H}} + p_e = n_{\mathrm{H}} (1 + x) k T \tag{7.16}$$

und auch

$$\frac{p}{p_e} = \frac{1 + x}{x}. \tag{7.17}$$

Außerdem können wir auf Grund von (5.16) und (5.17) für den Wasserstoff

$$\frac{x}{1 - x} p_e = K_0 \tag{7.18}$$

schreiben, wobei

$$K_0 = \frac{u_1}{u_0} \frac{2 (2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} e^{-\frac{\chi_0}{kT}}. \tag{7.19}$$

Da das erste Anregungspotential des Wasserstoffes sehr groß ist (10,16 eV), reduziert sich selbst bei den von uns betrachteten Temperaturen die nach der Formel (5.13) zu berechnende Zustandssumme u_0 auf das erste Glied. Für den neutralen Wasserstoff wird $u_0 = g_{0,1} = 2$, und für den ionisierten Wasserstoff (das Proton) ist $u_1 = 1$.

Folglich können wir (7.19) in

$$K_0 = C T^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\chi_0}{kT}} \tag{7.20}$$

umschreiben, wobei

$$C = \frac{(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{5}{2}}}{h^3} \tag{7.21}$$

ist. Ferner folgt aus den Gleichungen (7.17) und (7.18)

$$p = \frac{p_e^2 + 2 K_0 p_e}{K_0}. \tag{7.22}$$

Durch Differentiation von (7.22) nach T erhalten wir unter Beachtung von (7.20):

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{K_0}\left[2(p_e + K_0)\frac{dp_e}{dT} - \frac{p_e^2}{T}\left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_0}{kT}\right)\right]. \tag{7.23}$$

Ferner bekommen wir, da auf Grund von (7.18)

$$x = \frac{K_0}{p_e + K_0}, \tag{7.24}$$

nach (6.2)

$$\Phi(p_e, T) = \frac{C_0}{m_\mathrm{H}} \frac{K_0 p_e}{T^{\frac{3}{2}}(p_e + K_0)}. \tag{7.25}$$

Benutzen wir jetzt (7.23), (7.9) und (7.25), so erhalten wir aus (7.12):

$$\frac{dT}{dp_e} = \frac{(p_e + K_0)\,p_e}{\alpha g \dfrac{2\pi m_\mathrm{H}}{3 C_0 \sigma T_e^4} T^{\frac{3}{2}} Z(T)(p_e + K_0) + \dfrac{p_e^3}{2}\dfrac{1}{T}\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{\chi_0}{kT}\right) - \dfrac{2}{3} a T^3 p_e K_0}. \tag{7.26}$$

Wir bestimmen die Anfangsbedingungen für die Integration dieser Gleichung. Für die Grenze der Photosphäre, wo $T = T_0$ ist, ist der Druck $p_e \equiv 0$ und $\frac{dT}{dp_e} = 0$.

Die rechte Seite der Gleichung (7.26) ist eine bekannte Funktion der Veränderlichen p_e und T. Die Größe $Z(T)$ gewinnt man aus der Formel (6.23).

Bei der Integration von (7.26) wendet man numerische Methoden an. Als Ergebnis finden wir für vorgegebene Werte von T_e und g die Abhängigkeit der Größe T von p_e.

Den Verlauf der übrigen Größen innerhalb der Photosphäre können wir aus folgenden Überlegungen ermitteln: Mit Hilfe von (7.24) und (7.20) finden wir für jeden Punkt der Photosphäre den Ionisationsgrad x. Dieser ergibt seinerseits nach Formel (7.17) den Druck p in jedem Punkt der Photosphäre. Den Strahlungsdruck p' kann man nach (7.10) berechnen.

Zur Bestimmung der Dichte ϱ multiplizieren wir die rechte Seite der Gleichung (7.16) mit αm_H und dividieren sie gleichzeitig durch diese Größe. Dann erhalten wir mit Rücksicht darauf, daß $\varrho = \alpha n_\mathrm{H} m_\mathrm{H}$ und, nach der kinetischen Gastheorie, $\frac{k}{m} = \frac{R}{\mu}$ ist, die Zustandsgleichung

$$p = \frac{R}{\left(\dfrac{\alpha \mu_\mathrm{H}}{1 + x}\right)} \varrho T, \tag{7.27}$$

aus der folgt, daß sich mit der Ionisation des Wasserstoffs auch das Molekulargewicht verringert. Dies führt zur Vergrößerung des gesamten Gasdruckes.

Wenn wir p, T und x kennen, können wir nach Formel (7.27) für jeden Punkt der Photosphäre auch ϱ berechnen. Jetzt stellen wir für sämtliche gefundenen Größen eine Beziehung mit der linearen Tiefe in der Photosphäre her. Zu diesem Zweck eliminieren wir aus den Gleichungen (6.5) und (6.22) das Differential $d\zeta$ und führen an Stelle der Funktion $\Phi(p_e, T)$ den Ausdruck aus (6.2) ein. Dann erhalten wir

$$dh = \frac{4\pi m_{\mathrm{H}} \alpha Z(T)\, T^{\frac{3}{2}}}{3\sigma T_e^4 C_0 x p_e \varrho} \frac{dT}{dp_e} dp_e. \tag{7.28}$$

Der auf der rechten Seite der Gleichung (7.28) vor dp_e stehende Ausdruck ist eine bekannte Funktion des Druckes p_e, weil wir schon sämtliche in diesen Ausdruck eingehende Größen bestimmt haben [die Ableitung $\frac{dT}{dp_e}$ gewinnt man bei der Lösung der Gleichung (7.26)].

Den Zusammenhang zwischen h und p_e und folglich auch zwischen den übrigen Parametern können wir durch numerische Integration der Gleichung (7.26) herleiten. Als Anfangspunkt der Zählung von h können wir das Niveau annehmen, auf dem die Temperatur T gleich der effektiven Temperatur ist. Von diesem Niveau aus wird die Größe h ins Sterninnere positiv und nach außen negativ gezählt.

2. Besprechung der Ergebnisse der Theorie

In Tabelle 4 geben wir die Ergebnisse der entsprechenden Berechnungen an, die von W. Berditschewskaja für $T_e = 10500°$ und $g = 0{,}55 \cdot 10^4$ cm/sec^2 durchgeführt worden sind. In der letzten Spalte der Tabelle 4 sind für die zugehörigen Niveaus die optischen Dicken angegeben, die nach Formel (6.7) für $\lambda = 4700$ Å berechnet worden sind.

Nach Tabelle 4 können wir uns eine Vorstellung von den Bedingungen machen, die in den Photosphären der Sterne der Klasse A 0 herrschen. Wir sehen, daß die Drücke p in diesen Photosphären sehr klein sind – von der Größenordnung einiger hundert oder tausend bar, während der Gasdruck in unserer Erdatmosphäre auf Meeresniveau von der Größenordnung einer Million bar ist (1 normale [= physikalische] Atmosphäre = 1013246 bar). Das gleiche, nur noch in größerem Maße, trifft für die Dichten in den Photosphären der gewöhnlichen Sterne vom Typ A 0 zu. Sie sind von der Größenordnung 10^{-9} bis 10^{-11} g/cm^3, während die Dichte der Luft bei 0° und dem Druck von 76 cm Quecksilbersäule gleich 0,0013 g/cm^3 beträgt. Derart kleine Dichten und Drücke sind nicht nur für den betrachteten Sterntyp, sondern überhaupt für die Photosphären der meisten Sterne charakteristisch. In vielen Fällen (in den Photosphären der Riesen und Überriesen) ist die Dichte noch um einige Größenordnungen geringer als die angegebenen Zahlen. Andererseits existieren natürlich auch dichtere Photosphären, zu denen z.B. die Photosphären der weißen Zwerge gehören. Für gewöhnlich sind jedoch die Photosphären der überwiegenden Mehrzahl der Sterne stark verdünnte Gasgebilde.

Ein Blick auf die dritte Spalte der Tabelle zeigt, daß beim Eindringen in die Tiefe der Photosphäre der Ionisationsgrad x zunächst abnimmt und dann wieder zu wachsen beginnt. Dies erklärt sich leicht auf folgende Weise: Wie man aus der zweiten Spalte der Tabelle 4 ersieht, geht der Temperaturanstieg in den äußersten Schichten der Photosphäre verhältnismäßig langsam vor sich.

Tabelle 4

p_e [bar]	T°	x	p [bar]	p' [bar]	$\varrho\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]$	h [km]	τ_λ 4700 Å
0	8430	1,000	0	12,86	0		0
5	8432	0,783	11,40	12,88	$1{,}67 \cdot 10^{-11}$	— 4811	—
15	8448	0,556	42,00	12,97	$7{,}03 \cdot 10^{-11}$	— 3210	—
25	8477	0,447	81,00	13,14	$1{,}45 \cdot 10^{-10}$	— 2516	0,005
50	8594	0,350	193,0	13,90	$3{,}66 \cdot 10^{-10}$	— 1662	0,02
100	8890	0,349	386,0	15,91	$7{,}07 \cdot 10^{-10}$	— 991	0,07
150	9185	0,406	519,0	18,13	$8{,}83 \cdot 10^{-10}$	— 686	0,13
200	9467	0,480	616,0	20,46	$9{,}67 \cdot 10^{-10}$	— 491	0,20
300	10024	0,640	768,0	25,72	$1{,}03 \cdot 10^{-9}$	— 210	0,34
400	10607	0,784	912,0	32,25	$1{,}06 \cdot 10^{-9}$	+ 47	0,54
600	11746	0,929	1248,0	48,50	$1{,}21 \cdot 10^{-9}$	+ 611	1,12
780	12555	0,966	1587,3	63,29	$1{,}41 \cdot 10^{-9}$	+ 1102	1,79
1020	13360	0,982	2059,1	81,15	$1{,}71 \cdot 10^{-9}$	+ 1667	2,78

Daher wird in diesen Schichten die Änderung von x durch die Änderung (das Anwachsen) von p_e hervorgerufen, und folglich muß nach (7.24) x abnehmen. Bei einem weiteren Vordringen in die Tiefe der Photosphäre wird jedoch der Einfluß der ansteigenden Temperatur immer größer, die Größe K_0 beginnt schneller zu wachsen als p_e, und der Ionisationsgrad nimmt wieder zu.

Der Vergleich der vierten und der fünften Spalte der Tabelle 4 zeigt, daß p' nur in den äußersten Schichten der Photosphären größer als der Gasdruck ist, in den tieferen Schichten aber vernachlässigbar klein. Aber selbst in den äußersten Schichten der Photosphäre erweist sich sein Einfluß auf den Verlauf der verschiedenen physikalischen Parameter als gänzlich unbedeutend. In der Tat, aus der Gleichung (7.1) folgt, daß das Gleichgewicht in der Photosphäre nicht durch die Drücke p und p' selbst, sondern durch ihre Gradienten bestimmt wird. Aus der Tabelle 4 folgt aber, daß in den äußersten Schichten der Photosphäre grad $p \gg$ grad p' ist. Analoge Ergebnisse erhält man für die Photosphären der meisten Sterne. Folglich können wir in allen diesen Fällen den Strahlungsdruck vernachlässigen. Er kann nur in den ausgedehnten Photosphären eine wesentliche Rolle spielen. Endlich kann in einigen Fällen (bei den sehr heißen Sternen) der selektive Strahlungsdruck, d.h. der Strahlungsdruck in den Spektrallinien, Bedeutung erlangen.

Betrachten wir die siebente Spalte der Tabelle 4. Wir wenden uns den Schichten zu, die in der Hauptsache das kontinuierliche Spektrum der Sterne erzeugen. Dies sind die Bereiche, deren optische Dicken – grob gesprochen – zwischen 0,1 und 1,5 liegen. Aus den Bereichen mit $\tau_\lambda > 1{,}5$ tritt die Strahlung schon merklich geschwächt aus (Wirkung des Faktors $e^{-\tau_\lambda \cdot \sec\vartheta}$). Was die Bereiche mit einem kleinen τ_λ anbetrifft, so ist ihr Beitrag zu der austretenden Strahlung gemäß (3.31) $\Delta\tau_\lambda$ proportional und folglich – wegen der Kleinheit von $\Delta\tau_\lambda$ – gering.

Aus Tabelle 4 folgt, daß die lineare Dicke der betrachteten Schichten von der Größenordnung einiger tausend Kilometer ist. Dagegen ist der Radius eines Sternes vom Typ A 0 mit $g = 0{,}55 \cdot 10^4$ cm/sec^2 gleich 1 bis 2 Millionen Kilometer. Folglich können wir uns an diesem Beispiel davon überzeugen, daß bei den Sternen die Dicke ihrer Photosphäre im Vergleich zu ihrem Radius tatsächlich klein ist.

Wir müssen uns stets vor Augen halten, daß das hier betrachtete Modell einer Photosphäre vom Typ A 0 ein rein theoretisches Modell ist, das unter der Voraussetzung abgeleitet wurde, daß als einzige Quelle für die Absorption nur der neutrale Wasserstoff wirksam ist. Bei Werten von g, die größer sind als der für die Berechnungen benutzte ($5{,}5 \cdot 10^3$ cm/sec^2), wird der mittlere Wert von p_e größer, wobei die negativen Wasserstoffionen eine gewisse Rolle zu spielen beginnen. Es liegen Gründe[1] für die Annahme vor, daß in den Photosphären der Sterne vom Typ A 0 die mittleren Elektronendrücke p_e von der Größenordnung tausend oder sogar einiger tausend bar sind, wenn auch für die endgültige Lösung des Problems noch weitere Untersuchungen erforderlich sind.

3. Anwendung des Gesetzes der Randverdunkelung

Wir haben die Theorie des Aufbaus der Sternatmosphären behandelt, indem wir von der grundlegenden Gleichgewichtsbedingung (7.1), der schon früher gefundenen Temperaturverteilung und anderen zusätzlichen Beziehungen ausgegangen sind. Bei der Sonne können wir über das unmittelbar aus den Beobachtungen abgeleitete Gesetz der Randverdunkelung gewisse Angaben über den Bau ihrer Atmosphäre erhalten. Wir können nämlich den Ausdruck (3.38) als Integralgleichung auffassen, die das Gesetz der Änderung von B_ν mit τ_ν bestimmt, wenn für die gegebene Frequenz das Gesetz der Änderung von $I_\nu(\vartheta, 0)$ mit dem Winkel ϑ bekannt ist. Wenn wir dieses Gesetz durch Beobachtung ermitteln, können wir damit auch das Gesetz der Änderung von B_ν mit τ_ν bestimmen. Dies ist außerordentlich wichtig für die Theorie der Absorptionslinien.

(Das gleiche findet man – mit einer geringeren Genauigkeit – auch bei gewissen Bedeckungsveränderlichen.)

---

[1] W. Buscombe, Spectrophotometry of early A-type stars. Astrophysical Journal **114**, 73, 1951.

In der Praxis geht man gewöhnlich folgendermaßen vor. Wir schreiben die Gleichung (3.38) in folgender Form auf:

$$\varphi_\lambda(\vartheta) = \frac{I_\lambda(\vartheta, 0)}{I_\lambda(0, 0)} = \int_0^\infty \frac{B_\lambda(T)}{I_\lambda(0, 0)} e^{-\tau_\lambda \sec\vartheta} \sec\vartheta \, d\tau_\lambda . \tag{7.29}$$

Die Beobachtungen zeigen, daß man der Funktion $\varphi_\lambda(\vartheta)$ mit hinreichender Genauigkeit die Gestalt

$$\varphi_\lambda(\vartheta) = A_\lambda + C_\lambda \cos\vartheta + D_\lambda \cos^2\vartheta \tag{7.30}$$

geben kann.

Führt man dies in (7.29) ein, so kann man sich leicht überzeugen, daß die Lösung von (7.29)

$$\frac{B_\lambda(T)}{I_\lambda(0, 0)} = A_\lambda + C_\lambda \tau_\lambda + \frac{1}{2} D_\lambda \tau_\lambda^2 \tag{7.31}$$

ist.

Auf diese Weise können wir nach (7.31) den Zusammenhang zwischen B_λ und τ_λ angeben, wenn wir die Koeffizienten A_λ, C_λ und D_λ aus Beobachtungen ermitteln. Außerdem sind wir nach (7.31) in der Lage, für jedes Niveau in der Sonnenphotosphäre (d.h. für jeden Wert von T) den Verlauf von τ_λ mit λ und damit den Verlauf von $\varkappa_\lambda$ mit λ usw. zu untersuchen. Diese Methode für das Studium der Sonnenphotosphäre könnte man als „optische" Methode bezeichnen. Die Bedeutung dieser Methode erkannte als erster P. Parchomenko im Jahre 1934. Von ihm wurde diese Methode, die in den späteren Jahren eine überaus breite Anwendung fand, auch zum erstenmal benutzt. Die Koeffizienten A_λ, C_λ und D_λ wurden aus dem neuesten Beobachtungsmaterial von Canavaggia, Barbier und anderen erhalten.

Es sei hervorgehoben, daß die Genauigkeit in der Bestimmung der Abhängigkeit der Größe B_λ von τ_λ nach der dargestellten Methode sehr stark von der Genauigkeit der Approximation der Funktion $\varphi_\lambda(\vartheta)$ am Rande der Sonnenscheibe abhängt.

§ 8. Die Anwendung der Gesetze des thermodynamischen Gleichgewichts auf die Sternphotosphären

1. Vorläufige Bemerkungen über die Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht in den Sternphotosphären

In den vorangehenden Paragraphen haben wir wiederholt von Gesetzen Gebrauch gemacht, die genau genommen nur im Falle des thermodynamischen Gleichgewichtes richtig sind. Wir zählen die obenerwähnten Gesetze auf:

1. Die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung der Atome und der Elektronen [für Elektronen siehe Formel (5.52)].

2. Die BOLTZMANNsche Formel (5.9), die die Verteilung der Atome auf die einzelnen Quantenzustände angibt.

3. Die SAHAsche Ionisationsformel (5.11).

4. Das KIRCHHOFF-PLANCKsche Gesetz (3.10). Die Anwendung dieser Gesetze auf die Sternphotosphären ist nicht ohne weiteres gerechtfertigt. Daher verlangt dieses Problem eine besondere Behandlung.

Bevor wir jedoch darangehen, die aufgezählten Gesetze im einzelnen zu behandeln, müssen wir darauf eingehen, warum diese Gesetze überhaupt in den Sternphotosphären verletzt werden können. Mit anderen Worten, wir müssen uns darüber klarwerden, wodurch sich die in den Sternphotosphären herrschenden Bedingungen von denen unterscheiden, die für das thermodynamische Gleichgewicht gelten.

Die erste Abweichung von den Bedingungen, durch die das strenge thermodynamische Gleichgewicht gekennzeichnet ist, beruht auf der Existenz eines Temperaturgradienten in den Sternphotosphären. Die Änderung der Temperatur in der Photosphäre führt dazu, daß die Strahlungsintensität von der Richtung abhängt [siehe beispielsweise die Formeln (3.36) und (3.37)]. Dies kann man folgendermaßen erklären: Es sei $I_\nu(\vartheta, \tau_\nu)$ die Intensität der in der vorgegebenen Richtung verlaufenden Strahlung von der Frequenz ν. Dann können wir diese Intensität zahlenmäßig der PLANCKschen Intensität B gleichsetzen und daraus die Temperatur T bestimmen, die natürlich eine Funktion der Tiefe, der Frequenz und – was für uns im Augenblick besonders wichtig ist – der Richtung sein wird; wir bezeichnen sie mit $T(\vartheta, \nu)$:

$$I_\nu(\vartheta, \tau_\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT(\vartheta, \nu)}} - 1}. \tag{8.1}$$

Umgekehrt ergibt die Einführung der Temperatur $T(\vartheta, \nu)$ in die PLANCKsche Funktion quantitativ die Intensität der in der gegebenen Richtung ϑ verlaufenden ν-Strahlung. Die auf diese Weise eingeführte Temperatur $T(\vartheta, \nu)$ kann man *Strahlungstemperatur* (oder Helligkeitstemperatur) nennen. Im folgenden werden wir sie mit T_E bezeichnen.

Im Gegensatz zu den Sternphotosphären ist die Strahlung unter den Bedingungen des thermischen Gleichgewichtes streng isotrop. Mit anderen Worten, die Größe $T(\vartheta, \nu)$ ist nach allen Richtungen konstant.

Der betrachtete Effekt, den wir als geometrischen Effekt bezeichnen können, ist am größten an der Grenze der Photosphäre, wo für $\frac{\pi}{2} < \vartheta \leqslant \pi$ die Intensität $I_\nu(\vartheta, 0) = 0$ ist; daher ist hier $T(\nu, \vartheta) = 0$.

Für die äußersten Teile der Photosphäre (die wir bedingt Umkehrschicht nennen) und auch für die noch weiter außen gelegenen Schichten kann man die Abweichungen von der Gleichgewichtsstrahlung, die durch den geometrischen Effekt bedingt sind, durch die Einführung des Verdünnungsfaktors W berücksichtigen. Wir nehmen an, daß die Intensität der aus dem Stern austretenden kontinuierlichen Strahlung nicht von der Richtung abhängt und

durch die PLANCKsche Formel mit der Temperatur T beschrieben wird. Dann ist (Abb. 19) die Strahlungsdichte in einem beliebigen Punkt, der sich in der Entfernung r vom Sternmittelpunkt befindet, auf Grund von (5.37) gleich

$$\varrho_\nu = \frac{1}{c} \int\limits_{\omega'} B_\nu(T_*)\, d\omega = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T_*) \frac{\omega'}{4\pi}, \tag{8.2}$$

wobei ω' der Raumwinkel ist, unter dem der gegebene Stern vom Punkt A aus erscheint. Aus Abb. 19 folgt, daß das Verhältnis dieses Raumwinkels zum Raumwinkel 4π, das wir auch als Verdünnungsfaktor der Strahlung bezeichnen wollen, gleich

$$W = \frac{\omega'}{4\pi} = \frac{2\pi \int\limits_0^{\vartheta'} \sin\vartheta\, d\vartheta}{4\pi} = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2}\right] \tag{8.3}$$

ist.

Führen wir in (8.2) den Ausdruck für $B_\nu(T_*)$ ein, so erhalten wir

$$\varrho_\nu = W \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT_*}} - 1}. \tag{8.4}$$

Wenn wir (8.4) mit (5.53) vergleichen, sehen wir, daß im vorliegenden Fall die Strahlungsdichte im gegebenen Punkt A gleich der mit dem Verdünnungsfaktor W multiplizierten Dichte der Gleichgewichtsstrahlung bei der Temperatur T_* ist. Aus (8.3) folgt insbesondere, daß in den äußeren Schichten der Photosphäre, wo $R \approx r$, die Größe $W \approx \frac{1}{2}$ ist; dies ist klar, da hier nur von unten eine Strahlung einfällt.

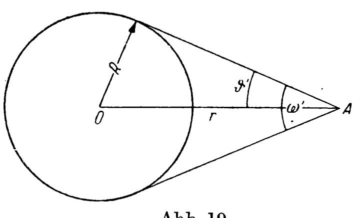


Abb. 19

Somit ist der Faktor W ein Maß für die Abweichung der Strahlungsdichte von der Strahlungsdichte im Gleichgewicht. Im strengen thermodynamischen Gleichgewicht bei der Temperatur T_* kommt im Punkt A von allen Seiten Strahlung an, und der Verdünnungsfaktor ist $W = 1$.

Die zweite Ursache, die zu einer Störung des thermodynamischen Gleichgewichtes in den Sternphotosphären führt, ist der von der PLANCKschen Strahlung abweichende Charakter der Sternstrahlung. In der Tat, sogar für einen vorgegebenen Punkt und eine vorgegebene Richtung kann sich in einigen Fällen der Verlauf der Intensität $I_\nu(\vartheta, \tau_\nu)$ mit der Frequenz stark von der PLANCKschen Kurve unterscheiden. Dies können wir z. B. aus dem Diagramm ablesen, das die aus einem Stern austretende Strahlung darstellt (siehe Abb. 17). Diese Abbildung ist für die über alle Richtungen gemittelte

Strahlung $\bar{I}_\lambda$ angefertigt. Es ist jedoch klar, daß eine analoge Abhängigkeit der Größe I_λ von λ auch für die einzelnen Winkel ϑ gilt. Der von der PLANCK-schen Kurve abweichende Verlauf der Strahlungsintensität mit der Frequenz ist nicht nur für die Begrenzung des Sternes selbst, sondern auch für die tieferen Schichten der Sternphotosphäre charakteristisch. Nur für $\tau_\nu \to \infty$ strebt die Größe $I_\nu(\vartheta)$ für alle Richtungen gegen die PLANCKsche Verteilung [siehe Ausdruck (6.20)].

Die Abweichungen von der PLANCKschen Strahlung kann man auch dadurch charakterisieren, daß die Temperatur $T(\vartheta, \nu)$ in den Sternphotosphären, die durch die Beziehung (8.1) definiert ist, in dem vorgegebenen Punkt auch für eine vorgegebene Richtung von der Frequenz ν abhängt. So ist z. B., wenn wir uns der Abb. 17 zuwenden, $T(\vartheta, \nu)$ – in diesem Fall für die Begrenzung der Photosphäre – diesseits der Grenze der BALMER-Serie (Abschnitt AB) anomal hoch und unmittelbar jenseits dieser Grenze (Abschnitt CD) anomal niedrig.

Ein dritter Faktor, der dem thermodynamischen Gleichgewicht in den Sternphotosphären entgegensteht, ist die Abweichung der *kinetischen Temperatur* T_k von der Strahlungstemperatur. Unter der kinetischen Temperatur wollen wir die Temperatur verstehen, die in die Formel für die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung eingeht. Bei einem idealen Gas fällt diese Temperatur mit der Temperatur zusammen, die in die Zustandsgleichung eingeht:

$$p = nkT. \tag{8.5}$$

Daß die Größe T_k von der Strahlungstemperatur in den Sternphotosphären abweicht, ist schon allein aus dem Grunde selbstverständlich, daß die Strahlungstemperatur in jedem beliebigen Punkt der Photosphäre eine Funktion des Winkels ϑ und der Frequenz ν ist. Folglich kann die Gleichheit zwischen T_k und $T(\vartheta, \nu)$ nur für eine einzige Richtung ϑ und für eine einzige ausgewählte Frequenz ν (bestenfalls für einige) bestehen. Im allgemeinen besteht jedoch diese Gleichheit überhaupt nicht. An dieser Stelle weisen wir auf die neuerdings gemachte Feststellung hin, daß in den Sternhüllen zahlreiche Faktoren, die eine Erhöhung der kinetischen Temperatur hervorrufen, völlig unabhängig vom Strahlungsfeld wirksam sind. So ist z. B. bekannt, daß in der Sonnenkorona die kinetische Temperatur der Elektronen von der Größenordnung Millionen Grad ist, während die Intensität der Sonnenstrahlung verhältnismäßig gering ist.

Schließlich darf man nicht unbeachtet lassen, daß durch die Strahlung in den Frequenzen der Spektrallinien, also der Absorptions- oder in einer Reihe von Fällen der Emissionslinien, eine Anregung der Atome hervorgerufen wird. Im ersten Fall wird hierdurch die Strahlungstemperatur in den angegebenen Frequenzen erniedrigt, im zweiten Fall wird sie erhöht. Zusammenfassend können wir sagen, daß das Strahlungsfeld in den Sternphotosphären äußerst kompliziert ist und sich nicht mit Hilfe eines einzigen Wertes der Strahlungstemperatur beschreiben läßt. Dies alles bewirkt eine Verletzung der für das thermodynamische Gleichgewicht geltenden Bedingungen, bei dem die Temperatur,

die in sämtliche (!) Gesetze der Wärmetheorie, insbesondere in die von uns aufgezählten Gesetze, eingeht, ein und denselben Wert besitzt.

Daher ist die Frage nach der Anwendbarkeit der Gesetze des Strahlungsgleichgewichtes auf die Sternphotosphären von überragender Wichtigkeit.

In diesem Paragraphen werden wir nur drei der eingangs aufgezählten Gesetze betrachten. Der Frage nach der Anwendbarkeit des BOLTZMANNschen Gesetzes können wir uns erst nach der Behandlung der Theorie der Absorptionslinien zuwenden.

2. Die Geschwindigkeitsverteilung der Atome und der Elektronen in den Sternphotosphären

Zunächst betrachten wir die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung. Alle Daten sprechen dafür, daß nicht nur in den verhältnismäßig dichten Photosphären, sondern auch in solchen verdünnten Gebilden wie den planetarischen Nebeln und dem interstellaren Gas die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung mit völlig ausreichender Genauigkeit gegeben ist.

Im allgemeinen sind es zwei Faktoren, die hauptsächlich eine Abweichung von der MAXWELLschen Verteilung bewirken könnten:

1. Das Auftreten elektrischer Felder.

2. Die Abweichung der ionisierenden Strahlung von der durch das Gesetz (5.53) charakterisierten Gleichgewichtsstrahlung.

Wenden wir uns dem ersten Faktor zu. Das Auftreten schwacher elektrischer Felder auf der Sonnenoberfläche ist mit Sicherheit festzustellen. Hierfür spricht insbesondere das Studium der Bewegung der Protuberanzen. Ähnliche Felder werden auch in den Atmosphären der übrigen Sterne auftreten.

Das Studium des Einflusses elektrischer Felder auf die Geschwindigkeitsverteilung in einem Gas ist die Aufgabe eines Spezialgebietes der Physik – der Physik der Gasentladungen. Ein grundlegendes Teilgebiet der Physik der Gasentladungen ist das Studium des Plasmas. Als *Plasma* wird ein hinreichend hoch ionisiertes Gas bezeichnet, welches dadurch gekennzeichnet ist, daß sich in ihm keine merklichen Raumladungen bilden. Diese Eigenschaft des Plasmas erklärt sich daraus, daß ein hinreichend hoch ionisiertes Gas (wegen der Anwesenheit einer großen Zahl von freien Elektronen) eine große Leitfähigkeit besitzt. Das Gas in den Sternphotosphären und, beispielsweise, in der Ionosphäre der Erde ist solch ein Plasma. Allerdings zeigt das Studium der Protuberanzen, daß in diesem Falle offenbar Raumladungen existieren, jedoch sind diese Raumladungen zweifellos klein. Noch geringer ist die positive Ladung der gesamten Sonnenatmosphäre, die durch die thermische Dissipation der sich leicht verflüchtigenden Elektronen hervorgerufen wird. Wenn sich an irgendeiner Stelle eine merkliche Ladung herausbildet, wird diese Ladung wegen der sehr großen Leitfähigkeit des Gases in der Photosphäre schnell verteilt. Daher kann man eine Photosphäre als ein neutrales Gebilde ansehen.

Zahlreiche Laboratoriumsversuche ergaben, daß die Elektronen eines Plasmas in der Regel die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung befolgen; dies

weist auf eine intensive Wechselwirkung (durch Stöße) zwischen den Elektronen eines Plasmas hin. Abweichungen von der MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen in einem Plasma können dann auftreten, wenn die Elektronenkonzentration zu klein ist und folglich nur selten Zusammenstöße zwischen ihnen erfolgen. In den Sternatmosphären, in denen die Ionisation des Gases infolge seiner hohen Temperatur hinreichend groß ist, findet jedoch zwischen den Elektronen ein sehr intensiver Energieaustausch statt. Deshalb hat man allen Grund zu der Annahme, daß der Einfluß von elektrischen Feldern in den Sternphotosphären auf die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen zu vernachlässigen ist.

Wenden wir uns dem zweiten Faktor zu. Abweichungen von der MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen könnte man auch aus dem Grunde erwarten, daß die freien Elektronen in der Hauptsache durch Photoionisation der Atome entstehen (siehe weiter unten) und die Verteilung der ionisierenden Strahlung sich beträchtlich von der des Gleichgewichts (5.53) unterscheiden kann. Dennoch erweist sich auch dieser Faktor als nicht sehr wesentlich. Betrachten wir nun Elektronen, die durch Strahlung von den Atomen abgetrennt worden sind. Wenn diese Elektronen unmittelbar nach der Photoionisation von Ionen eingefangen würden (Rekombinationsprozesse), so würde natürlich die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen in jedem beliebigen Augenblick den Verlauf der ionisierenden Strahlung mit der Frequenz und die Abweichung dieser Strahlung von der Isotropie (bezüglich der Richtungen) widerspiegeln. Folglich könnte man in zahlreichen Fällen (siehe z.B. Abb. 17) recht beträchtliche Abweichungen von der MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung erwarten. Die Dinge liegen jedoch bei weitem nicht so. Elementare Rechnungen zeigen, daß unter den Bedingungen in den Sternatmosphären, in denen infolge der verhältnismäßig hohen Ionisation der Materie eine genügende Anzahl freier Elektronen vorhanden ist, die Wahrscheinlichkeit der Rekombination eines Elektrons mit einem Ion um einige Größenordnungen geringer ist als die Wahrscheinlichkeit des Zusammenstoßes von zwei freien Elektronen. Dies ist auf zwei Ursachen zurückzuführen. Erstens ist der effektive Querschnitt für die Rekombination [die Größe β_ν in Formel (5.48)] sehr klein, auf jeden Fall um einige Größenordnungen kleiner als der effektive Querschnitt für den Zusammenstoß zweier Elektronen. Zweitens sind die Stöße zwischen Elektronen infolge ihrer verhältnismäßig geringen Masse und folglich ihrer verhältnismäßig großen Beweglichkeit viel häufiger als die Stöße zwischen Elektronen und Ionen.

Hieraus folgt, daß ein durch Photoionisation von einem Atom abgespaltenes Elektron sofort zahllose Zusammenstöße mit anderen freien Elektronen erleidet.

Folglich wird die Geschwindigkeitsverteilung, die der Dichte einer ionisierenden Strahlung im Nichtgleichgewicht entspricht, durch die Zusammenstöße vollkommen zerstört und durch eine MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung ersetzt. Hierbei ist klar, daß die angestellten Überlegungen nicht von der Dichte der Materie abhängen, sondern auch auf verdünnte Objekte, wie die planetarischen Nebel und das interstellare Gas, in denen die Ionisation der Atome

ebenfalls eine genügende Anzahl von freien Elektronen hervorbringt, anwendbar sind.

Diese Bemerkungen führen zu dem Ergebnis, daß auch der zweite Faktor, der die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen stören könnte, nämlich die Dichte einer ionisierenden Nichtgleichgewichtsstrahlung, ohne Bedeutung ist.

Die Frage nach der Geschwindigkeitsverteilung der schweren Teilchen (der Atome und Ionen) ist komplizierter, jedoch kann man auch hier entsprechende Schlußfolgerungen ziehen. Infolge des ziemlich intensiven Energieaustausches zwischen diesen Teilchen und den Elektronen muß nämlich auch hier die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung gültig sein. Hierbei sind wegen des geringen Wärmeleitvermögens in den Sternphotosphären die Energieverluste, die den schweren Teilchen durch die Elektronen zugefügt werden, und ebenso die Energien, die die schweren Teilchen durch die Anregungsprozesse verlieren, sehr gering, da die Wirksamkeit dieser Prozesse im allgemeinen klein ist. Dennoch ist es völlig begründet, zu erwarten, daß die kinetische Temperatur der Elektronen und die kinetische Temperatur der schweren Teilchen (d.h. diejenigen Temperaturen, die in die entsprechende Formel der MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung eingehen) gleich sind.

3. Die Photoionisation der Atome

Wir wenden uns jetzt der Behandlung der SAHAschen Formel zu. Bevor wir jedoch ihre Anwendbarkeit auf die Sternphotosphären prüfen, machen wir einige allgemeine Bemerkungen über die Ionisations- und Rekombinationsprozesse, da das Zusammenwirken dieser Prozesse den Ionisationszustand bestimmt.

Für die Ionisation der Atome gibt es zwei Möglichkeiten: A_{ion} – die Ionisation der Atome durch Strahlung (Photoionisation) und B_{ion} – die Ionisation durch Stoß von Atomen mit Elektronen oder anderen Teilchen, z. B. neutralen Atomen oder Ionen.

Allerdings existiert außerdem noch eine dritte Möglichkeit – die Ionisation durch interatomare elektrische Felder, die bei einem nahen Vorübergang geladener Teilchen an Atomen entstehen. Diese Art der Ionisation spielt jedoch nur bei hochangeregten Atomen, deren Anzahl nach der BOLTZMANNschen Verteilung verhältnismäßig gering ist, eine wesentliche Rolle. Daher ist die Wirksamkeit dieses dritten Faktors, der eine Ionisation bewirken könnte, unter den Bedingungen der Sternphotosphären so gering, daß man ihn vernachlässigen kann. Aus diesem Grunde werden wir ihn hier nicht behandeln.

Die den beiden eben erwähnten Ionisationsprozessen entgegengesetzten Prozesse sind in entsprechender Weise die Rekombinationsprozesse: A_{rek} – die Rekombination zweier Teilchen unter Emission eines Quants $h\nu$ und B_{rek} – die Rekombination zweier Teilchen ohne Emission von Strahlungsenergie, aber unter Teilnahme eines dritten Teilchens, an das die überschüssige Energie abgegeben wird. Diesen Rekombinationsprozeß können wir als Dreierstoß zweiter Art auffassen.

Wir vergleichen die Wirksamkeit der beiden Prozesse A_{ion} und B_{ion}. Zu diesem Zweck betrachten wir zuerst das Problem der Photoionisation etwas ausführlicher.

Wir berechnen die Zahl $Z_{\text{ph.ion}}$ der Photoionisationsprozesse, die in 1 sec und in 1 cm³ an Atomen beliebiger Sorte vor sich gehen. Hierbei müssen wir beachten, daß die Photoionisation von jedem beliebigen Niveau aus vor sich gehen kann, so daß wir genau genommen alle Niveaus des Atoms berücksichtigen müssen. Es sei $(k'_\nu)_k$ der atomare Absorptionskoeffizient, der sich auf die Photoionisation des Atoms vom k-ten Niveau aus bezieht. Dann ist nach (5.46) und (3.15) die Anzahl der Photoionisationsprozesse, die von dem betrachteten Niveau ausgehen, gleich

$$\frac{4\pi}{h}\int\limits_{\nu_k}^{\infty} J_\nu \frac{(k'_\nu)_k}{\nu} n_{r,k} d\nu , \tag{8.6}$$

wobei $h\nu_k = \chi_{r,k}$ die Bindungsenergie des gegebenen Niveaus ist, weil nach (5.8) die Ionisation erst bei der Frequenz beginnt, die der Ablösung des Photoelektrons ($v \equiv 0$) entspricht.

Da die Photoionisation von allen Niveaus aus vor sich geht, können wir für die gesuchte Zahl $Z_{\text{ph.ion}}$ schreiben:

$$Z_{\text{ph.ion}} = \frac{4\pi}{h}\sum_k \int\limits_{\nu_k}^{\infty} J_\nu \frac{(k'_\nu)_k}{\nu} n_{r,k} d\nu , \tag{8.7}$$

wobei die Summation über alle möglichen Werte von k auszuführen ist.

Aus (8.7) folgt, daß $Z_{\text{ph.ion}}$ hauptsächlich durch die Spektralbereiche bestimmt wird, in denen das Produkt $J_\nu (k'_\nu)_k n_{r,k}$ groß ist.

Betrachten wir den Fall, bei dem die Abweichung der Größe J_ν von derjenigen im Gleichgewicht besonders groß ist, z. B. die Ionisation der Wasserstoffatome auf den Oberflächen der Sterne vom Typ A 0.

Für die Grenze des Sternes, an der die Intensität der einströmenden Strahlung gleich Null ist, können wir auf Grund von (3.50), (3.51) und auch (4.47) schreiben:

$$(J)_{\text{gr}} = \frac{1}{2}(I_\nu)_{\text{gr}} = \frac{1}{2}\bar{I}_\nu , \tag{8.8}$$

wobei wir $\bar{I}_\nu$ der Abb. 17 entnehmen können, indem wir nach den Formeln (4.36) und (4.38) $\bar{I}_\lambda$ in $\bar{I}_\nu$ überführen. $n_{r,k}$ können wir aus der BOLTZMANNschen Verteilung (5.27) für $T = 8430°$ ermitteln (siehe Tabelle 3), indem wir $n \equiv k$ setzen. $(k'_\nu)_{k=n}$ bestimmen wir aus Formel (5.24). Die Größe $n_{r,1} = n_{0,1}$ interessiert uns nicht; für uns ist nur der relative Verlauf $J_\nu (k'_\nu)_k n_{r,k}$ mit der Frequenz von Wichtigkeit.

Wenn wir die Abb. 17 und die BOLTZMANNsche Formel (5.27) benutzen, setzen wir von vornherein die Gültigkeit der Formeln des thermodynamischen

Gleichgewichtes voraus. Wir brauchen jedoch hieran keinen Anstoß zu nehmen, weil wir die Methode der sukzessiven Approximation benutzen wollen. Außerdem stimmt die von uns betrachtete Theorie des Strahlungsgleichgewichtes in zufriedenstellender Weise mit den Beobachtungen überein, so daß die Anwendung der Formeln des thermodynamischen Gleichgewichtes auf die Sternphotosphären in der ersten Näherung als hinreichend gerechtfertigt gelten kann.

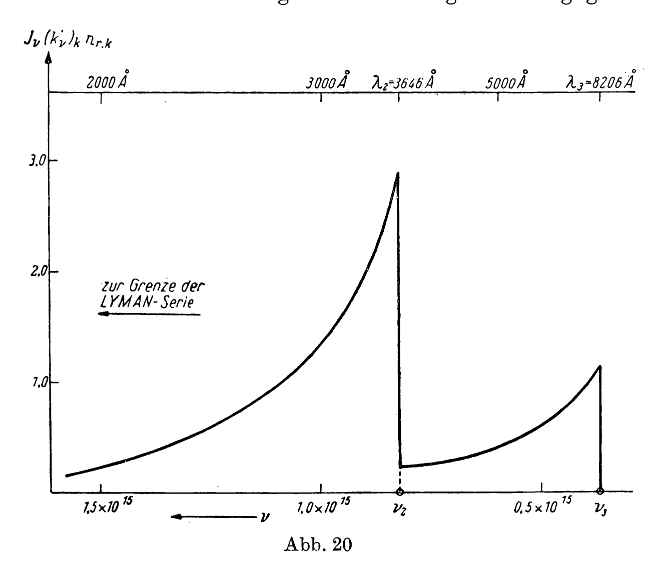


Abb. 20

Die Abhängigkeit der Größe $J_\nu (k'_\nu)_k n_{r,k}$ von der Frequenz ist für den betrachteten Fall in dem Diagramm der Abb. 20 dargestellt. Wir sehen, daß $Z_{\mathrm{ph.ion}}$ in der Hauptsache durch die Spektralbereiche bestimmt wird, in denen das Produkt $(k'_\nu)_k n_{r,k}$, d.h. eigentlich der auf 1 cm³ oder auf die Masseneinheit bezogene Absorptionskoeffizient, groß ist. Dagegen ist der Einfluß der Änderung der Größe J_ν auf $Z_{\mathrm{ph.ion}}$ um vieles geringer; dort, wo $(k'_\nu)_k n_{r,k} J_\nu$ groß ist, sinkt J_ν sogar ab (dies gilt auch für Sterne anderer Spektraltypen).

Andererseits liegt dort, wo $n_{r,k}(k'_\nu)_k$ groß ist, die Strahlungsintensität in dem vorgegebenen Punkt in der Nähe der PLANCKschen Intensität, die der Temperatur in diesem Punkte entspricht. In der Tat haben wir schon wiederholt darauf hingewiesen, daß die Strahlungsintensität in einem beliebigen Punkt $\left(\text{für } \vartheta \geqslant \frac{\pi}{2}\right)$ das gewichtete Mittel aus den B_ν längs einer vorgegebenen Richtung ist. $\left(\text{Für } \vartheta < \frac{\pi}{2} \text{ ist die Behauptung bei großen } \tau_\nu \text{ richtig.}\right)$ Wenn für die Strahlung der vorgegebenen Frequenz die Durchlässigkeit der Materie in der

Photosphäre gering $[n_{r,k}(k'_\nu)_k$ groß] ist, kommt die zu dem betrachteten Punkt gelangende Strahlung aus Gebieten, die in der Umgebung dieses Punktes liegen, d.h., sie ist durch eine Temperatur gekennzeichnet, die sich nur wenig von der Temperatur dieses Punktes unterscheidet. [Vorläufig lassen wir das KIRCHHOFFsche Gesetz (3.10) gelten und verstehen unter der Temperatur des Punktes die in (3.10) eingehende Temperatur.] Auf diese Weise gelangen wir zu einer wichtigen Schlußfolgerung. Die Photoionisation der Atome wird in dem von uns betrachteten Fall in der Hauptsache durch die Strahlungsintensität eines absolut schwarzen Körpers bestimmt, der die in dem vorgegebenen Punkt herrschende Temperatur besitzt.

Die Übertragung dieses Ergebnisses auf andere Fälle erfordert jedoch eine Reihe von Einschränkungen. Erstens bedeutet die Tatsache, daß die Photoionisation in der Hauptsache durch diejenige Strahlungsintensität bestimmt wird, die durch das PLANCKsche Gesetz charakterisiert ist, in das die Temperatur des betrachteten Punktes einzusetzen ist, noch nicht, daß die ionisierende Strahlung eine Gleichgewichtsstrahlung ist. Tatsächlich muß man in den äußeren Schichten noch auf den geometrischen Effekt Rücksicht nehmen, den wir oben behandelt haben. Sowohl an der Grenze des Sternes selbst (wo $I'_\nu \equiv 0$) als auch außerhalb des Sternes kann man diesen Effekt mit Hilfe des Verdünnungsfaktors W berücksichtigen. Weil – wie sich aus unserer obigen Schlußfolgerung ergibt – an der Grenze der Photosphäre die Strahlungsintensität in den für die Ionisation wichtigsten Frequenzen annähernd gleich $B_\nu(T_0)$ ist, wobei T_0 die Oberflächentemperatur ist, d.h. die lokale Temperatur dieses Niveaus, können wir (8.7) näherungsweise wie folgt schreiben:

$$Z_{\text{ph.ion}} \approx \frac{4\pi}{h} W \sum_k \int_{\nu_k}^{\infty} B_\nu(T_0) \frac{(k'_\nu)_k}{\nu} n_{r,k} d\nu . \tag{8.9}$$

Für die Elemente, deren Häufigkeit in der Photosphäre hinreichend groß ist, nähert sich J für ein fest vorgegebenes Niveau schon in nicht besonders großen Tiefen der Photosphäre der Intensität $B_\nu(T)$ im Gleichgewicht. In der Tat zeigen die Rechnungen, daß die Photoionisation der Atome in der Hauptsache durch die Abtrennung eines Elektrons vom Grundniveau aus vor sich geht, da sich die überwiegende Anzahl der Atome im Grundzustand befindet. Aus diesem Grunde ist das Produkt $(k'_\nu)_k n_{r,k(=1)}$ für das Grundniveau stets verhältnismäßig groß. Folglich ist die Durchlässigkeit der Materie für das Grundkontinuum (das durch die Ionisation der Atome vom ersten Niveau aus bestimmt wird) verhältnismäßig groß, und schon in geringer Tiefe ist $\tau_\nu > 1$. Demnach unterscheidet sich nach (6.20) und (6.21) J_ν nicht merklich von B_ν.

Eine Abschätzung von τ_ν können wir auf Grund folgender Überlegungen durchführen: Wir entwickeln die PLANCKsche Funktion $B_\nu(T)$ in eine nach Potenzen der optischen Tiefe fortschreitende Reihe, wobei wir alle Potenzen höher als die erste vernachlässigen:

$$B_\nu(T) = a_\nu + b_\nu t_\nu = B_\nu(T_0) + \left(\frac{dB_\nu}{dt_\nu}\right)_{t_\nu=0} t_\nu . \tag{8.10}$$

Diese Entwicklung kann in vielen Fällen sehr ernste Fehler verursachen. In den Gebieten jedoch, in denen die Absorption groß ist, ist der Ausdruck (8.10) für die Berechnung der Intensitäten genau genug, weil sich hier in dem Bereich der optischen Tiefen, die für die Intensität maßgebend sind, $B_\nu(T)$ verhältnismäßig wenig ändert. Führen wir (8.10) in (3.63) und (3.64) ein, so finden wir für I_ν und I'_ν

$$I_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(\tau_\nu) + \frac{2}{3} b_\nu, \tag{8.11}$$

$$I'_\nu = B_\nu(\tau_\nu) - \frac{2}{3} b_\nu + \left[\frac{2}{3} b_\nu - B_\nu(T_0)\right] e^{-\frac{3}{2}\tau_\nu}, \tag{8.12}$$

und folglich erhalten wir noch mit (3.51) für J_ν

$$J_\nu = \frac{I_\nu + I'_\nu}{2} = B_\nu(T) + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} b_\nu - B_\nu(T_0)\right] e^{-\frac{3}{2}\tau_\nu}. \tag{8.13}$$

Ferner muß für die Schichten der Photosphäre, die in den betrachteten Frequenzen durch eine große Undurchlässigkeit gekennzeichnet sind, die Größe b_ν in jedem Fall kleiner als $B_\nu(T_0)$ sein. Tatsächlich finden wir auf Grund von (8.11) an der Grenze des Sternes

$$I_\nu(0) = B_\nu(T_0) + \frac{2}{3} b_\nu. \tag{8.14}$$

Nun ist aber – wie wir schon gezeigt haben – bei großer Undurchlässigkeit der Schichten $I_\nu(0) \approx B_\nu(T_0)$, was unsere Behauptung beweist. Doch dann folgt aus (8.13), daß schon bei $\tau_\nu = 2$ die Größe J_ν genähert gleich B_ν ist! Quantitative Berechnungen zeigen, daß für die Elemente, deren Häufigkeit in der Photosphäre genügend groß ist, τ_ν diesen Wert (für das Grundkontinuum) schon in den äußersten Schichten der Photosphäre erreicht. Folglich ist fast in der gesamten Photosphäre J_ν für die ionisierende Strahlung genähert gleich $B_\nu(T)$, wobei T die Temperatur des gegebenen Punktes ist.

Die zweite Einschränkung, die wir machen müssen, besteht in folgendem: Die eben gezogenen Schlußfolgerungen beziehen sich auf die häufigsten Elemente in den Sternphotosphären (H, He usw.). Für die übrigen Elemente, deren prozentuale Häufigkeit (bezogen auf Anzahl der Atome) verhältnismäßig gering ist, kann die von ihnen erzeugte optische Tiefe sogar für das Grundkontinuum sehr klein sein. Daher ist für jeden Fall eine zusätzliche Untersuchung erforderlich. Wir weisen jedoch darauf hin, daß die Photoionisation neben ihrer Abhängigkeit von der Häufigkeit des gegebenen Elementes in der Sternphotosphäre durch die Temperatur des gegebenen Punktes bestimmt wird. Betrachten wir z.B. das Spektrum der Sonne. Im ultravioletten Bereich des Sonnenspektrums jenseits $\lambda = 3000$ Å tritt eine Verdichtung und Überdeckung der meisten Grundkontinua, die den Metallen angehören, auf, und folglich ist die Strahlungsintensität in jedem Punkte genähert gleich $B_\nu(T)$, wobei T die Temperatur des gegebenen Punktes ist. Wenn daher das Grundkontinuum eines

beliebigen Elementes, dessen relative Häufigkeit gering ist, in diesen Spektralbereich fällt, gilt auch für diesen Fall $I_\nu \approx B_\nu(T)$.

Schließlich ist zu beachten, daß sich im ultravioletten Spektralbereich sehr kräftige Resonanzlinien (in Absorption) von verschiedenen Elementen häufen. Dies bewirkt eine Abweichung der Größe J_ν von B_ν.

Zusammenfassend können wir aus unserer Darstellung folgende Schlüsse ziehen: Die Photoionisation der Elemente mit einer verhältnismäßig großen relativen Häufigkeit a_s (und in vielen Fällen auch mit kleinem a_s) wird in der Hauptsache durch die Intensität $B_\nu(T)$ bestimmt, wobei T die Temperatur desjenigen Punktes ist, für den $Z_{\text{ph.ion}}$ berechnet ist. Fast in der gesamten Photosphäre können wir für die erwähnten Elemente $J_\nu \approx B_\nu(T)$ annehmen, während man an der Grenze des Sternes die Formel (8.9) mit dem Verdünnungsfaktor $W \approx \frac{1}{2}$ benutzen kann. In den übrigen Fällen (z. B. in den Schichten der Oberfläche, in denen sich der Übergang von der Formel $J_\nu = W B_\nu$ zu der Formel $J_\nu = B_\nu$ vollzieht) muß man auf die allgemeine Grundformel (8.7) zurückgehen, wobei man sich bei der Berechnung von $Z_{\text{ph.ion}}$ in der ersten Näherung auf die Photoionisation vom Grundniveau aus beschränken kann.

4. Die Stoßionisation der Atome. Vergleich mit der Photoionisation. Die Rekombinationsprozesse

Wir wenden uns jetzt der Berechnung der Anzahl der Stoßionisationen (Prozesse B_{ion}) zu und betrachten zunächst die Ionisation der Atome und Ionen durch Elektronen. Wir können die Atome und Ionen im Vergleich zu den Elektronen, die wegen ihrer geringeren Masse eine größere Geschwindigkeit besitzen, als ruhend betrachten. Daher dürfen wir auch hier die Formel (5.48) anwenden. Wenn $q_{r,k}(v)$ der effektive Querschnitt für die durch Elektronen bewirkte Ionisation eines im k-ten Anregungszustand befindlichen r-fach ionisierten Atoms ist und die Geschwindigkeiten der Elektronen zwischen v und $v + dv$ liegen, ist die Anzahl der infolge dieser Zusammenstöße vor sich gehenden Ionisationsprozesse in 1 cm³ und in 1 sec gleich

$$n_{r,k} q_{r,k}(v)\, v\, dn_e\,, \tag{8.15}$$

wobei, wie sich in Übereinstimmung mit der Theorie aus dem Experiment ergibt, der effektive Ionisationsquerschnitt von der Geschwindigkeit v des ankommenden Elektrons abhängt. Für dn_e können wir auf Grund unserer Erörterungen am Anfang dieses Paragraphen eine MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung (5.52) annehmen.

Da die Ionisation eines Atoms vom k-ten Niveau aus durch alle die Elektronen bewirkt werden kann, deren kinetische Energie größer oder gleich der Bindungsenergie $\chi_{r,k}$ ist, ist die Gesamtzahl der Stoßionisationen vom k-ten Niveau aus gleich

$$n_{r,k} n_e 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_{v_k}^{\infty} q_{r,k}(v)\, v^3 e^{-\frac{m_e v^2}{2kT}} dv\,. \tag{8.16}$$

v_k ist entsprechend unserer Überlegung durch die Beziehung

$$\chi_{r,k} = \frac{1}{2} m_e v_k^2 \tag{8.17}$$

festgelegt.

Da die Ionisation der Atome von einem beliebigen Niveau aus vor sich gehen kann, ist die Gesamtzahl der durch Zusammenstöße mit Elektronen hervorgerufenen Ionisationsprozesse gleich

$$Z_{\text{st. ion}} = n_e 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_k n_{r,k} \int_{v_k}^{\infty} q_{r,k}(v)\, v^3 e^{-\frac{m_e v^2}{2kT}} dv. \tag{8.18}$$

Um $Z_{\text{ph.ion}}$ mit $Z_{\text{st. ion}}$ vergleichen zu können, müssen wir $q_{r,k}(v)$ bestimmen. Hierbei weisen wir darauf hin, daß die mittleren thermischen Geschwindigkeiten der Elektronen in den Sternphotosphären verhältnismäßig klein sind. Auch die

Tabelle 5

T°	$v_t \left[\frac{\text{km}}{\text{sec}}\right]$	V_0 [eV]	T°	$v_t \left[\frac{\text{km}}{\text{sec}}\right]$	V_0 [eV]
3000	369	0,39	20000	953	2,59
5000	477	0,65	30000	1168	3,88
7000	564	0,90	50000	1508	6,47
10000	674	1,29	75000	1847	9,70
15000	826	1,94	100000	2132	12,93

ihnen entsprechenden Energien sind verhältnismäßig klein. In Tabelle 5 führen wir für eine Reihe von Temperaturen die quadratisch gemittelten Geschwindigkeiten v_t und die in Elektronenvolt ausgedrückten Energien der Elektronen an.

Die Umrechnungen wurden nach der unmittelbar ersichtlichen Formel

$$\frac{1}{2} m_e v_t^2 = \frac{3}{2} k T = \frac{V_0 e}{300} \tag{8.19}$$

vorgenommen, in der V_0 in Elektronenvolt ausgedrückt ist. Aus dieser Tabelle folgt, daß die mittlere Energie der Elektronen einige Elektronenvolt beträgt. In Wirklichkeit sind an der Ionisation der meisten Atome Elektronen mit Geschwindigkeiten $v > v_k$ beteiligt. Jedoch ist die Anzahl der Elektronen, deren Energien in der Größenordnung von zehn Volt liegen, so gering, daß ihr Einfluß verschwindend klein ist. Daher haben wir es bei der Stoßionisation hauptsächlich mit langsamen Elektronen zu tun. Bedauerlicherweise sind die Angaben über die Größen $q_{r,k}(v)$ für diesen Fall sehr dürftig. Sie sind für den

Wasserstoff und auch praktisch für alle übrigen wichtigen chemischen Elemente der Sternphotosphären unbekannt. In Abb. 21 zeigen wir den Querschnitt $q_{0,1}(v)$ für die Ionisation des neutralen Heliums vom Grundniveau aus (auf der Abbildung mit $q(v)$ bezeichnet). Als Einheit für $q_{0,1}(v)$ ist πa_0^2 genommen worden, wobei a_0 der Radius der ersten BOHRschen Bahn des Wasserstoffatoms ist; $a_0 = 0{,}528 \cdot 10^{-8}$ cm. Auf der Abszissenachse ist die Energie des ionisierenden Elektrons in Elektronenvolt aufgetragen.

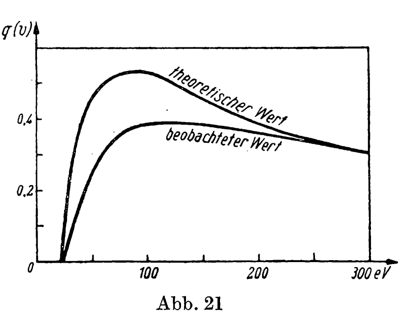


Abb. 21

In den meisten Fällen kann man $q_{r,k}(v)$ als von der Geschwindigkeit unabhängig ansehen und für diese Größe einen gewissen Mittelwert $\bar{q}_{r,k}$ einführen. Auf Grund vorliegender Daten kann man annehmen, daß sich die Größen $\bar{q}_{r,k}$ für die verschiedenen Elemente und die verschiedenen Ionisations- und Anregungszustände zwischen 10^{-17} und 10^{-16} cm² bewegen. Wenn wir in (8.16) an Stelle von $q_{r,k}(v)$ den Mittelwert $\bar{q}_{r,k}$ einführen, die Substitution

$$\frac{m_e v^2}{2kT} = x \tag{8.20}$$

durchführen und die elementare Integration ausführen, erhalten wir für die Gesamtzahl der Ionisationen durch Elektronenstoß vom k-ten Niveau aus die Formel

$$n_{r,k}\, n_e\, \bar{q}_{r,k} \left(\frac{8kT}{\pi m_e}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\chi_{r,k}}{kT}\right) e^{-\frac{\chi_{r,k}}{kT}}. \tag{8.21}$$

Hierbei müssen wir ganz allgemein daran erinnern, daß die hier eingehende Temperatur die kinetische Temperatur der freien Elektronen ist, die wir, wo es erforderlich ist, durch den Index ε kennzeichnen werden.

Wir wenden uns jetzt der Ionisation der Atome und Ionen durch Stöße mit schweren Teilchen zu, d.h. durch Stöße mit Atomen und Ionen. Aus den vorliegenden experimentellen Untersuchungen und der Theorie ergibt sich, daß die Ionisation der Atome und Ionen durch schwere Teilchen weit geringer ist als die Ionisation durch Elektronen.

Die Rolle der Stoßionisation durch schwere Teilchen kann im Vergleich zu der Ionisation durch die Elektronen nur in dem Fall von Bedeutung werden, daß die Anzahl der freien Elektronen in 1 cm³ um einige Größenordnungen geringer ist als die Gesamtzahl der schweren Teilchen in demselben Volumen. Es ist möglich, daß dieser Fall in den Atmosphären der kühleren Sterne verwirklicht wird, in denen n_e beträchtlich kleiner ist als die Zahl der neutralen

Wasserstoffatome in 1 cm³. Zur Zeit verfügen wir jedoch nicht über die erforderlichen Angaben; die effektiven Querschnitte für beide Komponenten sind unbekannt.

Die Stoßionisation ist in den weitaus meisten Fällen von geringerer Bedeutung als die durch Strahlung bewirkte Ionisation. Um dies zu beweisen, betrachten wir als Beispiel die Ionisation des Wasserstoffs in den Photosphären der Sterne vom Typ A 0 auf dem Niveau, wo $T \approx 10000°$ ist. Aus den angeführten Gründen können wir uns auf das Studium der Ionisation vom Grundniveau aus beschränken. Für den Absorptionskoeffizienten können wir, indem wir die Abhängigkeit der Größe g' von der Frequenz vernachlässigen, den Ausdruck (5.24) benutzen, den wir folgendermaßen schreiben:

$$(k'_\nu)_1 = k_1 \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3, \tag{8.22}$$

wobei ν_1 die Grenzfrequenz der Lyman-Serie ist, so daß $h\nu_1 = \chi_0 \cdot k_1$ ist gleich $6{,}3 \cdot 10^{-18}$ cm². Da ferner in der Tiefe, in der $T \approx 10000°$ ist, die optische Tiefe unmittelbar jenseits der Seriengrenze beträchtlich größer als Eins ist, können wir in (8.6) mit großer Genauigkeit $J_\nu = B_\nu\ (10000°)$ setzen. Auf diese Weise ist das Verhältnis der Zahl der Ionisationsprozesse durch Elektronenstoß zu der Zahl der Photoionisationsprozesse (in 1 cm³) nach (8.6) und (8.21) gleich

$$\alpha = \frac{n_{0,1}\, n_e\, \bar{q}_{0,1} \left(\dfrac{8kT_\varepsilon}{\pi m_e}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \dfrac{\chi_0}{kT_\varepsilon}\right) e^{-\frac{\chi_0}{kT_\varepsilon}}}{\dfrac{4\pi}{h} \displaystyle\int_{\nu_1}^{\infty} B_\nu \frac{(k'_\nu)_1}{\nu}\, n_{0,1}\, d\nu}, \tag{8.23}$$

wobei wir besonders angemerkt haben, daß der Zähler eine Funktion der Elektronentemperatur auf dem gegebenen Niveau ist. Da ferner für alle $\nu \geqslant \nu_1$ bei den betrachteten Temperaturen $e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$ ist, können wir im Nenner der Planckschen Funktion (3.11) die Eins vernachlässigen. Führen wir (3.11) und (8.22) in (8.23) ein und benutzen wir (6.35) und (5.12), so erhalten wir

$$\alpha = \frac{\bar{q}_{0,1} \left(\dfrac{8}{\pi m_e k T_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \dfrac{\chi_0}{kT_\varepsilon}\right) e^{-\frac{\chi_0}{kT_\varepsilon}}}{\dfrac{8\pi k_1 \nu_1^3}{c^2}\, Ei_1\left(\dfrac{\chi_0}{kT}\right)}\, p_e. \tag{8.24}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Temperatur T gleich der Elektronentemperatur T_ε ist (siehe weiter unten) nehmen wir für sie den Wert 10000° an. Für $\bar{q}_{0,1}$ setzen wir den Wert 10^{-17} cm² und für p_e aus Tabelle 4 den Wert 300 bar.

Mit diesen zugrunde gelegten Daten wird $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-3}$. Somit spielt die Ionisation durch Elektronenstoß gegenüber der Photoionisation eine verschwindend kleine Rolle. Der Einfluß der schweren Teilchen – im wesentlichen Wasserstoffatome – ist in dem vorliegenden Fall ebenfalls gering. Tatsächlich spricht der in der Tabelle angegebene Wert von x dafür, daß hier n_e mit n_{H} – der Gesamtzahl der Wasserstoffatome in 1 cm³ – vergleichbar wird. Andererseits haben wir auch schon darauf hingewiesen, daß die Ionisation durch schwere Teilchen um einige Größenordnungen geringer ist als die Ionisation durch Elektronen, d.h., für schwere Teilchen ist α noch kleiner als die angegebene Zahl.

Für die Ionisation des Wasserstoffs in der Sonnenphotosphäre auf dem Niveau, wo $T = T_\varepsilon = 5700°$ und p_ε von der Größenordnung 30 bar ist (siehe Kapitel III), wird α nach Formel (8.24) gleich 10^{-4}. Hier ist n_e tatsächlich etwa um drei Größenordnungen kleiner als n_{H}. Man kann letztere jedoch im Hinblick auf die Geringfügigkeit der Ionisation durch schwere Teilchen auch in dem vorliegenden Fall völlig vernachlässigen.

Analoge Berechnungen führen auch bei den anderen Elementen auf ähnliche Resultate. Im allgemeinen ist in den gewöhnlichen Sternphotosphären die Stoßionisation im Vergleich zur Photoionisation in den meisten Fällen vernachlässigbar klein. Die physikalische Ursache für diese Tatsache ist die verhältnismäßig geringe Dichte der Materie, aus der sich die Sternphotosphären zusammensetzen. Daher ist es durchaus möglich, daß in einigen Fällen, z.B. in den dichten Photosphären der weißen Zwerge, α größer als Eins ist. Im Augenblick ist jedoch diese Frage quantitativ noch nicht völlig geklärt.

Abschließend weisen wir darauf hin, daß in den äußeren Hüllen der Sterne, z.B. in den äußeren Schichten der Sonnenchromosphäre und in der Sonnenkorona, die Größe T_ε in der Formel (8.24) bedeutend größer als T sein kann. Wie man mit Hilfe der Formel (8.24) leicht nachrechnet, führt dies auf die Ungleichung $\alpha \gg 1$. Im dritten Kapitel werden wir einige Spezialfälle behandeln.

Wir gehen jetzt zu der Behandlung der Rekombinationsprozesse A_{rek} und B_{rek} über, d.h. der Rekombination unter Emission von Quanten und der Rekombination im Dreierstoß. Die Rekombinationswahrscheinlichkeit für den Fall A_{rek} haben wir schon ausgerechnet. Sie wird durch die Formel (5.50) angegeben, wobei β_ν durch die Formel (5.55) mit dem Absorptionskoeffizienten k'_ν verknüpft ist.

Die Anzahl der Rekombinationen auf die k-te Bahn, die in 1 sec in 1 cm³ zwischen Elektronen und $(r + 1)$-fach ionisierten Atomen vor sich gehen, ist nach (5.50) und (5.52) gleich

$$n_e n_{r+1} 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty (\beta_\nu)_k \left(1 + \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \varrho_\nu\right) e^{-\frac{m_e v^2}{2kT}} v^3 dv, \tag{8.25}$$

da alle Elektronen mit beliebigen Geschwindigkeiten zwischen 0 und ∞ rekombinieren können. An $(\beta_\nu)_k$ haben wir speziell den Index „k“ angefügt, um kenntlich zu machen, daß sich ein Elektroneneinfang auf das k-te Niveau ereignet. Die

Gesamtzahl der Photorekombinationen auf alle Niveaus ist gleich

$$Z_{\text{ph. rek}} = n_e n_{r+1} 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_k \int_0^\infty (\beta_\nu)_k \left(1 + \frac{c^3}{8\pi h \nu^3}\,\varrho_\nu\right) e^{-\frac{m_e v^2}{2kT}} v^3 dv. \quad (8.26)$$

Wir betrachten nun die Rekombinationsprozesse, die als Dreierstöße vor sich gehen. Weil hier die Rekombinationswahrscheinlichkeit durch das gleichzeitige Zusammenwirken dreier Teilchen bestimmt wird, wird im allgemeinen mit Rücksicht darauf, daß das dritte Teilchen ein Elektron oder ein Wasserstoffatom ist, die Größe $Z_{\text{st. rek}}$ proportional $n_e^2 n_{r+1}$ oder auch $n_e n_{\mathrm{H}} n_{r+1}$ sein. Die Rolle der Metallatome als dritte Teilchen ist unbedeutend insofern, als ihre Anzahl überhaupt gering ist. Das Verhältnis $Z_{\text{st. rek}} : Z_{\text{ph. rek}}$ ist jedoch in allen Fällen der Teilchenzahl in 1 cm³ proportional. Da aber diese Zahl klein ist (geringe Dichten der Materie in den Photosphären), ist auch das angegebene Verhältnis um einige Größenordnungen kleiner als Eins. Im Gegensatz zu den Ionisationsprozessen nimmt das angegebene Verhältnis bei einer Vergrößerung des Quotienten $\frac{T_\varepsilon}{T}$ nicht merklich zu, weil die Wahrscheinlichkeit eines Dreierstoßes sehr langsam mit T_ε anwächst und sich bei genügend großem T_ε sogar mit anwachsendem T_ε verringert. Dies bedeutet, daß wir unter den Bedingungen der Sternphotosphären und sogar der Sonnenkorona, wo der Quotient T_ε/T von der Größenordnung 200 ist, die Rekombinationen im Dreierstoß im allgemeinen vernachlässigen können.

5. Die Ionisationsgleichung. Die Elektronentemperatur

Aus unseren Darlegungen folgt, daß die vorherrschenden Prozesse, die den Ionisationszustand in den Sternphotosphären bestimmen, die folgenden sind:

a) die Photoionisation,

b) die Rekombination unter Emission von Quanten (Photorekombination).

Um eine Gleichung aufzustellen, die den Ionisationszustand in den Sternphotosphären beschreibt, muß man die Größen $Z_{\text{ph. rek}}$ und $Z_{\text{ph. ion}}$ aus den Formeln (8.26) und (8.7) gleichsetzen. Dies ergibt

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{\sum\limits_k \int\limits_{\nu_k}^\infty J_\nu \frac{(k'_\nu)_k}{\nu} \frac{n_{r,k}}{n_r} d\nu}{h \left(\frac{m_e}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} \sum\limits_k \int\limits_0^\infty (\beta_\nu)_k \left(1 + \frac{c^3}{8\pi h \nu^3}\,\varrho_\nu\right) e^{-\frac{m_e v^2}{2kT}} v^3 dv}. \quad (8.27)$$

Für den Quotienten $n_{r,k}/n_r$ können wir Formel (5.54) benutzen. Die Frage nach möglichen Abweichungen von der BOLTZMANNschen Verteilung wird im folgenden Kapitel behandelt.

Die erste Frage, die sich bei der Anwendung des Ausdruckes (8.27) erhebt, ist die Frage nach der kinetischen Temperatur, die in den Nenner dieses Ausdruckes eingeht. Wir weisen jedoch gleich darauf hin, daß der nach Formel (8.27) berechnete Ionisationsgrad nur schwach von der angenommenen Temperatur T_ε abhängt. In dem vorliegenden Fall bestimmt diese Temperatur nur die Wahrscheinlichkeit der Photorekombinationen. Wie sich aber aus Berechnungen ergibt, ändert sich die Wahrscheinlichkeit der Photorekombination mit T_ε außerordentlich langsam. Daher werden wir uns nur für die Möglichkeit großer Abweichungen der Größe T_ε von der für die Ionisation maßgebenden Strahlungstemperatur interessieren. Betrachten wir diese Frage. Mit Ausnahme der äußersten Teile der Photosphäre ist J_ν in den für die Photoionisation wichtigsten Spektralbereichen genähert gleich B_ν für die lokale Temperatur des gegebenen Niveaus, d. h., für diese Spektralbereiche ist die Dichte der ionisierenden Strahlung annähernd gleich derjenigen im Gleichgewicht. Mit anderen Worten, der Ionisationszustand der Atome (die Ionisation ist in diesem Fall eine Photoionisation) ist nahe dem Gleichgewichtszustand. Bedeutet dies nun, daß die Elektronentemperatur T_ε in jedem Punkt der Photosphäre gleich der Strahlungstemperatur T in diesem Punkt ist, d.h. derjenigen Temperatur, die sich durch $J_\nu = B_\nu$ bestimmt? Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, betrachten wir den Zusammenhang zwischen T und T_ε für die Grenze der Photosphäre. In Übereinstimmung mit (8.9) nehmen wir an, daß in den für die Ionisation wirksamsten Frequenzen des Spektrums die Näherung $J_\nu \approx W B_\nu(T_0)$ gilt. Der Fall $J_\nu = B_\nu$ ist ein Spezialfall des allgemeinen Falles, wenn wir $W = 1$ setzen. Um unsere Untersuchung zu erleichtern, beschränken wir uns auf das erste Niveau des Atoms, d.h. bei den Summen, die in (8.27) auftreten, beschränken wir uns auf das erste Glied der Summe mit $\nu_k = \nu_1$. In allen in der Praxis vorkommenden Fällen können wir für die zu der Ionisation vom ersten Niveau aus gehörigen Frequenzen den Einfluß der erzwungenen Emission vernachlässigen. Unter diesen Voraussetzungen nimmt die Formel (8.27) folgende Gestalt an:

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{W \int\limits_{\frac{\chi_r}{h}}^{\infty} B_\nu(T_0) \frac{(k'_\nu)_1}{\nu} d\nu}{h \left(\frac{m_e}{2\pi k T_\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^\infty (\beta_v)_1 e^{-\frac{m_e v^2}{2kT_\varepsilon}} v^3 dv}. \tag{8.28}$$

In (8.28) haben wir aus verständlichen Gründen $n_{r,1} : n_r = 1$ angenommen. Ferner ist klar, daß per definitionem $h\nu_1 = \chi_r$ ist.

Die Gleichung (8.27) und somit auch (8.28) haben wir aufgestellt, indem wir von dem Gleichgewicht zwischen der Anzahl der Photoionisationen und der Anzahl der Photorekombinationen ausgegangen sind. Ein derartiges Gleichgewicht muß auch zwischen den Energien herrschen, die bei den Photoionisationen absorbiert und bei den Photorekombinationen emittiert werden. In

diesem Fall sind die in (8.26) und (8.25) definierten Größen folgendermaßen abzuändern:

$$4\pi \int\limits_{\nu_k}^{\infty} J_\nu (k'_\nu)_k n_{r,k} d\nu, \tag{8.29}$$

$$n_e n_{r+1} 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^\infty (\beta_v)_k \left(1 + \frac{c^3}{8\pi h \nu^3}\varrho_\nu\right) e^{-\frac{m_e v^2}{2kT}} h\nu v^3 dv. \tag{8.30}$$

Der erste Ausdruck gibt die gesamte Energie an, die bei Photoionisation vom k-ten Niveau aus absorbiert wird, und der zweite die gesamte Energie, die infolge Rekombination auf das k-te Niveau emittiert wird. Der einzige Unterschied zwischen (8.29) und (8.6) sowie (8.30) und (8.25) besteht darin, daß unter dem Integral der zusätzliche Faktor $h\nu$ auftritt.

Wenn wir uns wieder unserem Atom mit einem Niveau ($\nu_k = \nu_1$) zuwenden, können wir jetzt die Gleichheit zwischen den entsprechenden Energien annehmen. Zu diesem Zweck müssen wir die beiden Ausdrücke (8.29) und (8.30) gleichsetzen, wobei wir unsere obigen Bemerkungen zu beachten haben. Wir setzen also $J_\nu = W B_\nu(T_0)$, $n_{r,1} : n_r = 1$ und vernachlässigen ebenfalls die erzwungene Emission. Als Ergebnis erhalten wir

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{W \int\limits_{\frac{\chi_r}{h}}^{\infty} B_\nu(T_0)\,(k'_\nu)_1 d\nu}{h\left(\frac{m_e}{2\pi k T_\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^\infty (\beta_v)_1 e^{-\frac{m_e v^2}{2kT_\varepsilon}} \nu v^3 dv}. \tag{8.31}$$

Wenn wir jetzt die linken Seiten von (8.28) und (8.31) gleichsetzen, erhalten wir die gesuchte Gleichung, die den Zusammenhang zwischen T_0 und T_ε angibt:

$$\frac{\int\limits_{\frac{\chi_r}{h}}^{\infty} B_\nu(T_0)\frac{(k'_\nu)_1}{\nu} d\nu}{\int\limits_{\frac{\chi_r}{h}}^{\infty} B_\nu(T_0)\,(k'_\nu)_1 d\nu} = \frac{\int\limits_0^\infty (\beta_v)_1 e^{-\frac{m_e v^2}{2kT_\varepsilon}} v^3 dv}{\int\limits_0^\infty (\beta_v)_1 e^{-\frac{m_e v^2}{2kT_\varepsilon}} \nu v^3 dv}. \tag{8.32}$$

Wir führen jetzt an Stelle von $B_\nu(T_0)$ den Ausdruck aus (3.11) ein; ferner benutzen wir für β_v die Formel (5.55), drücken mit Hilfe von (5.49) die Größe $v\,dv$ durch $d\nu$ aus und führen schließlich nach (5.7) an Stelle von $\frac{m_e v^2}{2}$ die Größe

$h\nu - \chi_r$ ein. Dann nimmt (8.32) die Gestalt

$$\frac{\displaystyle\int\limits_{\frac{\chi_r}{h}}^{\infty} \frac{\nu^2 (k'_\nu)_1 \, d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT_0}} - 1}}{\displaystyle\int\limits_{\frac{\chi_r}{h}}^{\infty} \frac{\nu^3 (k'_\nu)_1 \, d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT_0}} - 1}} = \frac{\displaystyle\int\limits_{\frac{\chi_r}{h}}^{\infty} \nu^2 (k'_\nu)_1 \, e^{-\frac{h\nu}{kT_\varepsilon}} \, d\nu}{\displaystyle\int\limits_{\frac{\chi_r}{h}}^{\infty} \nu^3 (k'_\nu)_1 \, e^{-\frac{h\nu}{kT_\varepsilon}} \, d\nu} \tag{8.33}$$

an. Wir weisen gleich darauf hin, daß diese Beziehung zwischen T_0 und T_ε nicht von W abhängt. Daher gilt derselbe Ausdruck auch in tieferen Schichten der Photosphäre.

Die Lösung von (7.33) kann man z.B. für die wasserstoffähnlichen Atome, für die $(k'_\nu)_1$ durch den Ausdruck (5.24) gegeben ist, durchführen. Die nach Formel (8.33) ausgeführten Berechnungen zeigen, daß bis zur Erreichung von sehr hohen Temperaturen beide Temperaturen praktisch gleich sind. Liegen sehr hohe Temperaturen vor, so ist es erforderlich, daß man den Einfluß der erzwungenen Emission berücksichtigt. Analoge Rechnungen, die alle Niveaus des Atoms (und nicht nur das erste) berücksichtigen, liefern praktisch dasselbe Resultat.

In den oben betrachteten Berechnungen ist angenommen, daß die einzige Ursache für die Energieabnahme des Elektronengases die Rekombination ist. Wenn aber noch weitere genügend wirksame Prozesse für das Auftreten von Energieverlusten vor sich gehen (die nicht durch entsprechende energiespendende Prozesse kompensiert werden), z.B. der Energieverlust infolge Anregung oder Ionisation der Atome durch Elektronen, so kann die Elektronentemperatur T_ε kleiner als die Temperatur T ausfallen. In diesem Fall wird die Energie der Elektronen auf einen von der Photoionisation und der Rekombination völlig verschiedenen Prozeß verausgabt. Vorläufige Berechnungen von S. L. Beloussow zeigen, daß sich für die Sonne und die Sterne vom Spektraltyp A 0 der Wert von T_ε an der Grenze der Photosphäre etwas von T_0 unterscheidet, jedoch kann dies den nach den Formeln (8.27) und (8.28) berechneten Ionisationsgrad nicht merklich beeinflussen, weil – wie wir schon erwähnt haben – nur große Unterschiede zwischen T_ε und T_0 von Bedeutung werden können.

Wir betrachten jetzt die Bereiche der Photosphäre, in denen die Näherung $J_\nu \approx B_\nu$ erfüllt ist, und nehmen in Übereinstimmung mit unseren obigen Ausführungen ebenfalls an, daß $T \approx T_\varepsilon$ ist. Dann können wir die rechte Seite des Ausdruckes (8.27) ausrechnen, wenn wir in ihm die Substitutionen $J_\nu = B_\nu$ und $T = T_\varepsilon$ vornehmen. Hierbei müssen wir die Boltzmannsche Verteilung (5.54), den durch den Ausdruck (5.55) gegebenen Zusammenhang zwischen β_ν und k'_ν sowie die Beziehungen (5.49), (5.6) und (5.8) benutzen. Als Ergebnis erhalten wir die Sahasche Formel (5.11). Dies ist auch zu erwarten, da alle von uns

benutzten Formeln dem Zustand des thermodynamischen Gleichgewichts entsprechen. Somit können wir im Rahmen der von uns gezogenen Schlußfolgerungen (z. B. über die Gleichheit $J_\nu = B_\nu$ in den für die Photoionisation wirksamsten Spektralbereichen) und unserer Voraussetzungen ($T \approx T_\varepsilon$, BOLTZMANNsche Verteilung) annehmen, daß wir von einer gewissen Tiefe in der Sternphotosphäre an die gewöhnliche Ionisationsformel (5.11) für die Temperatur des gegebenen Punktes benutzen dürfen.

Für die äußeren Bereiche der Photosphäre (die über der erwähnten Tiefe gelegen sind) wird die Näherung $J_\nu \approx B_\nu$ durch die Wirkung des geometrischen Faktors ungenau.

Um den Einfluß dieses Effektes auf den Ionisationszustand zu untersuchen, betrachten wir wieder die Grenze der Atmosphäre. Wie früher nehmen wir an, daß hier für die wirksamsten ionisierenden Frequenzen des Spektrums die Gleichung $J_\nu = W B_\nu(T_0)$ besteht. Endlich beschränken wir uns wieder der Einfachheit halber auf die Betrachtung eines Atoms mit nur einem – dem niedrigsten – Niveau. Entsprechende Einschränkungen werden wir später machen. Dann können wir unter Vernachlässigung der erzwungenen Emission (aus früher dargelegten Gründen) die Formel (8.31) benutzen. Wir könnten auch von der Formel (8.28), die aus der allgemeinen Formel (9.27) folgt, Gebrauch machen, jedoch sind die hier durchzuführenden Berechnungen etwas komplizierter als bei der Beziehung (8.31).

Wenn wir in (8.31) dieselben Ausdrücke wie bei der Ableitung von (8.33) aus (8.32) einführen, finden wir

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{2 W u_{r+1} (2\pi m_e k T_\varepsilon)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_r}{k T_\varepsilon}}}{g_{r,1} h^3} \cdot \frac{\int\limits_{\frac{\chi_r}{h}}^{\infty} \frac{(k'_\nu)_1 \nu^3 \, d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k T_0}} - 1}}{\int\limits_{\frac{\chi_r}{h}}^{\infty} (k'_\nu)_1 \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k T_\varepsilon}} \, d\nu}. \tag{8.34}$$

Wir betrachten jetzt den Fall der wasserstoffähnlichen Atome, für die $k'_\nu = c_n \nu^{-3}$ ist [siehe (5.24)]. Setzen wir diesen Ausdruck in (8.34) ein und führen wir die Integration aus, so erhalten wir

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = W \frac{u_{r+1}}{g_{r,1}} \frac{2 (2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (k T_0)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \sqrt{\frac{T_\varepsilon}{T_0}} \ln\left(1 - e^{-\frac{\chi_r}{k T_0}}\right)^{-1}. \tag{8,35}$$

Wenn wir uns daran erinnern, daß in dem betrachteten Fall (Vernachlässigung der erzwungenen Emission) die Ungleichung $e^{-\frac{\chi_r}{k T_0}} \ll 1$ gilt (sie ist überhaupt für die meisten in der Praxis vorkommenden Fälle erfüllt), können wir in der binomischen Entwicklung der Klammer $\left(1 - e^{-\frac{\chi_r}{k T_0}}\right)^{-1}$ alle Glieder von

höherer Ordnung als $e^{-\frac{\chi_r}{k T_0}}$ fortlassen. In diesem Fall nimmt die betrachtete Klammer die Gestalt $\left(1 + e^{-\frac{\chi_r}{k T_0}}\right)$ an. Endlich erhalten wir, wenn wir die Entwicklung

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{8.36}$$

benutzen und (aus demselben Grunde) wie oben alle Glieder höher als die erste Ordnung weglassen, an Stelle von (8.35)

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = W \frac{u_{r+1}}{g_{r,1}} \frac{2 (2 \pi m_e)^{\frac{3}{2}} (k T_0)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \sqrt{\frac{T_\varepsilon}{T_0}}\, e^{-\frac{\chi_r}{k T_0}}. \tag{8.37}$$

Somit haben wir die SAHAsche Formel (5.11) gewonnen, doch mit dem Korrektionsfaktor $W \sqrt{\frac{T_\varepsilon}{T_0}}$ versehen (man kann $g_{r,1} \approx u_r$ annehmen). Wenn wir wieder voraussetzen, daß $T_0 \approx T_\varepsilon$ ist, bleibt nur W übrig.

Hierbei ist zu bemerken, daß sich W in den Sternphotosphären nur wenig von Eins unterscheidet. Insbesondere können wir an der Grenze selbst ohne besonderen Fehler die Formel (5.11) benutzen, wogegen man natürlich bei exakteren Berechnungen den Faktor W unbedingt einführen muß. Sein Einfluß ist bei den ausgedehnten Atmosphären und besonders bei den planetarischen Nebeln wesentlich.

Die Formel (8.37) haben wir für ein Atom mit einem einzigen Niveau abgeleitet. Wie jedoch aus umfangreichen Berechnungen, die auch die höheren Niveaus berücksichtigen, folgt, wird das Resultat dadurch nicht prinzipiell geändert. Außerdem erinnern wir daran, daß unseren Ableitungen die Anwendung der Gleichung $J_\nu = W B_\nu$ zugrunde liegt. Der Einfluß eines Fehlers in T_ε ist dagegen – wie wir aus (8.37) erkennen – von weitaus geringerer Bedeutung.

6. Die Anwendung des KIRCHHOFFschen Gesetzes

Wir betrachten jetzt als letztes die Frage der Anwendung der KIRCHHOFFschen Formel (3.10) auf die Sternphotosphären. Zu diesem Zweck erinnern wir daran, daß die Rekombinationsprozesse die vornehmlichen Prozesse sind, die das Emissionsvermögen der Materie in der Photosphäre bestimmen. Die frei-frei-Übergänge spielen eine untergeordnete Rolle. Sie sind nur im fernen infraroten Spektralbereich von Bedeutung. Daher können wir uns bei unseren Überlegungen über die Anwendbarkeit des Gesetzes (3.10) auf die Rekombinationsprozesse beschränken. Wir betrachten Rekombinationen auf ein beliebiges k-tes Niveau eines $(r + 1)$-fach ionisierten Atoms.

Die auf das Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ und den Einheitsraumwinkel bezogene Energiemenge, die bei diesen Übergängen von 1 cm^3 Materie in 1 sec

ausgestrahlt wird, ist durch die Formel (5.57) bestimmt. Bei Benutzung von (5.52), (5.49), (5.8) und (5.55) erhalten wir:

$$j_\nu(\vartheta)\,\varrho\,d\nu = \{n_e n_{r+1}\}\left\{\frac{g_{r,k} h^4 \nu^3 k'_\nu}{u_{r+1} c^2 (2\pi m_e k T_\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu(\vartheta)\right] e^{-\frac{h\nu - \chi_{r,k}}{k T_\varepsilon}}\right\} d\nu. \tag{8.38}$$

Wir führen in diese Formel $I_\nu(\vartheta) = B_\nu(T)$ ein, nehmen $T = T_\varepsilon$ an und drücken mit Hilfe von (5.11), (5.12) und (5.54) das Produkt $n_{r+1}\, n_e$ durch $n_{r,k}$ aus. Dann erhalten wir unter Berücksichtigung von (5.6) an Stelle von (8.38):

$$j_\nu(\vartheta)\,\varrho\,d\nu = n_{r,k} k'_\nu B_\nu(T)\,d\nu. \tag{8.39}$$

Somit ergibt sich durch Anwendung der Formeln des thermodynamischen Gleichgewichtes (mit ein und derselben Temperatur) auf (8.38) automatisch das KIRCHHOFFsche Gesetz (3.10), was auch zu erwarten war.

Daher reduziert sich die Frage nach der Anwendbarkeit des KIRCHHOFFschen Gesetzes (3.10) auf die Sternphotosphäre wieder auf die Frage nach der Anwendbarkeit der oben erwähnten Formeln.

$j_\nu(\vartheta)$ in der Formel (8.38) wird durch das Produkt der beiden Faktoren bestimmt, die in der geschweiften Klammer enthalten sind. Man könnte glauben, daß dieses Produkt nur durch den Ionisationszustand der Atome und die kinetische Temperatur bestimmt wird. Dies ist jedoch nicht so. Im Grunde genommen muß man j_ν in zwei Faktoren aufspalten: in $\varkappa_\nu$ und B_ν, wobei $\varkappa_\nu$ durch die optische Tiefe der Materie längs der gegebenen Richtung bestimmt ist. Daher muß man beim Übergang von dem Produkt $n_e n_{r+1}$ auf die Anzahl der absorbierenden Atome das BOLTZMANNsche Gesetz (5.54) anwenden, wie wir es bei der Ableitung von (8.39) aus (8.38) getan haben. Die Frage nach der Anwendbarkeit der BOLTZMANNschen Formel behalten wir uns jedoch für das nächste Kapitel vor. Im Augenblick interessiert uns nur die Ionisation. Hier ist aber – wie wir gesehen haben – die Situation offenbar günstig, d.h., die Abweichungen von der SAHAschen Formel können nicht groß sein.

Der zweite Faktor der Formel (8.38) wird durch die kinetische Temperatur der Elektronen bestimmt, und folglich ist die grundlegende Frage die, ob die Temperatur T, die die Ionisation bestimmt, merklich von der Temperatur T_ε abweicht. Die Übereinstimmung zwischen der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes und den Beobachtungen spricht dafür, daß in den Hauptschichten der Photosphäre die Gleichheit zwischen T und T_ε mit hinreichender Genauigkeit erfüllt ist. Wenn dies richtig ist, so ist die Anwendung des KIRCHHOFFschen Gesetzes auf die Sternphotosphären völlig gerechtfertigt. Selbstverständlich sind jedoch noch weitere eingehende Untersuchungen über die Beziehung zwischen T und T_ε erforderlich.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Problem des Zusammenhangs zwischen T und T_ε in den ausgedehnten Photosphären, in denen sich das Strahlungsfeld J_ν selbst sehr merklich von B_ν unterscheiden kann. Endlich muß man sich vor

Augen halten, daß in den Sternphotosphären außer den oben betrachteten Prozessen, die T_ε auf dem gegebenen Niveau bestimmen, noch andere Prozesse (z.B. elektromagnetischen Charakters) auftreten können, wie es z.B. in den oberen Schichten der Sonnenchromosphäre und besonders in der Sonnenkorona der Fall ist. Wenn in mehreren Fällen ein beträchtlicher Unterschied zwischen T_ε und der in die Formel $J_\nu = W B_\nu(T)$ eingehenden Größe T auftritt, so kann man eine weitere Anwendung des KIRCHHOFFschen Gesetzes (3.10) nicht mehr rechtfertigen. Für den Koeffizienten J_ν benutzt man unmittelbar den Ausdruck (8.38), wobei man natürlich für die gegebene Frequenz ν die Rekombination auf alle möglichen Niveaus berücksichtigt. In diesem Fall ist die Beziehung zwischen der kinetischen Temperatur der Schichten der Photosphäre und der Intensität der aus ihnen austretenden Strahlung sehr kompliziert; ein geeignetes Beispiel betrachten wir in § 19 im dritten Kapitel.

Endlich können auch starke Abweichungen von der BOLTZMANNschen Verteilung einer Anwendung der Formel (3.10) im Wege stehen.

KAPITEL II

Die Entstehung der Absorptionslinien in den Spektren der Sterne

§ 9. Der Mechanismus der Entstehung der Absorptionslinien in den Sternatmosphären

1. Grundlegende Definitionen

Das Auftreten von Absorptionslinien in dem Spektrum eines Sternes bedeutet, daß die Intensität seines kontinuierlichen Spektrums für bestimmte Frequenzen, die den Übergängen der Elektronen von einem Niveau zum anderen entsprechen, geschwächt wird.

Um diese Abschwächung quantitativ festlegen zu können, führen wir die sogenannte *Restintensität* r_ν ein, die das Verhältnis der Intensität I_ν im Innern der Linie bei der gegebenen Frequenz ν zu der für diese Frequenz interpolierten Intensität I_ν^0 des kontinuierlichen Spektrums ist (Abb. 22a):

$$r_\nu = \frac{I_\nu}{I_\nu^0}. \tag{9.1}$$

(Analog wird r_ν auch für den Strahlungsstrom H_ν definiert.)

In den Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums ist natürlich $r_\nu = 1$. Als Ergebnis erhalten wir eine Linienkontur, wie sie in Abb. 22b dargestellt ist. r_{ν_0}, das gleich dem kleinsten Wert von r_ν ist, wird als *zentrale Restintensität* bezeichnet.

$R_\nu = 1 - r_\nu$ bezeichnet man als *Linientiefe* in der gegebenen Frequenz im Innern der Linie.

Die innersten Teile einer Linie nennt man ihren *Kern*. Die äußersten Teile einer Linie (im Vergleich zur Linienmitte) nennt man ihre Flügel.

Wie wir im folgenden sehen werden, spielt für zahlreiche Aufgaben die sogenannte *Gesamtabsorption* in der Linie oder, mit einem anderen Ausdruck, die *Äquivalentbreite der Linie* eine große Rolle. Diese Größe ist folgendermaßen definiert:

$$W_\nu = \int (1 - r_\nu)\, d\nu = \int R_\nu\, d\nu \tag{9.2}$$

oder

$$W_\lambda = \int (1 - r_\lambda)\, d\lambda = \int R_\lambda\, d\lambda. \tag{9.3}$$

Die Indizes ν und λ zeigen an, daß W im ersten Fall in der Frequenzskala und im zweiten Fall in der Wellenlängenskala gemessen wird. Die Integration in (9.2) und (9.3) erstreckt sich über die gesamte betrachtete Linie. In Abb. 22b ist W_ν durch die gestrichelte Fläche kenntlich gemacht. Die Beobachter geben W gewöhnlich in der Wellenlängenskala an und messen sie in Ångström oder

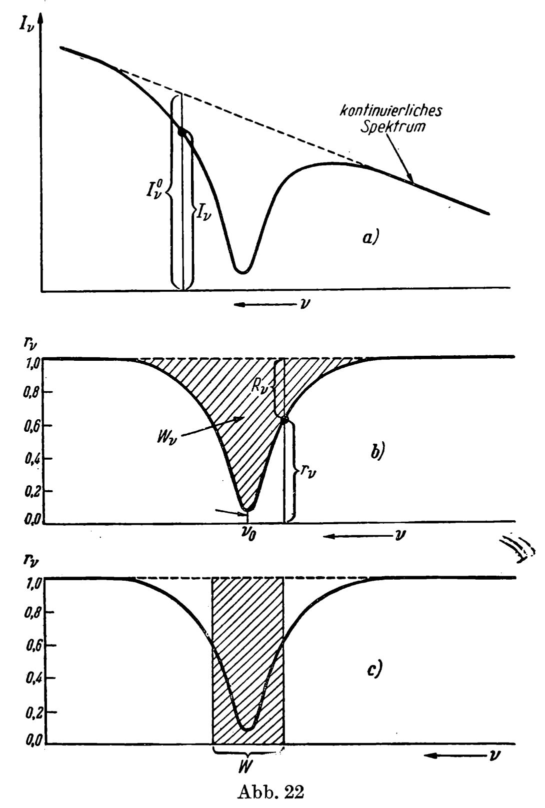


Abb. 22

Milliångström. Wie aus der Definition der Äquivalentbreite folgt, ist sie gleich der Breite eines rechteckigen Abschnittes des Spektrums, mit der zentralen Intensität Null, dessen Fläche gleich der von der Kontur der vorliegenden Spektrallinie begrenzten Fläche ist, d.h. gleich der gestrichelten Fläche in Abb. 22b. Dies ist in Abb. 22c dargestellt.

Es liegt auf der Hand, daß W_λ die Stärke oder die Intensität einer gegebenen Linie in einem Sternspektrum charakterisiert. Je größer die Äquivalentbreite dieser Linie ist, desto stärker ist die Absorption dieser Linie.

2. Der Mechanismus der Entstehung der Absorptionslinien

Wir erläutern jetzt, auf welche Weise die Absorptionslinien in den Sternspektren überhaupt entstehen.

Es versteht sich von selbst, daß der Absorptionskoeffizient in den Frequenzen der Absorptionslinien größer als in den ihnen benachbarten Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums ist. In den Frequenzen der Absorptionslinien setzt sich der Absorptionskoeffizient aus dem kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten (frei-gebunden- und frei-frei-Übergänge) und dem Absorptionskoeffizienten zusammen, der einem vorgegebenen diskreten Übergang entspricht. Hierdurch wird auch die Existenz der Absorptionslinien erklärt. Sie sind Teile des Spektrums, in denen die Photosphärenstrahlung durch eine zusätzliche Absorption geschwächt wird. Es erhebt sich nun die grundlegende Frage, wie die Absorptionslinien entstehen: Ebenso wie beispielsweise die Absorptionsstreifen jenseits der Seriengrenzen im kontinuierlichen Spektrum der frühen Sterne (siehe Abb. 17), d. h. infolge einer wahren Absorption, oder durch Streuung der Strahlung. Im ersten Fall wird die Schwächung der Strahlung in einem beliebigen Spektralbereich durch zwei Ursachen hervorgerufen: 1. Der Absorptionskoeffizient ist in dem betrachteten Bereich größer als in den benachbarten Bereichen; 2. die Temperatur in der Photosphäre nimmt nach außen hin ab. Wenn der Absorptionskoeffizient innerhalb des betrachteten Spektralbereiches sehr groß ist, kommt die Strahlung unmittelbar aus den wenig heißen Schichten an der Oberfläche der Photosphäre; daher ist die Intensität der aus der Oberfläche austretenden Strahlung genähert gleich der Intensität $B_\nu(T_0)$, wobei T_0 die Oberflächentemperatur des Sternes ist.

Wir betrachten jetzt die Mitte einer beliebigen starken Absorptionslinie im Sonnenspektrum. In diesem Fall ist der Absorptionskoeffizient sehr groß. Daher besteht in jedem beliebigen Bereich der Sonnenscheibe für die Frequenzen der Linienmitte näherungsweise die Gleichung $I_\nu \approx B_\nu(T_0)$. Andererseits ist am Sonnenrand nach Formel (4.30) die Gleichung $I_\nu \approx B_\nu(T_0)$ für beliebige Frequenzen näherungsweise gültig und insbesondere für diejenigen Bereiche des kontinuierlichen Spektrums, die an die betrachtete Linie grenzen. Folglich müßte r_ν für die Mitte einer starken Linie am Sonnenrand gleich Eins sein, d. h., die starken Linien müßten am Sonnenrand verwaschen sein und in einigen Fällen sogar verschwinden. Dies steht im Widerspruch zu den Beobachtungen. Die Kontur einer starken Absorptionslinie am Sonnenrande unterscheidet sich fast gar nicht von der Kontur derselben Linie in der Sonnenmitte. Zur Veranschaulichung zeigen wir in Abb. 23 die Konturen der Linien H und K für zwei Punkte der Sonnenscheibe: für die Sonnenmitte (ausgezogene Kurve) und für den Abstand $R = 0{,}98\ R_\odot$ von der Sonnenmitte (gestrichelte Kurve). Die Konturen wurden von W. B. Nikonow und A. B. Sewerny ermittelt. Daher können wir, indem wir uns auf die Beobachtungen stützen, den ersten Mechanismus T(die wahre Absorption) als nicht zutreffend abtun. Dies hat zur Folge, daß man bei der Beschreibung der Prozesse, die für die Entstehung der Absorptionslinie verantwortlich sind, das Kirchhoffsche Gesetz nicht benutzen darf.

Um unsere obige Schlußfolgerung verständlich zu machen, teilen wir die Sternphotosphäre in Gedanken in zwei Schichten auf: in eine untere, in der der Hauptanteil der von uns beobachteten Strahlung der Photosphäre erzeugt wird, und eine obere, in der hauptsächlich die Absorptionslinien entstehen. Die untere Schicht bezeichnen wir wie früher als Photosphäre, während wir die obere umkehrende Schicht nennen wollen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die umkehrende Schicht aus Atomen besteht, die nur zwei Energieniveaus be-

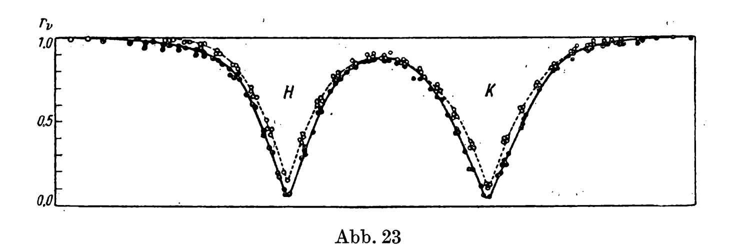


Abb. 23

sitzen, ein erstes und ein zweites. Folglich können diese Atome nur in einer bestimmten Frequenz absorbieren und emittieren. Die Anregung dieser Atome und die ihr entgegengesetzten Übergänge aus dem zweiten Zustand in den ersten können unter dem Einfluß der folgenden Prozesse vor sich gehen: 1. durch Zusammenstöße mit umgebenden Teilchen und 2. infolge einer Absorption und darauffolgender Reemission von Lichtquanten.

Wenn der erste Faktor überwiegt, hat die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung der stoßenden Teilchen zur Folge, daß das Verhältnis der Anzahl der Atome im zweiten und ersten Zustand durch das BOLTZMANNsche Gesetz und das Verhältnis des Emissionskoeffizienten zum Absorptionskoeffizienten durch das KIRCHHOFFsche Gesetz (3.10) bestimmt wird. Elementare Berechnungen zeigen jedoch, daß in den Sternatmosphären die Atomübergänge durch Stöße im Vergleich zu den Prozessen der Photoanregung mit darauffolgender Reemission sehr selten sind. Ebenso wie bei der Stoßionisation (siehe § 8) findet dieser Umstand durch die geringe Dichte der Materie in den Sternphotosphären, d.h. durch die geringe Konzentration der anregenden Teilchen, seine Erklärung. Folglich können wir uns dem zweiten Faktor zuwenden.

Die in der umkehrenden Schicht befindlichen Atome absorbieren in einer vorgegebenen Frequenz die Strahlung der Photosphäre und streuen diese Strahlung nach allen Seiten, darunter auch rückwärts, in die Photosphäre, wo diese Strahlung nach der Absorption durch die Atome der Photosphäre wieder in anderen Frequenzen emittiert wird. Je mehr streuende Atome in der umkehrenden Schicht vorhanden sind, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Lichtquant der betrachteten Frequenz nach einer beträchtlichen Anzahl von Streuungen in die Photosphäre zurückgeworfen wird und verschwindet. Somit besteht in diesem Fall die Wirkung der umkehrenden Schicht darin, daß sie einen

bestimmten Teil der in der betrachteten Frequenz aus der Photosphäre austretenden Lichtquanten in die Photosphäre zurücksendet (diffuse Reflexion). Dagegen tritt die Strahlung der Photosphäre in den Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums ungehindert oder fast ungehindert durch die umkehrende Schicht hindurch. Das Ergebnis dieser Streuung ist das Auftreten einer Absorptionslinie. Ihre Tiefe hängt von der Anzahl der streuenden Atome in der umkehrenden Schicht ab.

Weil die Wirkungsweise der umkehrenden Schicht in der diffusen selektiven Reflexion der Strahlungsenergie in die Photosphäre zurück besteht, wo sie in andere Frequenzen umgewandelt wird, ist in den äußeren Schichten der umkehrenden Schicht die Strahlungsintensität in der betrachteten Frequenz kleiner als in der Photosphäre. Die geringere Strahlungsintensität führt zu einem geringeren Prozentsatz angeregter Atome. Von der Anzahl der angeregten Atome hängt aber der Emissionskoeffizient j_ν ab. Daraus ergibt sich, daß das Verhältnis von j_ν zu $\varkappa_\nu$ in der umkehrenden Schicht kleiner sein muß als in der Photosphäre, und folglich auch kleiner, als aus dem KIRCHHOFFschen Gesetz folgt.

Die Annahme, daß der für die Entstehung der Absorptionslinien verantwortliche Mechanismus vorwiegend in der Streuung der Strahlung besteht, findet durch Beobachtungen und mehr ins einzelne gehende Untersuchungen der in den Sternphotosphären herrschenden Bedingungen ihre Bestätigung.

3. Die Ableitung der Strömungsgleichung für kohärente Streuung

In dem vorliegenden und in den vier folgenden Paragraphen betrachten wir die Prozesse der *kohärenten* Streuung, bei der die Frequenz des reemittierten Quants genau (!) die gleiche ist wie die Frequenz des absorbierten Quants und nur die Richtungen verschieden sind. Die Prozesse der inkohärenten Streuung werden wir in § 14 behandeln.

Unter der Voraussetzung, daß wir es mit einer kohärenten Streuung zu tun haben, stellen wir jetzt die Strömungsgleichung für diese Prozesse auf. Den zu einem diskreten Übergang, durch den eine vorgegebene Linie entsteht, gehörigen Absorptionskoeffizienten bezeichnen wir mit σ_ν; die Größe σ_ν beziehen wir auf die Masseneinheit. Den analogen, auf ein Atom bezogenen Absorptionskoeffizienten bezeichnen wir mit s_ν. Die Beziehung zwischen beiden wird durch eine zu (5.22) analoge Formel hergestellt.

Wir wollen einen Ausdruck für den Absorptionskoeffizienten im Falle der kohärenten Streuung herleiten. Wie aus physikalischen Untersuchungen hervorgeht, besitzen die Prozesse der Reemission von absorbierten Quanten eigentlich keinen isotropen Charakter. Es zeigt sich, daß die Reemission in den verschiedenen Richtungen eine unterschiedliche Wahrscheinlichkeit besitzt. Hierbei ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Richtung des Quants nach der Streuung innerhalb des Raumwinkels $d\omega$ liegt, in den meisten Fällen proportional $(1 + \cos^2 \varphi) d\omega$; φ ist der Winkel zwischen den einfallenden und den ge-

streuten Quanten. Eine von V. A. AMBARZUMJAN[1]) durchgeführte Untersuchung des Streuproblems zeigt jedoch, daß bei dem angegebenen Gesetz, d. h. $1 + \cos^2 \varphi$, die Endergebnisse der Lösung des Streuproblems keine starken Abweichungen von denjenigen aufweisen, die man bei isotroper Streuung erhielte. Im Hinblick hierauf nehmen wir an, daß die Reemission isotrop ist. Die exakte Berücksichtigung der Abhängigkeit der Reemissionswahrscheinlichkeit von φ ist eine der nächsten Aufgaben der theoretischen Astrophysik.

Wenn wir die Reemission als isotrop voraussetzen, können wir unmittelbar den Ausdruck für j_ν für den Fall reiner Streuung schreiben. Tatsächlich ist nach (3.6) die Energiemenge, die von einem Gramm Materie in 1 sec in der Frequenzeinheit absorbiert wird, gleich

$$\sigma_\nu \int_{4\pi} I_\nu \, d\omega. \tag{9.4}$$

Da wir stationäre Sterne betrachten, wird diese absorbierte Energiemenge von den Atomen in demselben Zeitintervall in Form reemittierter Quanten wieder abgegeben. Da wir die Reemission als isotrop vorausgesetzt haben, erhalten wir j_ν durch Division des Ausdruckes (9.4) durch den vollen Raumwinkel 4π, also

$$j_\nu = \sigma_\nu \int_{4\pi} I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} = \sigma_\nu J_\nu. \tag{9.5}$$

Bei der Ableitung von (9.5) haben wir offenbar vorausgesetzt, daß wir es mit rein kohärenter Streuung zu tun haben, da die absorbierte Energie in derselben Frequenz reemittiert wird!

Somit besteht bei Isotropie der Reemissionsprozesse der Unterschied zwischen den Formeln für die wahre Absorption und für die Streuung darin, daß in dem Ausdruck für den Emissionskoeffizienten die Funktion B_ν durch das Mittel der Intensität J_ν ersetzt wird. Mit Rücksicht hierauf können wir die Strömungsgleichung für planparalelle streuende Schichten sofort in folgender Gestalt schreiben:

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\vartheta) - J_\nu, \tag{9.6}$$

wobei

$$d\tau_\nu = \sigma_\nu \varrho \, dh. \tag{9.7}$$

Hierbei ist es klar, daß die Strömungsgleichung (9.6) nur die Änderungen von $I_\nu(\vartheta)$ berücksichtigt, die durch das Auftreten der kohärenten Streuprozesse bedingt sind.

---

[1]) V. A. AMBARZUMJAN, Diffusion des Lichtes durch ein streuendes Medium großer optischer Dicke. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR **43**, 106, 1944 (В. А. Амбарцумян, Диффузия света через рассеивающую среду большой оптической толщи. Доклады Академии наук СССР, **43**, 106, 1944).

Wir multiplizieren jetzt beide Seiten von (9.6) mit $\frac{d\omega}{4\pi}$ und integrieren das Resultat über den vollen Raumwinkel:

$$\frac{d}{d\tau_\nu}\int_{4\pi} I_\nu(\vartheta)\cos\vartheta\,\frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{d\pi H_\nu}{d\tau_\nu} = \int I_\nu(\vartheta)\,\frac{d\omega}{4\pi} - J_\nu \equiv 0. \qquad (9.8)$$

Der Strahlungsstrom πH_ν ist also in rein streuenden Atmosphären, die aus planparallelen Schichten zusammengesetzt sind, in allen Tiefen konstant. Zum Unterschied vom Fall des lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes tritt bei kohärenter Streuung die Konstanz des Strahlungsstromes einer vorgegebenen Frequenz auf.

4. Die Lösung der Strömungsgleichungen

Wir betrachten jetzt das folgende Modell: Über den Schichten, die das kontinuierliche Spektrum ausstrahlen (der „Photosphäre" des Sternes) befindet sich eine streuende Schicht (die „umkehrende Schicht"). Hierdurch grenzen wir von neuem die Schichten, in denen das kontinuierliche Spektrum und die Absorptionslinien entstehen, scharf voneinander ab. Mit welchem Grad von Genauigkeit dieses Modell eine wirkliche Sternatmosphäre ersetzen kann, werden wir später behandeln.

Unsere Hauptaufgabe ist die Berechnung des Strahlungsstromes πH_ν, der aus der Oberfläche der streuenden Schicht austritt. Die Intensität der kontinuierlichen Strahlung, die aus der „Photosphäre" austritt, bezeichnen wir mit $I_\nu^0(\vartheta)$.

Da das betrachtete Schema von einer realen Photosphäre abweicht, genügt es für unsere Überlegungen, wenn wir von der im dritten Paragraphen behandelten Näherungsmethode Gebrauch machen, die auf der Einführung mittlerer Intensitäten beruht.

Wir bezeichnen die mittleren Strahlungsintensitäten in den zugehörigen Halbkugeln wieder mit I_ν und I'_ν und berücksichtigen, daß die Gleichung (9.6) analog der Gleichung (3.12) ist und im Fall der unteren Halbkugel (wenn man den Winkel $\psi = \pi - \vartheta$ einführt) analog der Gleichung (3.17) ist. Dann können wir für I_ν und I'_ν auf Grund von (3.61) und (3.62) sofort

$$\frac{2}{3}\,\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - J_\nu, \qquad (9.9)$$

$$\frac{2}{3}\,\frac{dI'_\nu}{d\tau_\nu} = -I'_\nu + J_\nu \qquad (9.10)$$

schreiben. Die Addition der Gleichungen (9.9) und (9.10) ergibt

$$\frac{d(I_\nu + I'_\nu)}{d\tau_\nu} = \frac{3}{2}\,(I_\nu - I'_\nu). \qquad (9.11)$$

Berücksichtigen wir, daß nach (3.50) die Differenz der mittleren Intensitäten gleich H_ν ist und nach unserer obigen Ableitung H_ν in planparallelen streuenden Schichten konstant ist, so finden wir

$$I_\nu + I'_\nu = \frac{3}{2} H_\nu \tau_\nu + D_\nu, \tag{9.12}$$

wobei D_ν eine Integrationskonstante ist. Aus (9.12) folgt, daß sie gleich der Intensität I_ν an der äußeren Grenze der umkehrenden Schicht ist, wo $\tau_\nu = 0$ und $I'_\nu = 0$. Für $\tau_\nu = 0$ (wo $I'_\nu \equiv 0$) ist diese Intensität auf Grund der Beziehung (3.50) ihrerseits gleich H_ν. Also ist $D_\nu = H_\nu$ und deshalb

$$I_\nu + I'_\nu = \frac{3}{2} H_\nu \tau_\nu + H_\nu. \tag{9.13}$$

Wir bestimmen jetzt H_ν. Zu diesem Zweck schreiben wir die Gleichungen (3.50) und (9.13) für das tiefste Niveau der umkehrenden Schicht auf. Wenn wir die optische Dicke der gesamten streuenden Schicht mit τ_ν^σ bezeichnen, finden wir

$$\left.\begin{aligned} (I_\nu)_{\tau_\nu^\sigma} - (I'_\nu)_{\tau_\nu^\sigma} &= H_\nu, \\ (I_\nu)_{\tau_\nu^\sigma} + (I'_\nu)_{\tau_\nu^\sigma} &= \frac{3}{2} H_\nu \tau_\nu^\sigma + H_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

Die Addition beider Ausdrücke liefert

$$\frac{H_\nu}{(I_\nu)_{\tau_\nu^\sigma}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}\tau_\nu^\sigma}. \tag{9.15}$$

$(I_\nu)_{\tau_\nu^\sigma}$ ist die mittlere Strahlungsintensität auf dem unteren Niveau der streuenden Schicht. Es ist jedoch klar, daß diese mit π multiplizierte mittlere Intensität gleichzeitig gleich dem Strom der kontinuierlichen Strahlung der Photosphäre in der gegebenen Frequenz ist, d.h. gleich

$$\pi H_\nu^0 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu^0(\vartheta) \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta. \tag{9.16}$$

Setzen wir $\tau_\nu^\sigma \equiv 0$, d.h. nehmen wir an, daß in der vorliegenden Frequenz keine Schwächung der Strahlung durch Streuung auftritt, erhalten wir nach (9.15) $(I_\nu)_{\tau_\nu^\sigma} = H_\nu^0$. Die Größe πH_ν^0 ist der zu der gegebenen Frequenz interpolierte Strom der kontinuierlichen Strahlung. Weil ferner πH_ν der Strahlungsstrom in der Linie ist, können wir für die Restintensität schreiben:

$$r_\nu = \frac{H_\nu}{H_\nu^0} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}\tau_\nu^\sigma}. \tag{9.17}$$

Die durch den Ausdruck (9.17) bestimmte Restintensität r_ν ist für den Strahlungsstrom abgeleitet worden. Daher ist die Formel (9.17) auf die Strahlung eines entfernten Sternes oder auf die Strahlung der Sonnenscheibe im ganzen genommen anwendbar.

Nach dieser Formel verkleinert sich r_ν mit zunehmendem s_ν und folglich τ_ν^σ. In der Linienmitte, wo s_ν und τ_ν^σ ihr Maximum haben, ist r_ν am kleinsten. Somit erhalten wir eine Kontur von einem Aussehen, wie es in Abb. 22b dargestellt ist.

Um die Kontur einer Absorptionslinie nicht für die gesamte Sonnenscheibe, sondern für einen bestimmten Punkt, d.h. für irgendeine Richtung ϑ, zu erhalten, ist die Gleichung (9.6) zu lösen. Wenn wir von der schon erwähnten formalen Identität dieser Gleichung mit der Gleichung (3.12) ausgehen, können wir die durch die Gleichungen (3.26) und (3.27) angegebenen Lösungen benutzen. Hierbei müssen wir uns der letzten zuwenden, weil sie die Intensität angibt, die durch eine Schicht mit einer endlichen optischen Tiefe bestimmt wird. Uns interessiert in dem vorliegenden Fall die Strahlung, die von den Richtungen $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$ eingeschlossen wird; an Stelle von ψ müssen wir daher in (3.27) $\psi = \pi - \vartheta$ einführen. Dann erhalten wir für $I_\nu(\vartheta, \tau_\nu)$

$$I_\nu(\vartheta, \tau_\nu) = G_\nu e^{\tau_\nu \sec\vartheta} - e^{\tau_\nu \sec\vartheta} \int_0^{\tau_\nu} J_\nu e^{-t_\nu \sec\vartheta} \sec\vartheta \, dt_\nu, \tag{9.18}$$

wobei G_ν eine Integrationskonstante ist.

Für J_ν können wir den aus (3.51) und (9.13) folgenden Ausdruck benutzen:

$$J_\nu = \frac{1}{2} H_\nu \left(1 + \frac{3}{2} t_\nu\right). \tag{9.19}$$

Nach (9.18) besteht auf der oberen, äußeren Grenze der umkehrenden Schicht, wo $\tau_\nu = 0$, die Gleichung

$$I_\nu(\vartheta, 0) = G_\nu. \tag{9.20}$$

Ferner haben wir an der unteren Grenze der umkehrenden Schicht, wo $\tau_\nu = \tau_\nu^\sigma$,

$$I_\nu\left(\vartheta, \tau_\nu^\sigma\right) = I_\nu^0(\vartheta). \tag{9.21}$$

Schreiben wir (9.18) für dieses Niveau auf und lösen wir den erhaltenen Ausdruck nach G_ν auf, so erhalten wir auf Grund von (9.20)

$$I_\nu(\vartheta, 0) = I_\nu^0(\vartheta) e^{-\tau_\nu^\sigma \sec\vartheta} + \int_0^{\tau_\nu^\sigma} J_\nu e^{-t_\nu \sec\vartheta} \sec\vartheta \, dt_\nu. \tag{9.22}$$

Setzen wir endlich den Ausdruck (9.19) in (9.22) ein und führen wir die

Integration aus, so finden wir

$$I_\nu(\vartheta,0) = I_\nu^0(\vartheta)\, e^{-\tau_\nu^\sigma \sec\vartheta} + \frac{H_\nu}{2}\left\{\left(1+\frac{3}{2}\cos\vartheta\right) - e^{-\tau_\nu^\sigma \sec\vartheta}\left(1+\frac{3}{2}\tau_\nu^\sigma + \frac{3}{2}\cos\vartheta\right)\right\}, \qquad (9.23)$$

wobei wir an Stelle von H_ν den Ausdruck aus (9.17) einführen können.

Die Restintensität $r_\nu(\vartheta)$ können wir im vorliegenden Fall durch den Quotienten $\frac{I_\nu(\vartheta, 0)}{I_\nu^0(\vartheta)}$ ausdrücken. In Verbindung mit der Definition des Stromes H_ν^0 ist

$$r_\nu(\vartheta) = \frac{I_\nu(\vartheta,0)}{I_\nu^0(\vartheta)} = e^{-\tau_\nu^\sigma \sec\vartheta} + \frac{1}{1+\frac{3}{1}\tau_\nu^\sigma}\,\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu^0(\vartheta)\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{I_\nu^0(\vartheta)} \times\left\{\left(1+\frac{3}{2}\cos\vartheta\right) - e^{-\tau_\nu^\sigma \sec\vartheta}\left(1+\frac{3}{2}\tau_\nu^\sigma + \frac{3}{2}\cos\vartheta\right)\right\}. \qquad (9.24)$$

Um also für einen vorgegebenen Winkel ϑ die Abhängigkeit der Größe $r_\nu(\vartheta)$ von der Frequenz zu ermitteln, müssen wir kennen: 1. Das Gesetz der Änderung von τ_ν^σ mit der Frequenz, 2. das Gesetz der Randverdunkelung für die Intensität der kontinuierlichen Strahlung in dem vorliegenden Spektralbereich, d.h. die Änderung von $I_\nu^0(\vartheta)$ in Abhängigkeit vom Winkel ϑ. Diese kann unmittelbar den Beobachtungen entnommen werden.

Über den Vergleich der Formeln (9.24) und (9.17) mit den Beobachtungen werden wir später sprechen, nachdem wir uns mit der Abhängigkeit der Größe σ_ν von der Frequenz vertraut gemacht haben. Insbesondere werden wir sehen, daß diese Formeln für die Flügel gewisser Linien in den Spektren der Sonne und der Sterne manchmal zu einer befriedigenden Übereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungsergebnissen führen, wenn man die in τ_ν^σ eingehenden Parameter in geeigneter Weise wählt.

Die Formel (9.24) zeigt in Übereinstimmung mit der Beobachtung, daß sich die Konturen der Absorptionslinien von der Sonnenmitte zum Sonnenrand im allgemeinen wenig ändern.[1]) Sehr oft ist jedoch die Übereinstimmung zwischen

[1]) Für die Mitten der starken Linien, wo τ_ν^σ sehr groß ist, folgt dies unmittelbar aus (9.24), weil einerseits die Restintensität $r_\nu(\vartheta)$ für $\tau_\nu^\sigma \to \infty$ dem Quotienten $\left(1+\frac{3}{2}\cos\vartheta\right) : I_\nu^0(\vartheta)$ proportional ist und andererseits im visuellen Spektralbereich die Intensität $I_\nu^0(\vartheta)$ selbst annähernd das Gesetz $\left(1+\frac{3}{2}\cos\vartheta\right)$ befolgt, so daß im allgemeinen die Änderung von $r_\nu(\vartheta)$ mit dem Winkel ϑ schwach ist.

Theorie und Beobachtung unbefriedigend. Der quantitative Vergleich der Ergebnisse der dargelegten Theorie mit den Beobachtungen fördert eine Reihe von Unstimmigkeiten zutage. So müßten z. B. in der Mitte der starken Absorptionslinien, wo τ_ν^σ sehr groß ist, nach den Formeln (9.17) und (9.24) die Werte der zentralen Restintensitäten in der Nähe von Null liegen. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Beobachtung, was sich natürlich aus der ungenügenden Übereinstimmung unseres Modells mit einer realen Photosphäre erklärt.

5. Die Ableitung der Strömungsgleichung unter Berücksichtigung der Streuung und der wahren Absorption

Die grundlegende vereinfachende Voraussetzung bei unserem Modell ist die künstliche Aufteilung der Sternatmosphäre in zwei völlig verschiedene Bereiche: die „Photosphäre" und die „umkehrende Schicht". In Wirklichkeit existiert solch eine Aufteilung natürlich nicht. Tatsächlich besitzen nicht nur die Atome der „umkehrenden Schicht", sondern auch die Atome der „Photosphäre" ein Streuvermögen, so daß an der Entstehung der Absorptionslinien sämtliche Photosphärenschichten der Sterne (oder der Sonne) beteiligt sind. Aus unseren Darlegungen folgt, daß wir bei einer strengen Lösung des betrachteten Problems die Aufteilung der Sternatmosphäre in eine „Photosphäre" und eine „umkehrende Schicht" fallen lassen und von einer allgemeinen Strömungsgleichung ausgehen müssen, die nicht nur die Streuungsprozesse, sondern auch die Absorptionsprozesse berücksichtigt.

Bei ihrer Aufstellung müssen wir davon ausgehen, daß in einer wirklichen Atmosphäre die Schwächung der Intensität eines Lichtstrahles auf der Strecke ds in den Frequenzen der Absorptionslinien nicht nur durch den selektiven Absorptionskoeffizienten σ_ν, sondern auch durch den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu$ bestimmt wird. Daher ist die von einem Zylinder mit dem Volumen $d\sigma ds$ (siehe Abb. 3) absorbierte Strahlungsenergie, die auf das Frequenzintervall $d\nu$, den elementaren Raumwinkel $d\omega$ und das Zeitelement dt bezogen ist, nach (2.25) gleich

$$\Delta E_{\text{abs}} = -I_\nu(\varkappa_\nu + \sigma_\nu)\,\varrho\, ds\, d\omega\, d\sigma\, dt\, d\nu. \tag{9.25}$$

Wir geben die Energie an, die von dem Zylinder infolge der wahren kontinuierlichen Absorption ausgestrahlt wird. Nach (2.21) und (3.10) können wir für diese Prozesse

$$\Delta E_{\text{em}}^{(1)} = \varkappa_\nu B_\nu \varrho\, d\sigma\, ds\, d\omega\, dt\, d\nu \tag{9.26}$$

schreiben, weil wir für die Prozesse der wahren Absorption die Anwendbarkeit der Gesetze des thermodynamischen Gleichgewichtes voraussetzen.

Besondere Beachtung erfordern die Prozesse der selektiven Schwächung der Strahlung, d.h. die Prozesse, die nur in den Frequenzen der Linien vor sich gehen. Zu diesen Prozessen gehören:

1. Die im vorliegenden Paragraphen schon betrachtete Streuung der Strahlung.

2. Die wahre selektive Absorption, die mit diskreten Elektronensprüngen verbunden ist.

Die zuletzt erwähnten Prozesse wurden von uns auf den Seiten 42–43 behandelt. Wir berechnen zunächst ΔE_{em} für die Streuprozesse. Von der gesamten Energie, die von unserem Zylinder selektiv absorbiert wird, d.h. von der Energiemenge $I_\nu \sigma_\nu \varrho\, ds\, d\omega\, d\sigma\, dt\, d\nu$, werde der Bruchteil $1 - \varepsilon_\nu$ in Form einer kohärenten Streustrahlung reemittiert, so daß demgemäß der Anteil ε_ν der erwähnten Energie für die Prozesse der wahren selektiven Absorption verausgabt wird. Mit anderen Worten, der Anteil derjenigen Absorptionsenergie, der in Form einer gestreuten Strahlung reemittiert wird, ist gleich $I_\nu \sigma_\nu (1 - \varepsilon_\nu) \varrho\, ds\, d\omega\, d\sigma\, dt\, d\nu$. Dies bedeutet aber, daß der Absorptionskoeffizient, der nur den Prozessen der nachfolgenden Streuung entspricht, nicht gleich σ_ν, sondern gleich $\sigma_\nu (1 - \varepsilon_\nu)$ ist. Folglich ist nach (9.5) und (2.21) die Energiemenge, die von unserem Zylinder infolge kohärenter Streuung reemittiert wird, gleich

$$\Delta E_{\text{em}}^{(2)} = \sigma_\nu (1 - \varepsilon_\nu) J_\nu \varrho\, d\sigma\, ds\, d\omega\, dt\, d\nu\,. \tag{9.27}$$

Wir wenden uns jetzt der Emission zu, die der wahren selektiven Absorption entspricht. Nach unserer obigen Bemerkung ist die (aus dem Strahlenbündel) von unserem Zylinder absorbierte Energiemenge, die auf diese Prozesse zurückzuführen ist, gleich $I_\nu \sigma_\nu \varepsilon_\nu \varrho\, ds\, d\omega\, d\sigma\, dt\, d\nu$; folglich ist der zu der wahren selektiven Absorption gehörige Absorptionskoeffizient gleich $\sigma_\nu \varepsilon_\nu$. Da wir für die wahren Absorptionsprozesse die Anwendbarkeit des Kirchhoffschen Gesetzes (d.h. das Vorhandensein eines lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes) vorausgesetzt haben, ist die vom betrachteten Zylinder ausgestrahlte Energiemenge, die der wahren selektiven Emission entspricht, nach (2.21) und (3.10) gleich

$$\Delta E_{\text{em}}^{(3)} = \sigma_\nu \varepsilon_\nu B_\nu \varrho\, ds\, d\omega\, dt\, d\nu\, d\sigma\,. \tag{9.28}$$

Wir weisen auf folgenden Unterschied zwischen der Streuung und der wahren selektiven Absorption hin: Bei der Streuung wird die gesamte absorbierte Energie $I_\nu \sigma_\nu (1 - \varepsilon_\nu) \varrho\, ds\, d\omega\, d\sigma\, dt\, d\nu$ wieder in Form von gestreuter Energie reemittiert; bei der wahren Absorption ist diese Gleichheit der absorbierten und reemittierten Energie nicht erfüllt. Die durch die Formel (9.28) angegebene emittierte Energie steht in keiner unmittelbaren Beziehung zu der absorbierten Energie, d.h. zu der Größe $I_\nu \sigma_\nu \varepsilon_\nu \varrho\, ds\, d\omega\, d\sigma\, dt\, d\nu$. Dies entspricht dem auf Seite 42 erwähnten Sachverhalt, daß bei der wahren Absorption zwischen den absorbierten und den emittierten Quanten kein unmittelbarer Zusammenhang besteht.

Wir stellen jetzt, genauso wie bei der Ableitung von (2.26), die Bilanz zwischen der absorbierten und der emittierten Energie auf und erhalten unter Benutzung von (2.27) die gesuchte Strömungsgleichung:

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{\varrho\, dh} = (\varkappa_\nu + \sigma_\nu) I_\nu(\delta) - (1 - \varepsilon_\nu) \sigma_\nu J_\nu - \varkappa_\nu B_\nu - \sigma_\nu \varepsilon_\nu B_\nu\,. \tag{9.29}$$

Ohne Berücksichtigung der wahren selektiven Absorption ($\varepsilon_\nu \equiv 0$) nimmt diese Gleichung die Gestalt

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{\varrho\, dh} = (\varkappa_\nu + \sigma_\nu) I_\nu(\vartheta) - \sigma_\nu J_\nu - \varkappa_\nu B_\nu \tag{9.30}$$

an. Die Gleichung (9.29) kann man noch abändern. Wir setzen

$$(1 - \varepsilon_\nu)\sigma_\nu = \sigma_\nu^0; \quad \sigma_\nu \varepsilon_\nu = \varkappa_\nu^0. \tag{9.31}$$

Dann schreibt sich die Gleichung (9.29):

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{\varrho\, dh} = \left(\varkappa_\nu + \sigma_\nu^0 + \varkappa_\nu^0\right) I_\nu(\vartheta) - \sigma_\nu^0 J_\nu - \left(\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0\right) B_\nu. \tag{9.32}$$

Die physikalische Bedeutung der eingeführten Koeffizienten σ_ν^0 und $\varkappa_\nu^0$ ist leicht einzusehen. Den Koeffizienten σ_ν^0 können wir als *selektiven Streukoeffizienten im Innern der Linie* bezeichnen, weil er nur Streuprozesse (ohne Einschluß der wahren Absorptionsprozesse) berücksichtigt. Der Koeffizient $\varkappa_\nu^0$ ist der *Koeffizient der wahren selektiven Absorption.*

Im folgenden Paragraphen betrachten wir die mathematischen Methoden, mit deren Hilfe die angeführten Gleichungen zu lösen sind.

§ 10. Die Lösung der Strömungsgleichungen für Frequenzen innerhalb der Absorptionslinien

1. Vorbemerkungen

Die Lösung der Strömungsgleichungen (9.29) (9.30) und (9.32) ist ein äußerst kompliziertes Problem. Erstens sind sämtliche physikalischen Parameter, die in diese Gleichungen eingehen, d.h. $I_\nu(\vartheta)$, $\varkappa_\nu$, σ_ν, ε_ν, B_ν und ϱ mit der Tiefe veränderlich, wobei die Abhängigkeit von h für jede Größe verschieden ist. Zweitens treten Komplikationen auf, die von der Abhängigkeit der Intensität $I_\nu(\vartheta)$ vom Winkel ϑ herrühren. Daher erweist es sich als unmöglich, unmittelbar eine universelle Lösung der betrachteten Gleichung abzuleiten. Mit Rücksicht hierauf müssen wir verschiedene vereinfachende Voraussetzungen einführen. Zunächst behandeln wir die Lösung der Strömungsgleichung unter der Voraussetzung, daß das Verhältnis der selektiven Absorptionskoeffizienten σ_ν zu dem kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu$ für jede Frequenz konstant ist. Diese Voraussetzung ist für die Mitten der starken Absorptionslinien mit hinreichender Genauigkeit erfüllt.

Eine zweite Methode ist die numerische Integration der Strömungsgleichung. Diese Methode führt zu genauen Ergebnissen, ist aber sehr mühsam.

Endlich führen wir die Lösung der Streuungsgleichung unter der Voraussetzung durch, daß sowohl der selektive Streukoeffizient σ_ν^0 als auch der Koef-

fizient der wahren selektiven Absorption $\varkappa_\nu^0$ gegenüber dem kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu$ sehr klein ist. Diese Lösung ist für die schwachen und für die Flügel der starken Absorptionslinien von großer Bedeutung.

2. Das Modell einer Atmosphäre mit konstantem Verhältnis des selektiven Absorptionskoeffizienten zum kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten

Wir führen folgende vereinfachende Voraussetzungen ein:

1. Wir nehmen an, daß in der gesamten Sternatmosphäre das Verhältnis

$$\eta_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\varkappa_\nu} \tag{10.1}$$

für jede betrachtete Frequenz konstant ist;

2. die gleiche Voraussetzung machen wir für ε_ν;

3. wir nehmen an, daß auf die PLANCKsche Funktion B_ν die lineare Entwicklung (8.10) anwendbar ist. Die optische Tiefe t_ν ist hier durch den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu$ definiert.

Wir dividieren (9.29) durch $\varkappa_\nu$ und erhalten unter Berücksichtung von (10.1)

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{d\tau_\nu} = (1+\eta_\nu)\, I_\nu(\vartheta) - (1-\varepsilon_\nu)\,\eta_\nu J_\nu - B_\nu - \eta_\nu B_\nu \varepsilon_\nu \tag{10.2}$$

mit

$$d\tau_\nu = \varkappa_\nu\, \varrho\, dh. \tag{10.3}$$

Wir multiplizieren die beiden Seiten von (10.2) zunächst mit $\cos\vartheta \frac{d\omega}{4\pi}$ und dann mit $\frac{d\omega}{4\pi}$ und integrieren in beiden Fällen das Resultat über den vollen Raumwinkel. Unter Berücksichtigung der Definitionen (2.5), (3.15) und (3.46) erhalten wir

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{1}{4}(1+\eta_\nu)\, H_\nu, \tag{10.4}$$

$$\frac{1}{4}\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu} = (1+\varepsilon_\nu\eta_\nu)\,(J_\nu - B_\nu). \tag{10.5}$$

Wir führen jetzt die erste mathematische Vereinfachung ein, indem wir annehmen, daß auch in dem jetzt betrachteten Fall die Gleichung (3.54) gültig ist. [Diese Gleichung ist völlig streng, wenn $I_\nu(\vartheta)$ in Form einer Summe mit einem konstanten Glied und einer gewissen ungeraden Funktion von $\cos\vartheta$ darstellbar ist.] Setzen wir die Richtigkeit von (3.54) voraus, so können wir die Gleichung (10.4) wie folgt umschreiben:

$$\frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{3}{4}(1+\eta_\nu)\, H_\nu. \tag{10.6}$$

Wir differenzieren (10.6) nach τ_ν und berücksichtigen dabei, daß auf Grund unserer obigen Voraussetzungen in der gesamten Sternatmosphäre $\eta_\nu = \text{const}$ ist:

$$\frac{d^2 J_\nu}{d\tau_\nu^2} = \frac{3}{4}(1 + \eta_\nu)\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu}. \tag{10.7}$$

Führen wir ferner in (10.7) an Stelle der Ableitung $\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu}$ den Ausdruck aus (10.5) ein, so erhalten wir

$$\frac{d^2 J_\nu}{d\tau_\nu^2} = q_\nu^2 (J_\nu - B_\nu), \tag{10.8}$$

wobei

$$q_\nu = \sqrt{3(1 + \eta_\nu)(1 + \varepsilon_\nu \eta_\nu)}. \tag{10.9}$$

Nach Voraussetzung ist B_ν eine lineare Funktion der optischen Tiefe; daher ist die zweite Ableitung von B_ν nach τ_ν gleich Null. Dies gibt uns die Möglichkeit, (10.8) in folgender Gestalt zu schreiben:

$$\frac{d^2 (J_\nu - B_\nu)}{d\tau_\nu^2} = q_\nu^2 (J_\nu - B_\nu). \tag{10.10}$$

Die Lösung der Gleichung (10.10) können wir in folgender Form angeben:

$$J_\nu - B_\nu = C_\nu e^{-q_\nu \tau_\nu}. \tag{10.11}$$

Das Glied $D_\nu e^{q_\nu \tau_\nu}$ auf der rechten Seite von (10.11) haben wir gar nicht erst hingeschrieben, weil nach unserer im sechsten Paragraphen vorgenommenen Ableitung J_ν für $\tau_\nu \to \infty$ gegen B_ν strebt und folglich $D_\nu \equiv 0$ ist.

Wir bestimmen die Konstante C_ν. Auf Grund von (10.11) und (8.10) können wir schreiben

$$J_\nu = a_\nu + b_\nu \tau_\nu + C_\nu e^{-q_\nu \tau_\nu}. \tag{10.12}$$

Wir differenzieren diesen Ausdruck nach τ_ν und setzen dieses Resultat in (10.6) ein. Dann erhalten wir für H_ν

$$H_\nu = \frac{4}{3}\frac{1}{(1 + \eta_\nu)}\{b_\nu - C_\nu q_\nu e^{-q_\nu \tau_\nu}\}. \tag{10.13}$$

An der Grenze der Sternatmosphäre, wo $\tau_\nu = 0$ ist, ist der Strom $H_\nu(0)$ gleich

$$H_\nu(0) = \frac{3}{4}\frac{1}{1 + \eta_\nu}\{b_\nu - C_\nu q_\nu\}. \tag{10.14}$$

Andererseits ist nach (10.12) $J_\nu(0)$ für $\tau_\nu = 0$ gleich

$$J_\nu(0) = a_\nu + C_\nu. \tag{10.15}$$

Als Grenzbedingung nehmen wir die folgende an:

$$2 J_\nu(0) = H_\nu(0). \tag{10.16}$$

Diese selbstverständlich nur näherungsweise gültige Gleichung folgt aus (3.50) und (3.51), wenn man berücksichtigt, daß an der Grenze der Atmosphäre $I'_\nu \equiv 0$ ist. Wir führen jetzt die Ausdrücke (10.14) und (10.15) in (10.16) ein und lösen die erhaltene Gleichung nach der Konstanten C_ν auf:

$$C_\nu = \frac{\frac{2}{3} b_\nu - a_\nu (1 + \eta_\nu)}{\frac{2}{3} q_\nu + (1 + \eta_\nu)}. \qquad (10.17)$$

Setzen wir diesen Ausdruck für C_ν in (10.14) ein, finden wir

$$H_\nu(0) = \frac{4}{3} \frac{b_\nu + a_\nu q_\nu}{1 + \eta_\nu + \frac{2}{3} q_\nu}. \qquad (10.18)$$

Dies ist der uns interessierende „zu beobachtende" Strom der Sternstrahlung innerhalb einer Linie von vorgegebener Frequenz. Den Strom H_ν^0, der dem bei derselben Frequenz interpolierten kontinuierlichen Spektrum entspricht, erhalten wir, wenn wir $\eta_\nu = 0$ setzen. Dies bedeutet, daß in den Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums keine selektive Schwächung der Strahlung auftritt. Nach (10.18) und (10.9) ist H_ν^0 (0) gleich

$$H_\nu^0 (0) = \frac{4\left(b_\nu + a_\nu \sqrt{3}\right)}{3\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}. \qquad (10.19)$$

Hieraus finden wir für die Restintensität r_ν

$$r_\nu = \frac{H_\nu(0)}{H_\nu^0(0)} = \frac{b_\nu + a_\nu q_\nu}{b_\nu + a_\nu \sqrt{3}} \frac{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}}{1 + \eta_\nu + \frac{2}{3} q_\nu}. \qquad (10.20)$$

Wir bemerken, daß wir bei der Ableitung dieses Ausdrucks für r_ν zwei nur näherungsweise gültige Gleichungen benutzt haben:

1. $J_\nu = 3 K_\nu$, 2. $H_\nu(0) = 2 J_\nu(0)$. Diese beiden Gleichungen haben wir der n § 3 betrachteten Methode der gemittelten Intensitäten entnommen. Eine exaktere Behandlung des Problems führt zu folgenden Schlüssen:

1. Die Näherung $J_\nu = 3 K_\nu$ ist für praktische Zwecke genau genug,

2. die Näherung $H_\nu(0) = 1{,}8\, J_\nu(0)$ ist genauer als $H_\nu(0) = 2\, J_\nu(0)$.

Um nach Formel (10.20) für eine beliebige Frequenz innerhalb der Linie r_ν zu finden, muß man für diese Frequenz die Größen η_ν, ε_ν und auch die Koeffizienten a_ν und b_ν kennen.

Im allgemeinen sind η_ν und ε_ν – bisweilen recht beträchtlich – mit der Tiefe veränderlich. Außerdem ist die Funktion B_ν im allgemeinen keine lineare Funktion von τ_ν, so daß die Voraussetzung ihrer Linearität häufig zu groben Entstellungen des Endergebnisses führt.

Der betrachtete Fall kommt in den zentralen Bereichen der mittleren und starken Absorptionslinien der Wirklichkeit recht nahe. Dagegen darf man dieses Modell von Rechts wegen nur in speziellen Fällen auf die Flügel anwenden.

Die Koeffizienten a_ν und b_ν müssen so gewählt werden, daß die lineare Näherung von B_ν das wirkliche Gesetz der Änderung von B_ν mit τ_ν am besten darstellt. Dieses Gesetz leitet man aus der Theorie der Sternphotosphäre ab.

Mit der konkreten Anwendung der Gleichung (10.20) werden wir uns in den folgenden Paragraphen befassen.

Weil die Formel (10.12) zusammen mit der Formel (10.17) die Abhängigkeit der Größe J_ν von τ_ν angibt, können wir die Gleichung (10.2) nicht nur für $H_\nu(0)$, sondern auch für $I_\nu(0, \vartheta)$ lösen. Dies geschieht auf dem gleichen Wege wie die Lösung der Gleichungen (3.12) und (3.17).

3. Die numerische Integration der Strömungsgleichungen

Ein grundlegender Mangel der oben betrachteten Lösung der Gleichung (10.2) ist die Einführung von vereinfachenden Voraussetzungen über die Funktionen η_ν, ε_ν und B_ν. Durch Vereinfachungen rein mathematischer Natur [$J_\nu = 3\,K_\nu$ und $2\,J_\nu(0) = H_\nu(0)$] entstehen in der Regel viel kleinere Fehler. Diesen Umstand können wir uns zunutze machen, indem wir die Gleichung (10.2) numerisch lösen. Wir gehen hierbei von den beiden Gleichungen (10.5) und (10.6) aus.

Wir wollen die Methode der numerischen Integration der Gleichung (10.2) betrachten. Die Abhängigkeit der Größe B_ν von τ_ν für eine vorgegebene Frequenz bestimmt man aus der Theorie der Photosphären, die für jedes Niveau in der Photosphäre die Temperatur T, die Drücke p und p_e, die Dichte ϱ, die optische Tiefe τ_ν (τ_ν wird hier durch den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten bestimmt) usw. angibt. Mit Hilfe dieser Parameter und entsprechender Ausdrücke für $\varkappa_\nu$ und σ_ν können wir für jedes Niveau die Größen η_ν und ε_ν unabhängig voneinander bestimmen.

Als Randbedingungen für die Integration der Gleichungen (10.5) und (10.6) nehmen wir am zweckmäßigsten die folgenden: $2\,J_\nu(0) = H_\nu(0)$ und für $\tau_\nu \to \infty$ soll J_ν gegen B_ν streben. Die Plausibilität der letzten Bedingung folgt aus den Ableitungen des § 6. Den Faktor 2 in der ersten Bedingung kann man – wie schon erwähnt wurde – durch den genaueren Faktor 1,8 ersetzen.

Die Integration der Gleichungen (10.5) und (10.6) geht folgendermaßen vor sich. Man gibt einige feste Werte für $J_\nu(0)$ (und folglich nach der Bedingung $2\,J_\nu(0) = H_\nu(0)$ auch für $H_\nu(0)$) vor und führt für jeden Wert die numerische Integration der Gleichungen (10.5) und (10.6) aus. Der Wert $J_\nu^*(0)$, bei dem J_ν für große τ_ν gegen B_ν strebt, ist der gesuchte Grenzwert. Der diesem Grenzwert $J_\nu^*(0)$ entsprechende Strom $\pi H_\nu(0)$ ist die Lösung der gestellten Aufgabe. Da wir auf dieselbe Weise die Änderung von J_ν mit τ_ν finden, können wir mit

Hilfe der Ausgangsgleichung auch die aus der Sonnenoberfläche austretende Intensität $I_\nu(0, \vartheta)$ für die verschiedenen Winkel ϑ ermitteln.

Die beschriebene numerische Methode besitzt im allgemeinen eine ausreichende Genauigkeit, um so mehr, als wir mit den erhaltenen Resultaten die Beziehung zwischen $J_\nu(0)$ und $H_\nu(0)$ bereits genauer berechnen und mit diesen Werten eine erneute Integration der Gleichungen (10.5) und (10.6) vornehmen können. Diese Methode ist jedoch deshalb unbequem, weil die numerische Integration einen großen Zeitaufwand erfordert. In der Tat muß die angegebene Integration der Gleichungen (10.5) und (10.6) für zahlreiche Punkte (Frequenzen) innerhalb der Linien ausgeführt werden. Daher ist eine Methode, die schneller zum Ziel führt, vorzuziehen.

4. Die Lösung der Strömungsgleichung für schwache Linien

Als dritte Methode behandeln wir die von Unsöld angegebene Lösung der Gleichungen (9.32) für schwache Linien und für die äußersten Bereiche der Flügel starker und mittlerer Linien. Für Restintensitäten $r_\nu < 0{,}85$ darf man diese Methode schon nicht mehr anwenden. Wie wir sehen werden, spielen in zahlreichen Fällen und insbesondere bei der Frage der chemischen Zusammensetzung der Photosphären die schwachen Linien eine außerordentlich wichtige Rolle. Daher erweist es sich als notwendig, die erwähnte Theorie ausführlicher zu behandeln.

Um die Gleichung (9.32) lösen zu können, führen wir eine Funktion S_ν ein, die durch die Gleichung

$$\sigma_\nu^0 J_\nu + \left(\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0\right) B_\nu = \left(\varkappa_\nu + \sigma_\nu^0 + \varkappa_\nu^0\right) S_\nu \tag{10.21}$$

definiert ist. Dann nimmt die Gleichung (9.32) die Gestalt

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{\varrho\, dh} = \left(\varkappa_\nu + \sigma_\nu^0 + \varkappa_\nu^0\right) I_\nu(\vartheta) - \left(\varkappa_\nu + \sigma_\nu^0 + \varkappa_\nu^0\right) S_\nu \tag{10.22}$$

an. Wir führen jetzt die optische Tiefe $dz_\nu (= dx_\nu)$ ein:

$$dz_\nu = \left(\varkappa_\nu + \sigma_\nu^0 + \varkappa_\nu^0\right) \varrho\, dh . \tag{10.23}$$

Dann schreibt sich (10.22):

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{dz_\nu} = I_\nu(\vartheta) - S_\nu(z_\nu) . \tag{10.24}$$

Wir leiten jetzt für $S_\nu(z_\nu)$ eine Integralgleichung her. Die Strömungsgleichung (10.24) ist mit der Grundgleichung (3.12) identisch. Daher können wir für die Intensitäten in den entsprechenden Halbkugeln die Lösungen (3.36) und (3.37) benutzen, indem wir für B_ν die Funktion D_ν einsetzen.

Als Ergebnis erhalten wir für J_ν

$$J_\nu = \int I_\nu(\vartheta)\frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(\vartheta, z_\nu)\sin\vartheta\, d\vartheta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} I'_\nu(\psi, z_\nu)\sin\psi\, d\psi\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{z_\nu}^{\infty} S_\nu(x_\nu)\, e^{-(x_\nu - z_\nu)\sec\vartheta}\sec\vartheta\, dx_\nu\right]\sin\vartheta\, d\vartheta\right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{z_\nu} S_\nu(x_\nu)\, e^{-(z_\nu - x_\nu)\sec\psi}\sec\psi\, dx_\nu\right]\sin\psi\, d\psi\right\}. \tag{10.25}$$

Wir vertauschen in (10.25) die Reihenfolge der Integrationen und führen durch die Substitutionen $\sec\vartheta = w$ und $\sec\psi = w$ an Stelle von ϑ und ψ die neue Veränderliche w ein. Dann können wir unter Beachtung der Definition (6.35) die Gleichung (10.25) umformen:

$$J_\nu = \frac{1}{2}\left\{\int_{z_\nu}^{\infty} S_\nu(x_\nu)\, Ei_1(x_\nu - z_\nu)\, dx_\nu + \int_0^{z_\nu} S_\nu(x_\nu)\, Ei_1(z_\nu - x_\nu)\, dx_\nu\right\}. \tag{10.26}$$

Den Ausdruck (10.26) können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$J_\nu(z_\nu) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} S_\nu(x_\nu)\, Ei_1(|z_\nu - x_\nu|)\, dx_\nu. \tag{10.27}$$

Führen wir diese Größe J_ν in die Formel (10.21) ein, so erhalten wir für S_ν die inhomogene Integralgleichung:

$$\left(\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0 + \sigma_\nu^0\right) S_\nu(z_\nu) = \left(\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0\right) B_\nu(z_\nu)$$

$$+ \frac{\sigma_\nu^0}{2}\int_0^{\infty} S_\nu(x_\nu)\, Ei_1(|z_\nu - x_\nu|)\, dx_\nu. \tag{10.28}$$

Für die schwachen Linien und auch für die äußeren Bereiche der Flügel der mittleren und starken Linien sind $\varkappa_\nu^0$ und σ_ν^0 beträchtlich kleiner als $\varkappa_\nu$. Folglich stellt das zweite Glied auf der rechten Seite von (10.28) nur eine kleine Korrektion dar. Daher führen wir in das fragliche Glied (unter dem Integralzeichen) einen Näherungsausdruck für S_ν ein, indem wir in (10.28) eben dieses zweite

„Korrektionsglied" der rechten Seite gleich Null setzen. Wir setzen also unter dem Integral folgenden Ausdruck für S_ν ein:

$$S_\nu(z_\nu) = \frac{\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0}{\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0 + \sigma_\nu^0} B_\nu(z_\nu). \tag{10.29}$$

Mit Rücksicht darauf, daß in unserem Fall $\varkappa_\nu^0 \ll \varkappa_\nu$ und $\sigma_\nu^0 \ll \varkappa_\nu$ ist, können wir annehmen, daß $S_\nu(z_\nu) \approx B_\nu(z_\nu)$ ist. Unter Benutzung dieses Ergebnisses können wir (10.28) so umschreiben:

$$\left(\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0 + \sigma_\nu^0\right) S_\nu(z_\nu) = \left(\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0\right) B_\nu(z_\nu) + \frac{\sigma_\nu^0}{2} \int\limits_0^\infty B_\nu(x_\nu)\, Ei_1(|z_\nu - x_\nu|)\, dx_\nu. \tag{10.30}$$

Wir rechnen jetzt den uns interessierenden Strahlungsstrom $H_\nu(0)$ auf der Sternoberfläche aus. Aus den Formeln (2.5) und (3.36), in denen wir $\tau_\nu = 0$ setzen und S_ν an Stelle von B_ν einführen müssen, finden wir

$$\frac{1}{2} H_\nu(0) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(0, \vartheta) \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_0^\infty S_\nu(z_\nu)\, e^{-z_\nu \sec\vartheta} \sec\vartheta\, dz_\nu. \tag{10.31}$$

Wir vertauschen die Reihenfolge der Integrationen und führen durch die Substitution $\sec\vartheta = w$ die neue Veränderliche w ein. Mit Hilfe von (6.35) erhalten wir

$$\frac{1}{2} H_\nu(0) = \int\limits_0^\infty S_\nu(z_\nu)\, Ei_2(z_\nu)\, dz_\nu. \tag{10.32}$$

Wir setzen $S_\nu(z_\nu)$ aus (10.30) in (10.32) ein:

$$\frac{1}{2} H_\nu(0) = \int\limits_0^\infty \frac{\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0}{\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0 + \sigma_\nu^0} B_\nu(z_\nu)\, Ei_2(z_\nu)\, dz_\nu + \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \frac{\sigma_\nu^0}{\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0 + \sigma_\nu^0} \left\{ \int\limits_0^\infty B_\nu(x_\nu)\, Ei_1(|z_\nu - x_\nu|)\, dx_\nu \right\} Ei_2(z_\nu)\, dz_\nu. \tag{10.33}$$

In (10.33) nehmen wir folgende Umformungen vor: Im ersten Integral dieses Ausdruckes führen wir an Stelle von dz_ν die Differentiale $d\tau_\nu$ und $d\tau_\nu^0$ ein:

$$\frac{\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0}{\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0 + \sigma_\nu^0} dz_\nu = \varkappa_\nu \varrho\, dh + \varkappa_\nu^0 \varrho\, dh = d\tau_\nu + d\tau_\nu^0. \tag{10.34}$$

Ferner benutzen wir folgenden Differentialausdruck, der aus der Bestimmungsgleichung (6.35) folgt:

$$\frac{d\,E\,i_n(x)}{d\,x} = -\,E\,i_{n-1}(x)\,. \tag{10.35}$$

Auf Grund dieses Ausdruckes können wir schreiben:

$$E\,i_2(x + \Delta x) = E\,i_2(x) - E\,i_1(x)\,\Delta\,x\,. \tag{10.35a}$$

Wir führen jetzt durch die Beziehung $d\tau_\nu^\sigma = \sigma_\nu^0\,\varrho\,d\,h$ die optische Tiefe τ_ν^σ ein und berücksichtigen, daß in unserem Fall $\tau_\nu^0 + \tau_\nu^\sigma \ll \tau_\nu$ ist. Mit (10.35a) erhalten wir

$$E\,i_2(z_\nu) = E\,i_2\left(\tau_\nu + \tau_\nu^0 + \tau_0^\sigma\right) = E\,i_2(\tau_\nu) - \left(\tau_\nu^0 + \tau_\nu^0\right)E\,i_1(\tau_\nu) + \cdots \tag{10.36}$$

Diesen Ausdruck für $E\,i_2(z_\nu)$ setzen wir in das erste Integral der Formel (10.33) ein und beachten gleichzeitig die Gleichung (10.34). Ferner erinnern wir uns im zweiten Integral der Formel (10.33) an die Bestimmungsgleichung (10.23) und schreiben mit Rücksicht darauf, daß $\tau_\nu^0 + \tau_\nu^\sigma \ll \tau_\nu$ ist, τ_ν statt z_ν. Als Ergebnis erhalten wir

$$\frac{1}{2}\,H_\nu(0) = \int\limits_0^\infty B_\nu(\tau_\nu)\,E\,i_2(\tau_\nu)\,d\tau_\nu - \int\limits_0^\infty B_\nu(\tau_\nu)\,E i_1(\tau_\nu)\left(\tau_\nu^0 + \tau_\nu^\sigma\right)d\tau_\nu$$

$$+ \int\limits_0^\infty B_\nu(\tau_\nu)\,E\,i_2\,d\tau_\nu^0 + \int\limits_0^\infty \frac{1}{2}\,E\,i_2(\tau_\nu)\,d\tau_\nu^\sigma \int\limits_0^\infty B_\nu(x_\nu)\,E\,i_1(|\tau_\nu - x_\nu|)\,d x_\nu\,. \tag{10.37}$$

Bei der Umformung des ersten Integrals in der Formel (10.33) haben wir aus verständlichen Gründen in dem Ausdruck $\left(\tau_\nu^0 + \tau_\nu^\sigma\right)\left(\varkappa_\nu + \varkappa_\nu^0\right)\varrho\,d\,h$ das zweite Glied in der zweiten Klammer vernachlässigt, d.h. an Stelle dieses Ausdruckes $\left(\tau_\nu^0 + \tau_\nu^\sigma\right)d\tau_\nu$ geschrieben.

Wir nehmen jetzt die letzte Umformung des Ausdruckes für $H_\nu(0)$ vor, und zwar führen wir zur Berechnung des zweiten Integrals der rechten Seite von (10.37) folgende von τ_ν abhängende Funktion ein:

$$\Phi(\tau_\nu) = \int\limits_{\tau_\nu}^\infty B_\nu(\tau_\nu)\,E\,i_1(\tau_\nu)\,d\tau_\nu\,. \tag{10.38}$$

Dann ergibt die partielle Integration

$$\int\limits_0^\infty \tau_\nu^\sigma\,B_\nu(\tau_\nu)\,E\,i_1(\tau_\nu)\,d\tau_\nu = -\tau_\nu^\sigma\,\Phi(\tau_\nu)\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \Phi(\tau_\nu)\,d\tau_\nu^\sigma = \int\limits_0^\infty \Phi(\tau_\nu)\,d\tau_\nu^\sigma\,. \tag{10.39}$$

Einen analogen Ausdruck erhalten wir auch für das Glied mit τ_ν^0. Als Ergebnis

der angegebenen Umformungen nimmt der Ausdruck (10.37) die Gestalt

$$\frac{1}{2} H_\nu(0) = \int_0^\infty B_\nu(\tau_\nu)\, Ei_2(\tau_\nu)\, d\tau_\nu - \int_0^\infty [\Phi(\tau_\nu) - B_\nu(\tau_\nu)\, Ei_2(\tau_\nu)]\, d\tau_\nu^\sigma$$

$$- \int_0^\infty \left\{ \Phi(\tau_\nu) - \frac{1}{2} Ei_2(\tau_\nu) \int_0^\infty B_\nu(x_\nu)\, Ei_1(|\tau_\nu - x_\nu|)\, dx_\nu \right\} d\tau_\nu^\sigma \tag{10.40}$$

an.

Setzen wir $\varkappa_\nu^0$ und σ_ν^0 gleich Null, so erhalten wir offenbar den Strahlungsstrom $H_\nu^0(0)$ für die kontinuierliche Strahlung, d.h. für den Fall, daß in der vorgegebenen Frequenz keine selektive Streuung und Absorption auftritt. Aus (10.40) finden wir

$$\frac{1}{2} H_\nu^0(0) = \int_0^\infty B_\nu(\tau_\nu)\, Ei_2(\tau_\nu)\, d\tau_\nu . \tag{10.41}$$

Wir schreiben jetzt

$$d\tau_\nu^0 = \frac{\varkappa_\nu^0}{\varkappa_\nu} d\tau_\nu \quad \text{und} \quad d\tau_\nu^\sigma = \frac{\sigma_\nu^0}{\varkappa_\nu} d\tau_\nu \tag{10.42}$$

und erhalten für die Linientiefe $R_\nu = 1 - r_\nu$ folgenden Ausdruck:

$$R_\nu = \frac{H_\nu^0(0) - H_\nu(0)}{H_\nu^0(0)} = \int_0^\infty G_1(\tau_\nu)\, d\tau_\nu^0 + \int_0^\infty G_2(\tau_\nu)\, d\tau^\sigma$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varkappa_\nu^0}{\varkappa_\nu} G_1(\tau_\nu)\, d\tau_\nu + \int_0^\infty \frac{\sigma_\nu^0}{\varkappa_\nu} G_2(\tau_\nu)\, d\tau_\nu , \tag{10.43}$$

wobei $G_1(\tau_\nu)$ und $G_2(\tau_\nu)$ Gewichtsfunktionen sind, die nur durch die Abhängigkeit der Größe B_ν von τ_ν bestimmt sind:

$$G_1(\tau_\nu) = \frac{\Phi(\tau_\nu) - B_\nu(\tau_\nu)\, Ei_2(\tau_\nu)}{\int_0^\infty B_\nu(\tau_\nu)\, Ei_2(\tau_\nu)\, d\tau_\nu} , \tag{10.44}$$

$$G_2(\tau_\nu) = \frac{\Phi(\tau_\nu) - \frac{1}{2} Ei_2(\tau_\nu) \int_0^\infty B_\nu(x_\nu)\, Ei_1(|\tau_\nu - x_\nu|)\, dx_\nu}{\int_0^\infty B_\nu(\tau_\nu)\, Ei_2(\tau_\nu)\, d\tau_\nu} . \tag{10.45}$$

Die Abhängigkeit der Größe $B_\nu(\tau_\nu)$ von τ_ν und folglich auch der Funktion $G_1(\tau_\nu)$ und $G_2(\tau_\nu)$ ergibt sich aus der Theorie der Photosphären. Für die Sonne kann die fragliche Abhängigkeit aus dem Gesetz der Randverdunkelung (für

die verschiedenen Frequenzen, siehe § 7) ermittelt werden, das man aus den Beobachtungen ableitet. Die Quotienten $\frac{\overset{0}{\varkappa}_\nu}{\varkappa_\nu}$ und $\frac{\overset{0}{\sigma}_\nu}{\varkappa_\nu}$ sind bekannte Funktionen (siehe § 11) der Dichte, des Druckes, der Temperatur usw., wobei der Verlauf dieser physikalischen Parameter ihrerseits aus der Theorie der Photosphäre bekannt sein muß. Somit reduziert sich bei vorgegebenem $G_1(\tau_\nu)$ und $G_2(\tau_\nu)$ die Berechnung von R_ν für eine vorgegebene Frequenz auf die einfache Ausrechnung der Integrale aus der Formel (10.43), wodurch das Studium der Konturen außerordentlich erleichtert wird. Wir erinnern jedoch daran, daß die betrachtete Methode nur auf die Flügel der mittleren und der starken Linien sowie auf die schwachen Linien anwendbar ist (im allgemeinen auf alle Fälle, für die $R_\nu \leqslant 0{,}15$ ist).

Die Integralgleichung (10.30) für die Funktion $S(z_\nu)$ kann man nicht nur für die Berechnung des Strahlungsstromes $H_\nu(0)$ an der Begrenzung des Sterns, sondern auch für die Berechnung der austretenden Intensität $I_\nu(\vartheta, 0)$ benutzen, d.h. für die Berechnung der Tiefe $R_\nu(\vartheta)$, die dem Austrittswinkel ϑ entspricht.

Außer den hier dargestellten Methoden zur Lösung der Strömungsgleichungen (9.29), (9.30) und (9.32) sind von zahlreichen Autoren die verschiedenartigsten Methoden vorgeschlagen worden. Der überwiegenden Zahl dieser Methoden sind jedoch vereinfachende physikalische oder mathematische Voraussetzungen zugrunde gelegt, so daß sie nur von begrenztem Interesse sind. In den meisten Fällen werden Voraussetzungen über eine lineare Entwicklung der Funktion B_ν und über die Konstanz von η_ν und ε_ν verwendet. Diese Ausnahmen unterscheiden sich aber – wie wir schon erwähnt haben – stark von den wirklichen Verhältnissen.

§ 11. Die selektiven Absorptionskoeffizienten

1. Der Zusammenhang zwischen den Absorptionskoeffizienten und den Übergangswahrscheinlichkeiten

Im vorliegenden Paragraphen behandeln wir die selektiven Absorptionskoeffizienten, d.h. die Absorptionskoeffizienten in den Spektrallinien. Dieses Problem führt uns auf die Frage nach den Faktoren, die die endliche Breite der Absorptionslinie in den Spektren der Sterne (und der Sonne) bestimmen. Die selektiven Absorptionskoeffizienten sind Funktionen, die die Verteilung der Gesamtzahl der Absorptionsprozesse $n_i B_{ik} \varrho_{\nu_{ik}}$ in einem endlichen Frequenzintervall angeben.

Im Hinblick auf die weiteren Anwendungen leiten wir für die Absorptionskoeffizienten eine Integralformel ab, die für die Astrophysik von großer Bedeutung ist.

Seien n_i und n_k die Anzahlen der im i-ten und im k-ten Anregungszustand befindlichen Atome in 1 cm³. Sei ferner s_ν der atomare selektive Absorptionskoeffizient, der dem Übergang $i \to k$ entspricht. Die auf die betrachteten Atome auffallende Strahlung habe die Dichte ϱ_ν. Wir nehmen an, daß in dem

(gewöhnlich sehr schmalen) Bereich, in dem s_ν hinreichend groß ist, die Strahlungsdichte sich nur schwach mit der Frequenz ändert. Wir erinnern daran, daß diese Bedingungen auch bei Anwendung der Übergangswahrscheinlichkeiten A_{ik}, B_{ik} und B_{ki} erfüllt sein müssen.

Wir schreiben einen Ausdruck für die Anzahl der Übergänge $i \to k$ an, die in 1 sec in 1 cm³ vor sich gehen. Unter Zuhilfenahme der Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt sich diese Zahl nach der Formel (5.38):

$$n_{i\to k} = n_i \varrho_{\nu_{ik}} B_{ik}. \tag{11.1}$$

Jetzt schreiben wir den Ausdruck für $n_{i\to k}$ unter Benutzung des Koeffizienten s_ν. Für die Anzahl der Absorptionsakte $(n_{i\to k})_\nu d\nu$ in dem Frequenzintervall $d\nu$ können wir nach Formel (5.47)

$$(n_{i\to k})_\nu d\nu = n_i s_\nu \frac{c\,d\nu}{h\nu} \varrho_\nu \tag{11.2}$$

schreiben. Um $n_{i\to k}$ zu erhalten, müssen wir diese Gleichung über die Frequenz integrieren. Als Ergebnis erhalten wir

$$n_{i\to k} = \int (n_{i\to k})_\nu d\nu = n_i \frac{c}{h} \int \varrho_\nu \frac{s_\nu}{\nu} d\nu. \tag{11.3}$$

Ferner können wir wegen der Schmalheit des Bereiches, in dem s_ν hinreichend groß ist, in (11.3) ϱ_ν und ν vor das Integralzeichen setzen. Dies ergibt

$$n_{i\to k} = n_i \frac{c}{h\nu_{ik}} \varrho_{\nu_{ik}} \int s_\nu d_\nu. \tag{11.4}$$

Aus dem Vergleich von (11.1) und (11.4) folgt

$$\int s_\nu d\nu = \frac{h\nu_{ik}}{c} B_{ik}. \tag{11.5}$$

Nach dieser Formel ist das Integral über den Absorptionskoeffizienten eine konstante Größe und hängt folglich nicht von dem Mechanismus ab, der die vorgegebene Linie verbreitert.

Wir befassen uns jetzt mit den Prozessen, die in der Hauptsache die Gestalt von s_ν bestimmen. Hierbei werden wir außer von quantenmechanischen auch von klassischen Vorstellungen Gebrauch machen.

2. Die Strahlungsdämpfung

Wir betrachten nun die Dämpfung eines klassischen Atom-Oszillators infolge Strahlung.

Nach den Vorstellungen der klassischen Elektrodynamik nimmt die von einem Oszillator ausgestrahlte Energie nach dem Gesetz

$$E = E_0 e^{-\gamma_0 t} \tag{11.6}$$

ab, wobei

$$\gamma_0 = \frac{8\pi^2 e^2 \gamma_0^2}{3 m_e c^3} \tag{11.7}$$

als Dämpfungskonstante bezeichnet wird. Die von einem derart gedämpften Oszillator ausgestrahlten Wellen erzeugen keine unendlich dünne Spektrallinie, sondern eine Linie von endlicher Breite. Eine streng monochromatische Strahlung (d.h. eine absolut scharfe Emissionslinie) erhalten wir nur in dem Fall, wenn wir es mit einer unendlichen Folge von Wellen konstanter Amplituden zu tun haben.

Die wirkliche Verteilung der Strahlung über die Frequenzen gewinnt man, wenn man die fraglichen Schwingungen in rein harmonische Bestandteile zerlegt (mit Hilfe des Fourierschen Integrals) [11]. Dementsprechend ist auch der Absorptionsprozeß nichtmonochromatisch. Die absorbierte Energie zeigt innerhalb eines endlichen Frequenzintervalles eine bestimmte Verteilung. Die klassische Dispersionstheorie liefert für den selektiven Absorptionskoeffizienten folgenden Ausdruck:

$$s_\nu = \frac{e^2}{m_e c} \frac{\gamma_0}{4\pi} \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\gamma_0}{4\pi}\right)^2}, \tag{11.8}$$

wobei ν_0 die *Eigenfrequenz* des Oszillators und γ_0 die durch die Formel (11.7) definierte Dämpfungskonstante ist.

Der angeschriebene Absorptionskoeffizient bezieht sich auf einen Oszillator. Außerdem ist die Formel (11.8) nur für ein hinreichend schmales Frequenzintervall innerhalb der Absorptionslinie, wo ν in der Nähe von ν_0 liegt, gültig. (Wir merken an, daß man für die Emission eines Oszillators die gleiche Abhängigkeit von der Frequenz erhält.)

γ_0 wird als *natürliche Linienbreite* bezeichnet. Dies hängt damit zusammen, daß der Absorptionskoeffizient in der Skala der Kreisfrequenzen $\omega = 2\pi\nu$ – wie aus (11.8) folgt – im Abstand $\omega = \omega_0 = \frac{\gamma_0}{2}$ auf die Hälfte abnimmt. Verdoppeln wir diese Größe, um die zu beiden Seiten der Frequenz ν_0 liegenden Teile der Kontur s_ν zu berücksichtigen, so erhalten wir γ_0. Daher wird γ_0 bisweilen auch als *ganze Halbwertsbreite der Absorptionslinie* bezeichnet.

Wenn wir die Größe γ_0 mit Hilfe von (11.7) und (4.38) in der Wellenlängenskala ausdrücken, so erweist sie sich als von λ unabhängig und ist gleich $1{,}18 \cdot 10^{-4}$ Å.

Die Größe τ_0, die gleich der reziproken Dämpfungskonstante γ_0 ist, bezeichnet man als *Abklingzeit* des Oszillators. Der Sinn dieser Definitionen wird aus der Formel (11.6) deutlich. Für die Natriumlinien D_1 und D_2, deren mittlere Wellenlänge $\lambda = 5893$ Å beträgt, ist die nach (11.7) berechnete Abklingzeit gleich $1{,}58 \cdot 10^{-8}$ sec.

Bei hinreichend hohen Drücken beginnt neben der Strahlungsdämpfung die Stoßdämpfung des Oszillators eine wichtige Rolle zu spielen. Bei jedem Zu-

sammenstoß setzt die Oszillatorschwingung für einen Augenblick aus, und fast unmittelbar darauf wird eine neue Schwingung mit willkürlicher Phase und Amplitude angeregt. Mit anderen Worten, durch Zusammenstöße wird der ausgestrahlte Wellenzug verkürzt, und dies trägt ebenfalls dazu bei, daß die Spektrallinien nicht monochromatisch sind.

Entsprechende Untersuchungen [30, § 87] zeigen, daß die Stoßdämpfung (im Augenblick ohne Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung) auf einen Absorptionskoeffizienten von genau dem gleichen Aussehen wie (11.8) führt. Jedoch ist in diesem Fall an Stelle von γ_0 eine neue Dämpfungskonstante, die Stoßdämpfungskonstante γ_c, einzuführen. Die Konstante γ_c hängt mit der mittleren Zeit τ_c zwischen zwei Zusammenstößen durch die Beziehung

$$\gamma_c = \frac{2}{\tau_c} \tag{11.9}$$

zusammen (während wir für die Strahlungsdämpfung die Beziehung

$$\gamma_0 = \frac{1}{\tau_0}$$

gefunden haben).

Wenn man endlich die Strahlungsdämpfung und die Stoßdämpfung gleichzeitig berücksichtigen will, bleibt das Aussehen des Absorptionskoeffizienten das gleiche wie in Formel (11.8); es ist in diese Formel nur die effektive Dämpfungskonstante γ einzuführen, die durch die Gleichung

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_c \tag{11.10}$$

definiert ist.

Die Stöße spielen bei der Entstehung der Absorptionslinien in den Sternspektren in vielen Fällen eine große Rolle.

In allen angeführten Fällen ist der Absorptionskoeffizient s_ν, der durch ähnliche Formeln wie (11.8) bestimmt wird, auf einen einzigen Oszillator bezogen. Der Übergang von der Anzahl $\bar{n}$ der Oszillatoren auf die Anzahl n der in dem Zustand befindlichen Atome, von dem die Übergänge, die eine vorgegebene Absorptionslinie erzeugen, ausgehen, vollzieht sich unter Einführung der sogenannten *Oszillatorenstärke* f:

$$\bar{n} = f n. \tag{11.11}$$

Somit gibt die Oszillatorenstärke f die Anzahl der klassischen Oszillatoren an, die der Absorptionswirkung eines Atoms in einer vorgegebenen Linie entsprechen.

Es zeigt sich, daß sich in diesem Fall der auf ein Atom bezogene Absorptionskoeffizient durch eine Formel vom gleichen Typ wie (11.8) ausdrückt, nur mit dem Unterschied, daß man $\gamma_0 + \gamma_c$ an Stelle von γ_0 schreiben und den ganzen Ausdruck mit der Oszillatorenstärke, die der vorgegebenen Linie entspricht, multiplizieren muß:

$$s_\nu = \frac{e^2}{m_e c}\frac{\gamma}{4\pi}\frac{f}{(\nu-\nu_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2}. \tag{11.12}$$

Wenn wir beide Seiten der Gleichung (11.12) über die Frequenz von 0 bis $+\infty$ ntegrieren, finden wir

$$\int_0^\infty s_\nu \, d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f. \tag{11.13}$$

Der Vergleich von (11.5) mit (11.13) liefert

$$f_{ik} = \frac{m_e h \nu_{ik}}{\pi e^2} B_{ik}, \tag{11.14}$$

oder nach (5.40) und (11.7)

$$f_{ik} = \frac{g_k}{g_i} \frac{m_e c^3}{8\pi^2 e^2 \nu_{ik}^2} A_{ki} = \frac{g_k}{g_i} \frac{A_{ki}}{3\gamma_0}. \tag{11.15}$$

Um hervorzuheben, daß es sich um die Übergänge $i \to k$ handelt, haben wir die Oszillatorenstärke mit dem Index ik versehen.

Jetzt betrachten wir das Problem der Linienverbreiterung vom Standpunkt der modernen Quantenmechanik aus.

Seien n_k angeregte Atome in 1 cm³ enthalten. Unter Vernachlässigung der erzwungenen Übergänge (sowohl nach unten als auch nach oben, vom k-ten Niveau aus gerechnet) können wir als Gesetz für die Verminderung von n_k mit der Zeit den Ausdruck

$$\frac{dn_k}{dt} = -n_k \sum_i A_{ki} \tag{11.16}$$

angeben. Die Integration dieses Ausdruckes liefert

$$n_k = (n_k)_0 \, e^{-\gamma_k t}, \tag{11.17}$$

wobei $(n_k)_0$ die Zahl n_k zur Zeit $t = 0$ und

$$\gamma_k = \sum_i A_{ki} = \frac{1}{\tau_k} \tag{11.18}$$

ist.

Wenn wir beide Seiten von (11.17) mit $\sum_i A_{ki} h \nu_{ik}$ multiplizieren, so ist das Gesetz für die Abnahme der gesamten Anregungsenergie dem klassischen Gesetz (11.6) vollkommen analog. Daher können wir auch hier γ_k als *Dämpfungskonstante* und τ_k als *Abklingzeit* bezeichnen.

Gleichzeitig ist τ_k die mittlere Lebensdauer eines Atoms im k-ten Zustand oder die *mittlere Lebensdauer* des k-ten Zustandes schlechthin. Tatsächlich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die mittlere Zeitspanne, während der sich das Atom im k-ten Anregungszustand befindet, zwischen t und $t + dt$ liegt, nach (11.17) dem Differential $e^{-\gamma_k t} \gamma_k \, dt$ proportional. Folglich ist die mittlere

(gewichtete) Lebensdauer $\bar{t}_k$ eines Atoms im k-ten Anregungszustand gleich

$$\bar{t}_k = \frac{\int\limits_0^\infty t e^{-\gamma_k t} \gamma_k dt}{\int\limits_0^\infty e^{-\gamma_k t} \gamma_k dt} = \frac{1}{\gamma_k} = \tau_k, \tag{11.19}$$

was zu beweisen war.

Mit Hilfe der Formel (11.18) kann man τ_k und damit γ_k bestimmen, wenn für alle tieferliegenden Übergänge die A_{ki} bekannt sind. Wenn sich dagegen die Atome in einem hinreichend starken Strahlungsfeld (hohe Strahlungstemperatur) befinden, so sind nicht nur die spontanen Übergänge vom k-ten Niveau nach unten, sondern auch die unter der Einwirkung der Strahlung stattfindenden Übergänge nach oben und nach unten (erzwungene Emission) zu berücksichtigen. Als Ergebnis können wir an Stelle von (11,18) für τ_k und γ_k schreiben:

$$\gamma_k = \frac{1}{\tau_k} = \sum_i A_{ki} + \sum_i \varrho_{\nu_{ik}} B_{ki} + \sum_\sigma \varrho_{\nu_{\sigma k}} B_{k\sigma} + Z^k_{\text{ph. ion}}\,. \tag{11.20}$$

Die erste Summe auf der rechten Seite von (11.20) entspricht den spontanen Übergängen vom k-ten Niveau nach unten, die zweite den erzwungenen Übergängen nach unten, die dritte Summe gibt alle möglichen (diskreten) Übergänge vom k-ten Niveau nach oben an, und das letzte Glied auf der rechten Seite von (11.20) endlich berücksichtigt die der Photoionisation entsprechenden Übergänge vom k-ten Niveau aus. Die letzte Größe ist mit Hilfe des Ausdruckes (8.6) zu berechnen, der natürlich vorher durch $n_{r,k}$ zu dividieren ist.

Die Endlichkeit der mittleren Lebensdauer eines Atoms im angeregten Zustand führt in Übereinstimmung mit der sogenannten *Unbestimmtheitsrelation* zu einer Verschmierung eines vorgegebenen Energieniveaus. Hierbei ist, wie aus der Formel

$$\Delta E\, \Delta t \approx \frac{h}{2\pi} \tag{11.21}$$

hervorgeht, die Verschmierung eines beliebigen Niveaus um so größer, je kleiner die mittlere Lebensdauer des Atoms für dieses Niveau ist.

Wenn die Anregung eines Atoms im k-ten Zustand unter der Einwirkung von Licht mit konstanter Intensität in einem vorgegebenen Frequenzintervall oder durch Zusammenstöße mit Teilchen, die alle möglichen Geschwindigkeiten besitzen, vor sich geht, so ist bei einer endlichen mittleren Lebensdauer des Atoms die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das im k-ten Zustand befindliche Atom eine zwischen E und $E + dE$ liegende Energie besitzt, gleich

$$W(E)\, dE = \frac{\gamma_k}{h} \frac{dE}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 (E - E_k)^2 + \left(\frac{\gamma_k}{2}\right)^2}\,. \tag{11.22}$$

Hierbei ist (11.22) so normiert, daß $\int W(E)\,dE = 1$.

Wenn wir es mit jetzt Übergängen zwischen den Niveaus i und k zu tun haben, wobei wir auf jeden Übergang die Verteilung (11.22) anwenden können, so ist – wie man zeigen kann [2, S. 192] – die Wahrscheinlichkeit für eine Emission oder Absorption eines Quants im Frequenzbereich von ν bis $\nu + d\nu$ gleich

$$P_\nu d\nu = \frac{(\gamma_k + \gamma_i)\,d\nu}{4\pi^2(\nu - \nu_{ik})^2 + \frac{1}{4}(\gamma_k + \gamma_i)^2}. \tag{11.23}$$

Folglich liegt hier der gleiche Verlauf wie im Fall (11.12) vor, doch mit $\gamma_0 = \gamma_i + \gamma_k$.

Wenn wir endlich die Normierungsbedingung (11.13) für den Koeffizienten s_ν, der P_ν proportional ist, berücksichtigen, kommen wir zu dem Schluß, daß man für s_ν den klassischen Ausdruck (11.12) benutzen kann, wobei man jedoch die Größe γ_0 durch die Summe der Konstanten γ_i und γ_k ersetzen muß. Daher können wir vom Standpunkt der Quantentheorie für s_ν

$$s_\nu = \frac{e^2}{m_e c}\,\delta_{ik}\frac{f}{(\nu - \nu_{ik})^2 + \delta_{ik}^2} = \frac{c^2}{8\pi^2\nu_{ik}^2}\,\frac{g_k}{g_i}\,\frac{A_{ki}\delta_{ik}}{(\nu - \nu_{ik})^2 + \delta_{ik}^2} \tag{11.24}$$

schreiben, wobei

$$\delta_{ik} = \frac{\Gamma_{ik}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}(\gamma_i + \gamma_k + \gamma_c) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_k} + \frac{2}{\tau_c}\right) \tag{11.25}$$

ist.

Auf diese Weise wird in der Formel der Quantenmechanik auch das Auftreten der Dämpfung in dem unteren Niveau berücksichtigt.

Wenn das untere Niveau i das Grundniveau des Atoms ist, so ist seine mittlere Lebensdauer groß und die Konstante γ_i folglich klein; daher kann man das Grundniveau als scharf ansehen (wenn natürlich das Strahlungsfeld in den Frequenzen der Übergänge von einem niederen Zustand zu einem höheren nicht zu groß ist). Somit entfällt für die Linien, die vom Grundniveau aus entstehen, das erste Glied in den Klammern von (11.25). Eine schematische Darstellung des Grundniveaus und zweier angeregter Niveaus k und l ist in Abb. 24 angegeben. Die Verschmierung der Energie in den Niveaus k und l ist auf der Abbildung durch die Gesamtheit der parallelen Linie dargestellt.

Hier ist die geeignete Stelle, auf folgende wichtige Tatsache hinzuweisen. Wie aus § 9 folgt, spielen in der Theorie der Absorptionslinien in den Sternspektren neben den Prozessen der selektiven Absorption die Prozesse der Reemission der absorbierten Energie eine überaus wichtige Rolle. Hierbei haben wir in § 9 und in § 10 angenommen, daß wir es mit einer kohärenten Reemission, bei der dem absorbierten Quant ein reemittiertes Quant mit genau derselben Frequenz entspricht, zu tun haben. Es ist vollkommen klar, daß diese Bedingung für die Übergänge zwischen angeregten Niveaus nicht erfüllt sein kann. Aus Abb. 24 folgt, daß die Absorption eines Quants mit der Frequenz ν'

zu der Reemission eines Quants mit der Frequenz ν'' führen kann, die sich von der Frequenz ν' unterscheidet, wenn sie auch annähernd mit ihr übereinstimmt. In diesem Fall sind die Strömungsgleichungen (9.6), (9.29), (9.30) und (9.32) und der grundlegende Ausdruck für den Emissionskoeffizienten (Streukoeffizienten) nicht mehr richtig. Aus Abb. 24 folgt, daß die Kohärenz der Strahlung nur für die Resonanzlinien bestehen bleibt, d.h. für die Linien, deren oberes Niveau das dem Grundniveau benachbarte ist. In diesem Fall werden die Frequenzen der absorbierten und der emittierten Quanten einander gleich sein. Allerdings gibt es auch hier Einflüsse, die – wie wir in § 14 sehen werden – der Kohärenz entgegenwirken. Für die Resonanzlinien sind jedoch die Abweichungen von der Kohärenz am kleinsten. Die gesamte heutige Theorie der Absorptionslinien ist faktisch für kohärente Strahlung entwickelt. Daher werden wir es im Augenblick nur mit diesem Fall zu tun haben und uns in der Hauptsache mit den Resonanzlinien oder auf jeden Fall mit den Linien befassen, die vom Grundniveau aus entstehen. Im letzten Fall kann die Kohärenz z. B. dadurch gestört werden, daß ein Elektron, das vom Grundniveau auf irgendein angeregtes Niveau l gehoben wird, nicht auf das Grundniveau selbst, sondern auf ein angeregtes, doch niedrigeres Niveau k zurückfällt (siehe Abb. 24), und die Frequenzen des absorbierten und des emittierten Quants entsprechen einfach verschiedenen Linien des vorliegenden Atoms [2, § 46].

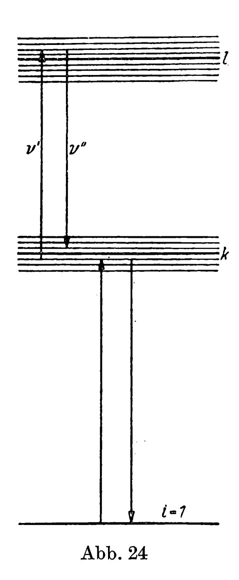


Abb. 24

3. Die Wärmebewegung und die Turbulenz der Atome

Wir betrachten jetzt einen weiteren Prozeß, der zu einer Linienverbreiterung führt, nämlich den Doppler-Effekt, der auf die Bewegung der absorbierenden und emittierenden Atome zurückzuführen ist. Für die Bewegung bestehen zwei Möglichkeiten:

1. Die Wärmebewegung der Atome; da an der Absorption des Lichtes stets eine große Anzahl von Atomen beteiligt ist, deren thermische Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung sehr verschiedene Werte besitzen, tritt unausbleiblich eine Verbreiterung der Absorptionslinien auf (selbst wenn eine Strahlungs- oder Stoßdämpfung fehlen sollte);

2. Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, ist die Materie in den Sternphotosphären (das Gas) durch das Auftreten von irregulären Bewegungen der Gasmassen nach allen nur möglichen Richtungen gekennzeichnet. Offenbar nehmen Gasmassen (einzelne Verdichtungen) von verschiedenartigster Ausdehnung an der Bewegung teil. Diese Bewegungen erhielten in der Astrophysik

die Bezeichnung „turbulente“ Bewegungen, obwohl die Natur dieser „Turbulenz“ in zahlreichen Fällen von der Natur der in der Hydrodynamik betrachteten gewöhnlichen Turbulenz verschieden sein kann. Es versteht sich von selbst, daß auch diese Bewegungen, die den thermischen Bewegungen ähneln, zu einer Verbreiterung der Absorptionslinien führen.

Wir betrachten zunächst den thermischen DOPPLER-Effekt und nehmen an, daß keine Strahlungs- oder Stoßdämpfung vorhanden ist, d. h., daß in Formel (11.24) $\delta_{ik} = 0$ ist.

Die Geschwindigkeitskomponente eines Atoms in Richtung des Sehstrahls sei gleich v. Dann ist beim Vorhandensein einer MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung der Bruchteil der Atome, deren radiale Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ liegen, gleich

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \frac{dv}{v_0} \tag{11.26}$$

(das Integral der rechten Seite von (11.26) über alle v von $-\infty$ bis $+\infty$ ist gleich Eins), wobei $\frac{1}{2} v_0^2$ der Mittelwert von v^2 ist:

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \frac{dv}{v_0} = \frac{1}{2} v_0^2. \tag{11.27}$$

Durch die Beziehung

$$v_0^2 = \frac{2RT}{\mu} \tag{11.28}$$

hängt v_0 mit der Temperatur des Gases zusammen, wobei μ das Atomgewicht und R die Gaskonstante ist.

Das Gesetz über die Verteilung der „Turbulenzgeschwindigkeiten“ im Innern einer Sternatmosphäre ist bisher noch völlig unbekannt. Wenn wir postulieren, daß wir es bei den irregulären „turbulenten“ Bewegungen mit chaotischen Bewegungen zu tun haben, und annehmen, daß auch hier das Verteilungsgesetz (11.26) mit $v_0 = v_t$ gilt, so hat nach der Additionsregel der Dispersionen die resultierende Geschwindigkeitsverteilung der Atome die gleiche Gestalt wie (11.26), nur mit

$$v_0^2 = \frac{2RT}{\mu} + v_t^2. \tag{11.29}$$

Nach dem DOPPLERschen Prinzip, das das Akademiemitglied A. A. BELOPOLSKI als erster einer experimentellen Prüfung unterzog, befolgt die Verschiebung der Frequenzen oder der Wellenlängen gegen die normalen Werte das Gesetz

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{v}{c}, \tag{11.30}$$

wobei hier die Absolutwerte der Differenzen $\lambda - \lambda_0$ und $\nu - \nu_0$ gemeint sind. Setzen wir

$$\frac{\Delta \nu_D}{\nu_0} = \frac{\Delta \lambda_D}{\lambda_0} = \frac{v_0}{c}, \tag{11.31}$$

so erhalten wir für die relative Verteilung der absorbierenden und emittierenden Atome über die Frequenzen innerhalb einer Linie den folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dn}{n} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta \nu}{\Delta \nu_D}\right)^2} \frac{d\nu}{\Delta \nu_D}, \\ \frac{dn}{n} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta \lambda}{\Delta \lambda_D}\right)^2} \frac{d\lambda}{\Delta \lambda_D}. \end{aligned}\right\} \tag{11.32}$$

Hierbei haben wir berücksichtigt, daß $d(\Delta \nu) = d\nu$ und $d(\Delta \lambda) = d\lambda$ ist. Für eine rein thermische Bewegung ist

$$\left.\begin{aligned} \Delta \nu_D &= \frac{\nu}{c}\sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \frac{\nu}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}}, \\ \Delta \lambda_D &= \frac{\lambda}{c}\sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \frac{\lambda}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}}. \end{aligned}\right\} \tag{11.33}$$

Dabei bedeutet k die Boltzmannsche Konstante und m die Masse des vorgegebenen Atoms.

Wenn wir die Proportionalität zwischen der Größe $\frac{dn}{n}$ und dem Absorptionskoeffizienten s_ν beachten, können wir die Normierungsbedingung für s_ν mit Hilfe der Formeln (11.5) und (11.14) erfüllen. Hierbei kann man die Integration von $\nu - \nu_0 = -\infty$ bis $\nu - \nu_0 = +\infty$ ausführen, weil schon für kleine $\frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_D}$ der Exponentialfaktor schnell gegen Null strebt und durch eine derartige Änderung der Integrationsgrenzen kein wesentlicher Fehler entstehen kann. Als Ergebnis der Integration erhalten wir

$$s_\nu = \frac{\sqrt{\pi}\, e^2}{m_e c} \frac{f_{ik}}{\Delta \nu_D} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_D}\right)^2}. \tag{11.34}$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man auch für s_λ.

Die Größen $\Delta \nu_D$ und $\Delta \lambda_D$ bezeichnet man als Doppler-Breiten. Für $\nu - \nu_0 = \Delta \nu_D$ oder $\lambda - \lambda_0 = \Delta \lambda_D$ nimmt der Absorptionskoeffizient auf den e-ten Teil ab. Nach Formel (11.33) kann man leicht ausrechnen, daß für eine Temperatur gleich der effektiven Sonnentemperatur (5710°) die Doppler-Breite $\Delta \lambda_D$ für die Wasserstofflinie H_α gleich 0,212 Å, für die Linie D_1 ($\lambda = 5895{,}9$ Å) des neutralen Natriums 0,0399 Å und für die Linie K ($\lambda = 3933{,}7$ Å) des ioni-

sierten Kalziums 0,0202 Å ist. Für 10000° betragen die angegebenen Größen für dieselben Linien 0,281; 0,0529 und 0,0267. Diese Werte sind also beträchtlich größer als die natürliche Linienbreite, die von der Größenordnung 10^{-4} Å ist.

4. Das Zusammenwirken der Dämpfung und der Bewegung der Atome

Die direkte Anwendung von (11.34) auf die Bestimmung der Absorption in einer beliebigen Gasschicht ist nur in dem Fall möglich, daß die Zahl der absorbierenden Atome nicht zu groß ist. Bei einer weiteren Zunahme der Anzahl der absorbierenden Atome beginnt sich der Einfluß der Linienverbreiterung durch die Dämpfung auszuwirken. Daher sind im allgemeinen beide Effekte (der Dämpfungseffekt und der DOPPLER-Effekt) zusammen zu berücksichtigen.

Den Absorptionskoeffizienten für diesen allgemeinen Fall können wir folgendermaßen ermitteln. Wir nehmen an, daß sich das Atom, das einen nach Formel (11.24) zu bestimmenden Absorptionskoeffizienten besitzt, gegenüber dem Beobachter mit der Geschwindigkeit v bewegt. In diesem Fall ist die zentrale Frequenz des Absorptionsprozesses ν_{ik} um das durch Formel (11.30) angegebene $\Delta\nu$ verbreitert. Für den Beobachter ist der auf ein derartiges Atom bezogene Absorptionskoeffizient in der Frequenz ν gleich

$$\frac{e^2}{m_e c}\,\delta_{ik}\,\frac{f_{ik}}{(\nu-\nu_{ik}-\Delta\nu)^2+\delta_{ik}^2}\,. \tag{11.35}$$

Andererseits ist der relative Anteil dieser Atome nach (11.32) gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2}\frac{d\Delta\nu}{\Delta\nu_D}, \tag{11.36}$$

weil $d\nu = d(\nu-\nu_{ik}) = d\Delta\nu$.

Folglich ist der durch die betrachteten Atome erzeugte Absorptionseffekt durch das Produkt der beiden Ausdrücke (11.35) und (11.36) bestimmt. Bei der Ermittlung des resultierenden Absorptionskoeffizienten haben wir darauf zu achten, daß nicht nur die vorgegebenen, sich mit der Radialgeschwindigkeit v bewegenden Atome in der Frequenz ν absorbieren, sondern sämtliche Atome, die alle nur möglichen Geschwindigkeiten (relativ zum Beobachter) von $v = -\infty$ bis $v = +\infty$ besitzen. Die Summation der von allen diesen Atomen herrührenden Absorptionseffekte ergibt

$$s_\nu = \frac{e^2\delta_{ik}f_{ik}}{\sqrt{\pi}\,m_e c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2}\dfrac{d\Delta\nu}{\Delta\nu_D}}{(\nu-\nu_{ik}-\Delta\nu)^2+\delta_{ik}^2}\,. \tag{11.37}$$

Hierbei ist natürlich berücksichtigt, daß das Integral von (11.36) über sämtliche $\Delta\nu$ gleich Eins ist. Wir setzen ferner

$$y = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}, \quad p = \frac{\nu - \nu_{ik}}{\Delta\nu_D}, \quad a = \frac{\delta_{ik}}{\Delta\nu_D}. \tag{11.38}$$

Dann wird (11.37):

$$\frac{s_\nu}{s_{\nu_0}} = \frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}\,dy}{a^2 + (p - y)^2} = \varphi(a, p) \tag{11.39}$$

mit

$$s_{\nu_0} = \frac{\sqrt{\pi}\, e^2}{m_e c} \frac{f_{ik}}{\Delta\nu_D}, \tag{11.40}$$

wobei nach (11.34) die Größe s_{ν_0} gleich dem zentralen Wert ($\nu = \nu_0$) des nur durch den DOPPLER-Effekt bestimmten Absorptionskoeffizienten ist.

Aus der Gleichung (11.39) folgt, daß die Aufgabe der Bestimmung von s_ν als Funktion von ν auf die Berechnung des Integrals auf der rechten Seite dieser Gleichung, d.h. auf die Berechnung der Funktion $\varphi(a, p)$, hinausläuft. Man benutzt dabei aber nicht die angegebene allgemeine Gestalt des Integrals. Für Werte von a, die sehr viel kleiner als 1 sind ($a \ll 1$), kann es mit hinreichender Genauigkeit durch verschiedene Reihenentwicklungen der Funktion $\varphi(a, p)$ berechnet werden [2, § 44]. Wir gehen auf diese Untersuchungen nicht näher ein und behandeln nur ihre Ergebnisse. Diese sind deshalb von Wichtigkeit, weil der Fall $a \ll 1$ für die überwiegende Mehrzahl der in den Sternatmosphären entstehenden Absorptionslinien verwirklicht ist.

Dies sind die Hauptergebnisse: Für $a \ll 1$ kann der durch (11.39) angegebene Absorptionskoeffizient in den verschiedenen Bereichen der Linie mit Hilfe zweier verschiedener Ausdrücke dargestellt werden. Der erste wird nur durch den DOPPLER-Effekt [nach Formel (11.34)], der zweite nur durch die Dämpfung [Formel (11.24)] bestimmt.

Der Ausdruck (11.34) ist für die zentralen Frequenzen in der Nähe von $\nu = \nu_{ik}$ maßgebend, und der zweite (durch die Dämpfung bedingte) Ausdruck in den von der Mitte weiter entfernten Frequenzen, wo die DOPPLER-Verbreiterung keinen Einfluß mehr besitzt [infolge des Exponentialgesetzes (11.34)]. In dem Übergangsgebiet kann der Absorptionskoeffizient weder durch Formel (11.24) noch durch Formel (11.34) dargestellt werden.[1])

Für den Fall $a \ll 1$ ist s_{ν_0} faktisch gleich dem nach (11.40) berechneten zentralen Wert von s_ν. Unsere Ausführungen sind mit Hilfe der Abb. 25 leicht verständlich, auf der (linke Ordinatenachse) $-\lg\frac{s_\nu}{s_{\nu_0}}$ für die Übergänge, die die Natriumlinie D_1 erzeugen, graphisch aufgetragen ist.

Durch die gestrichelten Kurven sind die Werte des Absorptionskoeffizienten

[1]) Tafeln zur Berechnung der Funktion $\varphi(a, p)$ sind am Schluß des Buches aufgeführt.

dargestellt, die für eine reine Dämpfungs- und für eine reine DOPPLER-Verbreiterung berechnet worden sind.

Hierbei ist $T = 5700°$ angenommen. Auf der Abszissenachse ist oben $|\lambda - \lambda_0|$ in Å und unten p aus Formel (11.38) aufgetragen. Auf der rechten Ordinatenachse sind die Werte $-\lg \frac{s_\nu}{f}$, d.h., der Absorptionskoeffizient ist auf einen Oszillator bezogen. Die Rechnungen zeigen[1]), daß bei dieser Temperatur $a = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ ist. Bezüglich der Abb. 25, die für $a \ll 1$ allgemeinen Charakter besitzt, machen wir folgende Anmerkungen. Erstens geht aus der Abbildung hervor, daß der DOPPLER-Kern fast ganz allein den Wert des Integrals auf der linken Seite der Grundgleichung (11.5) bestimmt. Zweitens ist im Fall $a \ll 1$ das Übergangsgebiet von s_ν klein, so daß man praktisch in dem gesamten Frequenzintervall abwechselnd die Gleichungen (11.24) und (11.34) benutzen kann.

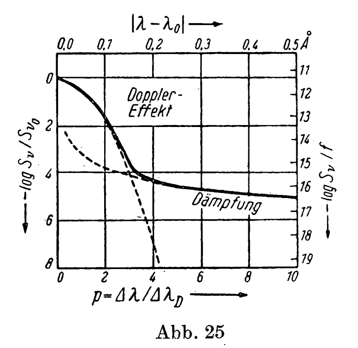


Abb. 25

In allen Fällen, in denen a die Ungleichung $a \ll 1$ nicht erfüllt, muß man von den am Schluß des Buches (im Anhang) aufgeführten Tabellen der Funktion $\varphi(a, p)$ Gebrauch machen.

Mit wachsendem a wird die Darstellung von s_ν in Form zweier Äste, die dem DOPPLER-Effekt und der Dämpfung entsprechen, immer ungenauer. Dies zeigt sich darin, daß das Übergangsgebiet von s_ν mit wachsendem a immer größer wird und die rechte Seite der Formel (11.39) für $p = 0$, d.h. für die Linienmitte, nicht mehr gleich Eins ist (wenn sie sich auch nicht sehr stark von Eins unterscheidet). So folgt z.B. aus den angegebenen Tabellen, daß für $a = 0{,}2$ der Quotient $\frac{s_\nu}{s_{\nu_0}}$ für $\lambda \approx \lambda_{ik}$ gleich 0,809 ist, so daß jetzt s_{ν_0} aufhört, der Wert von s_ν für die Linienmitte zu sein.

In den meisten in der Praxis anzutreffenden Fällen ist jedoch a stets klein, und daher können wir in diesen Fällen s_ν so darstellen, wie wir es oben gezeigt haben, d.h., wir können s_ν in zwei Bestandteile zerlegen. Außerdem kann man für die praktischen Rechnungen s_{ν_0} als zentralen Wert von s_ν ansehen. In Zweifelsfällen muß man sich mit Hilfe der oben erwähnten Tabellen davon überzeugen, ob dieses Verfahren gerechtfertigt ist.

5. Druckeffekte

Zum Abschluß des vorliegenden Paragraphen behandeln wir die Linienverbreiterung durch die Wechselwirkung der absorbierenden Atome mit den umgebenden Teilchen. Diese Form der Linienverbreiterung trägt die allgemeine

[1]) Hierbei ist nur die Strahlungsdämpfung berücksichtigt.

Bezeichnung *Druckeffekt,* weil sie (bei vorgegebener Temperatur) um so größer ist, je höher der Gasdruck ist. Wie wir in den beiden folgenden Paragraphen sehen werden, ist in der Größe δ_{ik} [siehe (11.25)] sehr oft nicht die Strahlungsdämpfung (d.h. die Summe $\gamma_i + \gamma_k$), sondern der Stoß der absorbierenden Atome mit Teilchen aus ihrer Umgebung ($\gamma_c \gg \gamma_i + \gamma_k$) ausschlaggebend. Außerdem ist die Formel (11.24) auf die Wasserstofflinien und auf gewisse Heliumlinien wegen des Druckeffektes überhaupt nicht anwendbar.

Zum Druckeffekt gehören die folgenden beiden Prozesse:

1. Stöße, bei denen die absorbierenden Atome ihre Anregungsenergie den Teilchen aus ihrer Umgebung ohne darauffolgende Reemission mitteilen (Stöße zweiter Art),

2. Stöße zwischen absorbierenden Atomen und benachbarten Teilchen, die zu einer Verbreiterung der Absorptionslinien führen, ohne daß den Atomen Anregungsenergie verlorengeht.

Im ersten Fall führen die Stöße zu einer Umwandlung der Anregungsenergie in Wärme. Auf diese Weise wird die wahre selektive Absorption realisiert, die von uns am Schluß des § 9 betrachtet wurde. Wenn andererseits die Hauptprozesse, die die Energiebilanz in den Absorptionslinien bestimmen, die wahren Absorptionsprozesse wären, so würden die Absorptionslinien am Sonnenrand verschwinden (§ 9), was zu den Beobachtungen im Widerspruch steht. Eine andere Form des Verlustes von Anregungsenergie ist der Stoß der angeregten Atome mit Molekülen. Hierbei wird die Anregungsenergie des Atoms für die Anregung des mit ihm zusammengestoßenen Moleküls verausgabt. Die Wirksamkeit dieser Prozesse hängt mit der großen Kompliziertheit der Termsysteme der Moleküle zusammen. Daher liegt bei einem Stoß eines Moleküls mit einem angeregten Atom, dessen Anregungsenergie gleich ε_i ist, eine große Wahrscheinlichkeit dafür vor, daß auch bei dem Molekül ein Übergang mit demselben Wert von ε_i stattfindet. Jedoch kann auch dieser Fall keine große Rolle spielen, weil die Anzahl der neutralen Wasserstoffatome, die eine Linienverbreiterung hervorrufen (siehe weiter unten), in den Atmosphären der kühlen Sterne weit größer ist als die der Moleküle. Daher ist der Einfluß der Wasserstoffatome stärker als der Einfluß der Moleküle. Auf Grund unserer Ausführungen werden wir im folgenden nur den zweiten der erwähnten Fälle behandeln, der eine Linienverbreiterung bewirkt, ohne daß die Atome einen Verlust von Anregungsenergie erleiden.

Physikalische Untersuchungen entsprechender Prozesse zeigen, daß man auf zweifache Weise einen Zugang zur Lösung des vorliegenden Problems finden kann. Einerseits betrachten wir Prozesse, die wir schon früher besprochen und als Stoßdämpfung der Atome bezeichnet haben. Andererseits richten wir unser Augenmerk auf die unmittelbare Einwirkung der benachbarten Teilchen auf das Energieniveau des absorbierenden Atoms. Diese Einwirkung wird durch die Gesamtheit der Teilchen hervorgerufen, die sich in verschiedenen Entfernungen vom Atom befinden; folglich muß sie durch die Methoden der Statistik berücksichtigt werden. Im wesentlichen ist hier der intermolekulare Starkeffekt gemeint, der zu einer Linienverbreiterung führt (siehe weiter

unten). Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Erscheinungsformen des Druckeffektes ist erst in jüngster Zeit geklärt worden. Es stellte sich heraus, daß die Stoßdämpfung für die zentralen Bereiche der Absorptionslinien maßgebend ist, während der „statistische" Anteil des Effektes in den äußeren Bereichen der Linie eine größere Rolle spielt. Unter den vorliegenden physikalischen Bedingungen gibt es innerhalb einer jeden Linie eine gewisse kritische Entfernung $\Delta\lambda_g$, die von der Mitte dieser Linie aus gemessen wird. Innerhalb des Bereiches $\pm\Delta\lambda_g$ wird die Linienverbreiterung durch die Stoßdämpfung bewirkt; außerhalb dieses Bereiches bestimmt sich die Linienverbreiterung nach der statistischen Theorie.

Andererseits können für jeden einzelnen Fall die Bedingungen für die Wechselwirkung zwischen den Atomen und anderen Teilchen (oder sogar zwischen den Atomen derselben Sorte) völlig verschieden sein. Zum Beispiel kann eine Wechselwirkung zwischen neutralen Atomen oder zwischen neutralen Atomen und Ionen oder Elektronen usw. auftreten. Daher kann $\Delta\lambda_g$ in den verschiedenen Fällen vollkommen verschieden sein. In einigen Fällen ist $\Delta\lambda_g$ so klein, daß praktisch innerhalb der ganzen Spektrallinie die Verbreiterung durch die Statistik beschrieben werden kann. In anderen Fällen ist $\Delta\lambda_g$ so groß, daß innerhalb der ganzen zu beobachtenden Linie die Stoßdämpfung den entscheidenden Einfluß besitzt. In diesem Fall beginnt die statistische Verbreiterung erst in den sehr weit entfernten Bereichen der Flügel, die beobachtungsmäßig nicht mehr festzustellen sind, da dort schon $r_\nu \approx 1$ ist, eine merkliche Rolle zu spielen.

Folglich müssen wir die in dem betrachteten Bereich der Sternatmosphäre herrschenden physikalischen Bedingungen bestimmen und feststellen, zwischen welchen Teilchen eine Wechselwirkung auftritt, damit wir entscheiden können, welchen Typ der Wechselwirkung wir vornehmlich berücksichtigen müssen.

Wir charakterisieren kurz die beiden Abarten des Druckeffektes.

6. Stoßverbreiterung der Linien

Die physikalische Seite der durch Stöße bewirkten Linienverbreiterung haben wir schon bei der Einführung der Konstante γ_c erläutert. Bei jedem Zusammenstoß wird der von dem harmonischen Oszillator ausgeführte Schwingungsprozeß für einen Augenblick unterbrochen und nach einem sehr kurzen Zeitintervall mit einer neuen Phase wieder aufgenommen. Somit müssen wir bei der Ausarbeitung einer geeigneten Theorie annehmen, daß der Wellenzug mit der Frequenz ν_0 von Zeit zu Zeit Störungen in seiner Phase erleidet, wobei die bei diesen Störungen jedesmal auftretende Phasenänderung willkürlich ist.

Der Ausgangspunkt unserer Theorie ist der Charakter der Phasenänderung bei dem Vorübergang eines störenden Teilchens an einem absorbierenden (oder emittierenden) Atom. Wenn $\Delta\nu$ die durch den Vorübergang eines störenden Teilchens an dem Atom hervorgerufene Frequenzänderung der Atomstrahlung zu einem vorgegebenen Zeitpunkt ist, so ist die gesamte Phasenänderung $\Delta\varphi$

während der ganzen (sehr kurzen) Zeit ihrer gegenseitigen Annäherung gleich

$$\Delta\varphi = 2\pi \int \Delta\nu \, dt, \tag{11.41}$$

wobei sich die Integration über die ganze Zeit der Annäherung erstreckt. Die Berechnung dieses Integrals ist eine der Hauptaufgaben der zu behandelnden Theorie.

Die Untersuchung aller physikalisch möglichen Fälle zeigt, daß die Größe $\Delta\nu$ in Abhängigkeit von der Entfernung r zwischen dem absorbierenden (emittierenden) Atom und dem störenden Teilchen durch folgenden Ausdruck dargestellt werden kann:

$$\Delta\nu = \frac{C}{r^k}, \tag{11.42}$$

wobei k eine gewisse ganze Zahl und C eine Konstante ist. Die Konstante C kann man mit Hilfe der Quantenmechanik berechnen oder aus Laboratoriumsmessungen bestimmen. In dem Fall, daß die eine Linienverbreiterung bewirkenden Teilchen Ionen oder Elektronen sind (unter Ausschluß der Wasserstofflinien und gewisser Heliumlinien) kann man die durch sich vorbeibewegende Ionen oder Elektronen hervorgerufene Frequenzänderung des absorbierenden (emittierenden) Atoms als quadratischen STARKeffekt ansehen (die Linienaufspaltung $\Delta\nu$ ist dem Quadrat der Feldstärke $F = e/r^2$ proportional). Folglich können wir

$$\Delta\nu = \frac{C}{r^4} \tag{11.43}$$

setzen, so daß im vorliegenden Fall $k = 4$ ist. Messen wir die Feldstärke in Kilovolt (F in Kilovolt $= F/0{,}3$ in CGS-Einheiten) und die Verschiebung $\Delta\lambda$ in Å, so gilt

$$\frac{c\,\Delta\lambda}{\lambda^2 \cdot 10^{-8}} = \frac{C}{e^2}\left(\frac{e}{r^2}\right)^2 = \frac{C}{e^2}\left(\frac{F}{0{,}3}\right)^2. \tag{11.44}$$

Auf diese Weise können wir aus (11.44) die Konstante C bestimmen, wenn wir aus Laboratoriumsmessungen die Größe der Verschiebung $\Delta\lambda$ und die Feldstärke F, bei der diese Verschiebung gemessen wurde, kennen.

Jetzt betrachten wir die Hauptfälle der Stoßdämpfung, die eine Linienverbreiterung in den Sternatmosphären bewirken. Diese Fälle entsprechen den Werten $k = 3$, $k = 4$ und $k = 6$. Betrachten wir sie in dieser Reihenfolge [5, S. 7].

$k = 3$. In diesem Fall sind die störenden Teilchen Atome desselben Elementes, dessen Linienverbreiterung wir untersuchen („Linienverbreiterung durch Eigendruck"). Für die Größe γ_c erhält man hier den folgenden Ausdruck:

$$\gamma_c = 4\pi^3 C n, \tag{11.45}$$

wobei n die Anzahl der störenden Teilchen von der betrachteten Sorte in 1 cm^3 ist. [Im vorliegenden Fall die absorbierenden (emittierenden) Atome selbst.]

Die Größe C ist hier näherungsweise gleich

$$C = \frac{e^2}{16\pi^2 m_e \nu_0} f_{ik}, \tag{11.46}$$

wobei f_{ik} die dem betrachteten Übergang entsprechende Oszillatorenstärke und ν_0 – wie gewöhnlich – die Frequenz der Linienmitte ist.

$k = 4$. Diesen Fall haben wir oben schon behandelt. Die störenden Teilchen sind Ionen und Elektronen (quadratischer STARKeffekt). Für γ_c erhält man in diesem Fall

$$\gamma_c = 38{,}8\, C^{\frac{2}{3}}\, \bar{v}^{\frac{1}{3}}\, n. \tag{11.47}$$

In dieser Formel ist n wieder die Anzahl der störenden Teilchen (im vorliegenden Fall der Elektronen oder Ionen) in 1 cm³ und die Größe $\bar{v}$ die mittlere Relativgeschwindigkeit der gestörten zu den störenden Teilchen. Wenn das Atomgewicht der ersteren μ_1 und das Atomgewicht der zweiten μ_2 ist, so ist nach der kinetischen Gastheorie

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi} R T \left(\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_2}\right)}, \tag{11.48}$$

wobei R die Gaskonstante und T die kinetische Temperatur des Mediums ist.

Man bestimmt C – wie wir bereits erwähnt haben – entweder auf experimentellem Wege, oder man berechnet es quantenmechanisch.

$k = 6$. In diesem Fall wird die Linienverbreiterung durch Zusammenstöße der gestörten Atome mit neutralen Wasserstoffatomen hervorgerufen. Die bei der Wechselwirkung für $k = 6$ auftretenden Kräfte gehören zu den VAN DER WAALSschen Kräften. Hier hat die Größe γ_c folgende Gestalt:

$$\gamma_c = 17{,}0\, C^{\frac{2}{5}}\, \bar{v}^{\frac{3}{5}}\, n, \tag{11.49}$$

wobei n die Anzahl der neutralen Wasserstoffatome in 1 cm³ ist und $\bar{v}$ durch die Formel (11.48) bestimmt ist, in der $\mu_2 = 1{,}0080$ ist.

In diesem Fall ist es außerordentlich schwierig, C auf experimentellem Wege zu bestimmen. Aus diesem Grunde macht man noch immer von folgender Näherungsformel Gebrauch:

$$C = \frac{e^2 \alpha}{h} \overline{R_k^2}. \tag{11.50}$$

In dieser Formel ist α die Polarisierbarkeit des neutralen Wasserstoffatoms ($\alpha = 6{,}63 \cdot 10^{-25}$ cm³), während $\overline{R_k^2}$ das mittlere Quadrat des Bahnradius für den oberen (!) Anregungszustand des betrachteten Überganges $i \to k$ ist. Man berechnete $\overline{R_k^2}$ für zahlreiche Fälle. Wir führen die wichtigsten an. Für die Natrium-D-Linie ist $\overline{R_k^2} = 41\, a_0^2$, wobei a_0 die atomare Längeneinheit

ist (der Radius der ersten BOHRschen Bahn des Wasserstoffatoms). Für die Resonanzlinien H und K des ionisierten Kalziums ist $\overline{R_k^2} = 23\, a_0^2$, für die Resonanzlinie 4227 Å des neutralen Kalziums ist $\overline{R_k^2} = 69\, a_0^2$. Mit den oben angegebenen Werten von $\overline{R_k^2}$ für die Natrium-D-Linien wird C gleich $2{,}65 \cdot 10^{-32}$.

Wir beachten, daß man sämtliche oben angegebene Formeln für γ_c auch mit Hilfe von effektiven Querschnitten für die Linienverbreiterung hätte schreiben können (wie es bisweilen geschieht). Zu diesem Zweck benutzen wir eine Formel, die τ_c mit der Zahl der Zusammenstöße Z_{st}, die das vorgegebene absorbierende Atom in 1 sec erleidet, in Beziehung setzt:

$$\tau_c = \frac{1}{Z_{\text{st}}}, \tag{11.51}$$

und weiter eine Näherungsformel, die Z_{st} durch den effektiven Querschnitt σ der Stoßverbreiterungen ausdrückt:

$$Z_{\text{st}} = \sigma n \bar{v}. \tag{11.52}$$

Unter Benutzung dieser Formeln erhalten wir mit Hilfe von (11.9)

$$\gamma_c = \frac{2}{\tau_c} 2\, Z_{\text{st}} = 2\, \sigma n \bar{v}. \tag{11.53}$$

Durch Vergleich von (11.53) mit (11.45), (11.47) und (11.49) können wir auch die zugehörigen mittleren Werte für σ berechnen.

Über die Anwendungen der Gleichungen (11.45), (11.47) und (11.49) werden wir weiter unten sprechen. Zuvor werden wir eine andere „Abart" des Druckeffektes – die statistische Linienverbreiterung – betrachten.

7. Die statistische Linienverbreiterung

Das markanteste Beispiel für eine statistische Linienverbreiterung ist diejenige, die den *intermolekularen Starkeffekt* bedingt, der von den durch Ionen und Elektronen erzeugten elektrostatischen Feldern herrührt. Durch das Auftreten dieser Felder werden die Frequenzen in Emission (und in Absorption) gegenüber ihrer normalen Lage verschoben. Da für ein beliebiges Atom die Konfiguration der in seiner Nähe liegenden geladenen Teilchen (Ionen und Elektronen) im allgemeinen verschieden ist, wird für die verschiedenen Atome einer vorgegebenen Atomsorte (zu einem vorgegebenen Zeitpunkt) auch die Linienverschiebung verschieden groß sein. Die resultierende Absorptionslinie im Stern- bzw. Sonnenspektrum wird deshalb, da sie von einer großen Anzahl von Atomen mit verschiedenen Linienverschiebungen erzeugt wird, als ganzes verbreitert werden.

Folglich besteht die Hauptaufgabe des vorliegenden Problems darin, ein Gesetz aufzustellen, das die Wahrscheinlichkeit $W(F)$ einer vorgegebenen

Feldstärke F in Abhängigkeit vom Feld F selbst angibt. Für gewöhnlich führt man hierbei ein gewisses „Standardfeld" F_0 ein, auf das sich auch das Feld F bezieht:

$$F_0 = 2{,}61\, e n^{\frac{2}{3}}, \tag{11.54}$$

wobei n die Anzahl der geladenen Störteilchen in 1 cm³ ist. Den Quotienten F/F_0 bezeichnet man in der Regel mit β. Somit reduziert sich unser Problem darauf, herauszufinden, wie groß die Wahrscheinlichkeit $W(\beta)d\beta$ dafür ist, daß die Größe β zwischen β und $\beta + d\beta$ liegt. Um die Frage beantworten zu können, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß der Zuwachs der Frequenz zwischen den Grenzen ν und $\nu + d\nu$ liegt, muß man das Gesetz kennen, das die Größe der Aufspaltung $\Delta\nu$ in Abhängigkeit von der Feldstärke F angibt. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der lineare STARKeffekt (die Aufspaltung $\Delta\nu$ ist dem störenden Feld proportional). Dieser Fall liegt bei der Verbreiterung der Wasserstofflinien und auch bei den nicht sehr starken Aufspaltungen von gewissen Heliumlinien vor.

2. Der quadratische STARKeffekt ($\Delta\nu$ ist proportional F^2). In diesem Fall ist die Aufspaltung der Linien kleiner als bei dem linearen STARKeffekt. Gleichzeitig hat der quadratische STARKeffekt das Auftreten von Linien zur Folge, die nach den Auswahlregeln für die Bahndrehimpulsquantenzahl l verboten sind.

Wir betrachten den linearen STARKeffekt für die Wasserstofflinien. Jedes Niveau (mit Ausnahme des ersten) eines Wasserstoffatoms, das sich in einem elektrischen Feld befindet, erleidet eine symmetrische Aufspaltung in mehrere Komponenten. Ihre Zahl wächst mit der Hauptquantenzahl des Niveaus.

Der Abstand der aufgespaltenen Niveaus von der normalen Lage wird durch die Formel

$$\Delta E = h\,\Delta\nu = \frac{3}{8\pi^2}\frac{h^2}{e m_e} F n n_F \tag{11.55}$$

festgelegt. Das Produkt der Hauptquantenzahl n mit der STARKeffekt-Quantenzahl n_F ist in Tabelle 6 angegeben.

Tabelle 6

n	n_F	$n\,n_F$	Anzahl der Komponenten
1	0	0	1
2	0, ± 1	0, ± 2	3
3	0, ± 1, ± 2	0, ± 3, ± 6	5
4	0, ± 1, ± 2, ± 3	0, ± 4, ± 8, ± 12	7
5	0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4	0, ± 5, ± 10, ± 15, ± 20	9

Die Möglichkeit eines beliebigen Überganges von einem Niveau mit der Hauptquantenzahl n und der STARKeffekt-Quantenzahl n_F auf ein Niveau mit den Quantenzahlen n' und n'_F wird durch die entsprechenden Auswahlregeln entschieden.

Wie aus Tabelle 6 und Gleichung (11.55) folgt, wächst die Linienbreite einer vorgegebenen Serie mit der Hauptquantenzahl des oberen Niveaus.

Wir weisen darauf hin, daß bei sehr starken Feldern, die 100000 V/cm übersteigen, der lineare STARKeffekt in den quadratischen STARKeffekt übergeht, wobei das Bild der Linienaufspaltung keine Symmetrie mehr zu der Lage bei fehlender Aufspaltung zeigt. Unter den auf einem Stern herrschenden Bedingungen gibt es jedoch solche Felder offenbar nicht.

Wir wenden uns jetzt dem Absorptionskoeffizienten für die durch den intermolekularen STARKeffekt verbreiterten Linien der BALMER-Serie zu. Diesen Koeffizienten findet man aus der Verteilung von $W(\beta)$ unter Berücksichtigung aller erlaubten Übergänge zwischen geeigneten Niveaus mit $n = 2$ und $n = k$. Für den rein statischen Fall, für den man die störenden Teilchen (Ionen und Elektronen) gegenüber dem gestörten Wasserstoffatom als ruhend ansehen kann, folgt aus den Rechnungen für den Absorptionskoeffizienten in den Linienflügeln der BALMER-Serie die Formel [2, § 47]

$$s_\lambda = C \frac{F_0^{\frac{3}{2}}}{(\lambda - \lambda_0)^{\frac{5}{2}}}, \tag{11.56}$$

wobei für Hα, Hβ, Hγ und Hδ die Konstante C gleich $3{,}13 \cdot 10^{-16}$; bzw. $0{,}885 \cdot 10^{-16}$; $0{,}442 \cdot 10^{-16}$ und $0{,}309 \cdot 10^{-16}$ ist und $\lambda - \lambda_0$ in Ångströmeinheiten ausgedrückt ist.

Diese Formel darf man nur für die Linienflügel der BALMER-Serie verwenden. Der Vergleich der theoretischen und der beobachteten Konturen der mehr im Innern liegenden Bereiche der Linien Hα, Hβ, Hγ und Hδ zeigt oft beträchtliche Abweichungen dieser Konturen voneinander. Dieser Umstand erklärt sich daraus, daß die Formel (11.56) für den rein statischen Fall abgeleitet worden ist. Es liegt auf der Hand, daß sich die störenden Teilchen in Wirklichkeit gegenüber den neutralen Wasserstoffatomen im Zustand ununterbrochener Bewegung befinden. Die Berücksichtigung dieses Faktors zeigt, daß die Abnahme von s_λ in den inneren Bereichen der Linienflügel von Hα, Hβ, Hγ und Hδ mit wachsendem $\lambda - \lambda_0$ viel langsamer vor sich geht, als die Formel (11.56) angibt, außerdem ändert sich der Verlauf der Abhängigkeit der Größe s_λ von λ auch stark in den zentralen Bereichen der Linien.

Der quadratische STARKeffekt äußert sich in den meisten Fällen als Stoßdämpfung und nicht als statistische Verbreiterung. Das gleiche gilt anscheinend auch für die meisten Linien des Heliums (siehe § 13).

8. Schlußbemerkungen

Wir wollen uns jetzt darüber Klarheit verschaffen, in welchen Fällen wir die statistische Theorie und in welchen Fällen wir die Theorie der Stoßverbreiterung benutzen müssen. Wir beginnen mit der Linienverbreiterung durch geladene Teilchen. Dies entspricht den Fällen $k = 2$ und $k = 4$.

$k = 2$. Die Verbreiterung der Wasserstofflinien und gewisser Heliumlinien durch den linearen STARKeffekt.

Es ist klar, daß der Exponent k in der Formel (11.42) in diesem Fall gleich Zwei ist, weil F proportional r^{-2}. Das Studium der Grenzen von $\Delta\lambda_g$ und des Zusammenwirkens der beiden Arten des Druckeffektes zeigt, daß die Verbreiterung der Linienflügel der BALMER-Serie in den Sternatmosphären durch die statistische Theorie erfaßt wird, wobei die Teilchen, die die Verbreiterung bewirken, offenbar nur die Ionen sind.

$k = 4$. Der durch Ionen und Elektronen bedingte quadratische STARKeffekt. Eine entsprechende Untersuchung zeigt, daß hier im Gegensatz zu dem vorhergehenden Fall die durch Stöße mit Elektronen hervorgerufene Dämpfung der Hauptfaktor für die Linienverbreiterung ist. Für den vorliegenden Fall können wir die Gleichung (11.47) benutzen, indem wir $n = n_e$ setzen und $\bar{v}$ für Zusammenstöße der vorgegebenen Atome mit Elektronen berechnen.

Für die Linien, bei denen die Konstante C hinreichend groß ist, kann die hier betrachtete Form der Linienverbreiterung in den Atmosphären der Sterne aller Spektralklassen die Hauptrolle spielen. Die Linienverbreiterung der ionisierten Elemente, die auf Elektronenstoß beruht, ist noch ungenügend erforscht.

Wir wenden uns jetzt der durch die Wechselwirkung der Atome mit neutralen Teilchen bedingten Linienverbreiterung zu.

$k = 3$. Linienverbreiterung durch Eigendruck. Die Rechnungen zeigen, daß dieser Effekt für die Metallinien wegen der verhältnismäßig geringen Häufigkeit der Metalle in den Sternatmosphären, d.h. wegen des kleinen Wertes für n in der Gleichung (11.45), unbedeutend ist. Anscheinend kann er in den Spektren der kühleren Sterne in den ersten Gliedern der BALMER-Serie auftreten.

$k = 6$. Linienverbreiterung durch Stöße der Atome mit neutralen Wasserstoffatomen. (Bei Temperaturen, bei denen der Wasserstoff schon völlig ionisiert ist, kann die Linienverbreiterung durch das zweithäufigste Element – das neutrale Helium – bewirkt werden.) Für $k = 6$ überwiegt die Stoßdämpfung; die „statistischen Flügel" liegen in großer Entfernung von der Linienmitte, wo $r_\nu \approx 1$ ist. Folglich können wir in diesem Fall für γ_c die Formel (11.49) benutzen. Diese kann man auch auf den Fall anwenden, daß die von den neutralen Wasserstoffatomen gestoßenen Atome sich im ionisierten Zustand befinden.

An dieser Stelle machen wir folgende allgemeine Bemerkung, die sich auf die Anwendung der angegebenen Formeln für γ_c und s_ν bezieht. Für Sterne, deren T_e kleiner als 6000° ist, ist der Wasserstoff im wesentlichen neutral. Daher

wird wegen der großen Häufigkeit des Wasserstoffs die Verbreiterung der meisten Linien durch Stöße der Atome mit neutralen Wasserstoffatomen verursacht [Formel (11.49)]. Die Linienverbreiterung durch Stöße mit Elektronen [$k = 4$, Formel (11.47)] kann bei den Linien auftreten, die gegenüber dem quadratischen STARKeffekt sehr empfindlich sind (große C). Bei höheren Temperaturen als 8000° ist der Wasserstoff fast gänzlich ionisiert. Daher liegt der Fall $k = 6$ hier schon nicht mehr vor. Die Linienverbreiterung geschieht durch die Wechselwirkung der Atome mit Ionen und Elektronen.

Bei den neutralen Metallen wird die Linienverbreiterung durch Stöße der Atome mit Elektronen und bei gewissen Heliumlinien durch Stöße der Heliumatome mit Protonen bewirkt.

Die Verbreiterung der Linienflügel der BALMER-Serie endlich bestimmt sich in den meisten Fällen nach der statistischen Theorie [$k = 2$, für die von der Linienmitte weit entfernten Bereiche der Flügel, Formel (11.56)]. Hierbei sind die die Verbreiterung bewirkenden Teilchen Ionen. Für die weiter im Innern liegenden Bereiche der Linien sind Korrektionen einzuführen, die die Bewegung der geladenen Störteilchen gegenüber den Wasserstoffatomen berücksichtigen. In den Atmosphären der Überriesen und der heißen Sterne beginnt die Strahlungsdämpfung an Bedeutung zu gewinnen.

Abschließend weisen wir darauf hin, daß in den Fällen $k = 4$ und $k = 6$ nicht nur eine Verbreiterung, sondern auch eine Verschiebung der Linien auftritt. Diesen Umstand muß man beim Studium der Linienverschiebung durch Gravitation auf der Sonne berücksichtigen.

§ 12. Anwendung der elementaren Theorie der Konturen. Die Wachstumskurven

1. Die elementare Theorie der Konturen

Wir betrachten jetzt die Anwendung des elementaren Modells einer streuenden „umkehrenden Schicht", das von uns in § 9 behandelt wurde, auf die Absorptionslinien der Sterne (und der Sonne). Wir erinnern uns, daß wir bei diesem Modell folgende Formel für die Restintensität erhalten haben:

$$r_\nu = \frac{H_\nu}{H_\nu^0} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}\tau_\nu^\sigma}. \tag{12.1}$$

Diese Formel bezieht sich auf das Spektrum der Gesamtstrahlung, die von der gesamten Sternscheibe (Sonnenscheibe) ausgesandt wird.

Ebenfalls in § 9 haben wir darauf hingewiesen, daß das betrachtete Modell stark schematisch ist und daß es in Wirklichkeit nicht gerechtfertigt ist, die Atmosphäre in eine „Photosphäre" und eine „umkehrende Schicht" aufzuteilen. Mit Hilfe der Formel (12.1) kann man jedoch für viele hinreichend intensive Absorptionslinien in den Spektren der Sonne und der Sterne eine zufriedenstellende Darstellung der Konturen erzielen. (Bei den schwachen Linien spielen

rein instrumentelle Effekte meist eine größere Rolle als bei den starken Linien.) Außerdem ist die Formel (12.1) aus dem Grunde von Wichtigkeit, daß man mit ihrer Hilfe zahlreiche Untersuchungen durchführen kann, die sozusagen erkundenden Charakter besitzen.

Um die Formel (12.1) für die Darstellung der Kontur einer Absorptionslinie verwenden zu können, muß uns s_ν bekannt sein. Mit Ausnahme des Falles, daß die Linien durch den STARKeffekt verbreitert sind, können wir für s_ν die Formel (11.39) benutzen. In dem häufiger anzutreffenden Fall $a \ll 1$ kann – wie wir schon gezeigt haben – der Absorptionskoeffizient s_ν mit Hilfe zweier Ausdrücke dargestellt werden: Der eine Ausdruck wird nur durch den DOPPLER-Effekt und der andere nur durch die Dämpfung bestimmt [siehe (11.24) und (11.34)].

Da in den Formeln (11.24) und (11.34) der Absorptionskoeffizient auf ein Atom bezogen ist, erhalten wir für die optische Dicke τ_ν^σ in Formel (12.1)

$$\tau_\nu^\sigma = \int n_i s_\nu \, dh, \tag{12.2}$$

wobei n_i die Zahl der vorgegebenen im i-ten Anregungszustand befindlichen absorbierenden Atome in 1 cm³ ist.

Im allgemeinen hängt der Koeffizient s_ν von h ab. In der Formel (11.24) hängt δ_{ik} (über die Konstante γ_c) und in der Formel (11.34) $\Delta\nu_D$ von h ab. Im ersten Fall kann die Abhängigkeit von h merklich werden; im zweiten Fall ist sie schwach, weil T sich im Innern der „umkehrenden Schicht" nur wenig ändert und außerdem in der Formel (11.33) unter dem Wurzelzeichen steht. Wir nehmen jedoch eine weitere Vereinfachung der Aufgabe vor und benutzen an Stelle von δ_{ik} und $\Delta\nu_D$ ihre Mittelwerte im Innern der „umkehrenden Schicht". Dann können wir (12.2) wie folgt schreiben:

$$\tau_\nu^\sigma = s_\nu \int n_i \, dh = s_\nu N_i . \tag{12.3}$$

Die Zahl N_i ist die Anzahl der vorgegebenen Atome, die in einem Zylinder mit der Grundfläche von 1 cm² und einer Höhe, die gleich der Höhe der „umkehrenden Schicht" ist, eingeschlossen sind. Die Zahl N_i bezeichnen wir einfach als „Anzahl der absorbierenden Atome über der Photosphäre" und beachten dabei, daß sie sich auf eine Grundfläche von 1 cm² bezieht.

In Verbindung mit (12.3) schreibt sich die Formel (12.1)

$$r_\nu = \frac{1}{1 + \frac{3}{4} s_\nu N_i} . \tag{12.4}$$

Wir untersuchen jetzt, welches Aussehen die Kontur einer Absorptionslinie bei Benutzung der Formeln (12.4), (11.24) und (11.34) hat. Wir bezeichnen mit X_0 die optische Dicke in der Linienmitte (d.h. für $\nu = \nu_0 \equiv \nu_{ik}$). Nach (12.3),

(11.34) und (11.40) ist diese optische Dicke gleich[1])

$$X_0 = \tau^\sigma_{\nu_0} = N_i s_{\nu_0} = \frac{\sqrt{\pi}\, e^2}{m_e c} \frac{f_{ik}}{\Delta\nu_D} N_i. \tag{12.5}$$

Somit ist im Fall der DOPPLER-Verbreiterung die optische Dicke τ^σ_ν gleich

$$s_\nu N_i = \tau^\sigma_\nu = X_0 e^{-\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2}. \tag{12.6}$$

Für den Fall der Strahlungsdämpfung erhalten wir für τ^σ_ν einen entsprechenden Ausdruck. Wir weisen darauf hin, daß für unseren „zusammengesetzten" Absorptionskoeffizienten die Dämpfung erst in solchen Entfernungen $\nu - \nu_{ik}$ von der Frequenz der Linienmitte $\nu_{ik} = \nu_0$, die die Größe von einigen DOPPLER-Breiten besitzen, von Bedeutung wird (siehe Abb. 25). Dieses Frequenzintervall übertrifft jedoch in den meisten Fällen, die in der Praxis vorkommen, die Größe δ_{ik} beträchtlich (gewöhnlich um einige Größenordnungen). Aus diesem Grunde können wir in den Frequenzen, in denen die Strahlungsdämpfung vorherrscht, den zweiten Summanden im Nenner der Formel (11.24) vernachlässigen. Somit erhalten wir unter Benutzung von (12.3), (12.5) und (11.24) in dem Bereich, wo nur der Einfluß der Strahlungsdämpfung wirksam ist, für τ^σ_ν folgenden Ausdruck:

$$s_\nu N_i = \tau^\sigma_\nu = \frac{e^2}{m_e c} \frac{\delta_{ik} f_{ik}}{(\nu - \nu_0)^2} N_i = X_0 \frac{\delta_{ik}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta\nu_D}{(\nu - \nu_0)^2}. \tag{12.7}$$

Wir legen unseren Überlegungen die Formeln (12.4), (12.6) und (12.7) zugrunde und betrachten die Änderungen der Konturen mit wachsendem N_i und demzufolge mit wachsendem X_0.

Solange die optische Dicke beträchtlich kleiner als Eins ist ($X_0 \ll 1$), unterscheidet sich r_ν selbst in der Linienmitte, wo s_ν seinen Maximalwert annimmt, sehr wenig von Eins, so daß die Linie praktisch in dem Untergrund des kontinuierlichen Spektrums verschwindet. Mit weiterem Anwachsen von N_i tritt eine merkliche Absorption zunächst in den zentralen DOPPLER-Gebieten der Kurven s_ν auf. Wenn in dem Fall, der in Abb. 25 dargestellt ist, d. h. für die Linie D_1 bei $T = 5700°$, die Größe $\tau^\sigma_{\nu_0} = X_0 = 1$ ist, so ist schon im Punkt a des Übergangsgebietes der Kurve s_ν die optische Dicke von der Größenordnung 10^{-4}, so daß an dieser Stelle r_ν praktisch gleich Eins ist. Gleichzeitig ist in der Linienmitte r_ν gleich $\left(1 + \frac{3}{4}\right)^{-1} = 0{,}57$.

Die Dämpfung ist an der Bildung der Linienkontur nur für solche N_i merklich beteiligt, für die die Größe τ^σ_ν im Übergangsgebiet des Koeffizienten s_ν

---

[1]) Wir erinnern daran (siehe § 11), daß für solche Werte von a, die der Ungleichung $a \ll 1$ nicht genügen, das durch Gleichung (11.40) bestimmte s_{ν_0} nur genähert gleich dem Wert s_ν für die Mitte ist!

(siehe Abb. 25) nicht mehr klein gegenüber Eins ist, so daß man sie vernachlässigen könnte. Bis zu diesem kritischen Wert von N_i wird die Kontur der Absorptionslinie durch den DOPPLER-Effekt, d.h. durch die Formel (12.6), bestimmt. In Abb. 26 sind Linienkonturen aufgetragen, die nach den Formeln

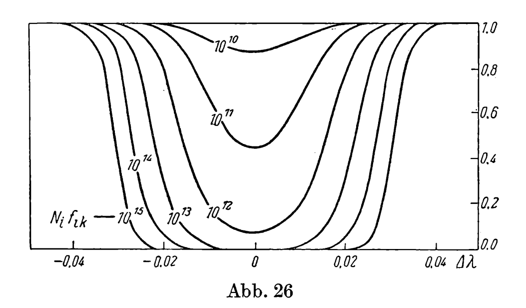


Abb. 26

(12.4), (12.5) und (12.6) für $\Delta\lambda_D = 0{,}01$ Å und für verschiedene Werte des Produktes $N_i f_{ik}$[1]) berechnet worden sind. Wir weisen darauf hin, daß die Absorptionswirkung der Atome in den Formeln (12.6) und (12.7) nicht durch die Zahl N_i selbst, sondern durch das Produkt $N_i f_{ik}$ bestimmt wird. Die Abb. 26 zeigt deutlich die spezifische Form der Konturen für den DOPPLER-Effekt – einen schnellen Abfall von r_ν (für hinreichend große $N_i f_{ik}$) zur Linienmitte.

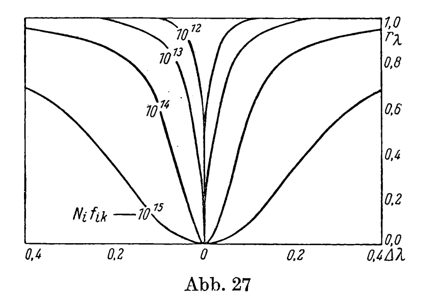


Abb. 27

Bei einer weiteren Vergrößerung von $N_i f_{ik}$ werden die Teile der Kurve s_ν, die durch die Strahlungsdämpfung bestimmt werden, immer wirksamer. Wenn der DOPPLER-Effekt völlig ausgeschaltet wäre, hätten die Linienkonturen die in Abb. 27 angegebene Gestalt, wobei δ_{ik} mit Hilfe von (4.38) in die Wellenlängenskala überführt wurde; sie ist gleich 0,001 Å. Dieser Wert ist etwa um eine

---

[1]) Die Abb 26, 27, 28 und 30 sind einer zusammenfassenden Darstellung von O. A. MELNIKOW entnommen [12, S. 306]. Beim Auftragen der Konturen ist der Faktor 3/4 im Nenner von (1.24) durch Eins ersetzt worden.

Größenordnung größer als die natürliche Linienbreite, doch – wie wir weiter unten sehen werden – ist die Stoßdämpfungskonstante γ_c um eine Größenordnung größer als γ_0 (insbesondere für die Metallinien in der Sonnenatmosphäre).

Aus Abb. 27 erkennen wir, daß sich bei reiner Dämpfung (im Gegensatz zu der durch den DOPPLER-Effekt bestimmten Kontur) in der Linie deutlich ausgeprägte Flügel ausbilden, die sehr fließend in das kontinuierliche Spektrum übergehen.

In der folgenden Abb. 28 geben wir die Konturen an, die nach den Formeln (12.4) und (11.39) mit Hilfe einer geeigneten Tabelle für s_ν aufgetragen sind. Die Ausgangsdaten hierfür sind: $\Delta\lambda_D = 0{,}1$ Å, δ_{ik} – in der Wellenlängenskala ausgedrückt – gleich 0,001 Å.

Aus Abb. 28 geht hervor, daß die Kontur einer Absorptionslinie für verhältnismäßig kleine $N_i f_{ik}$ in der Hauptsache durch den DOPPLER-Effekt bestimmt wird, während für große $N_i f_{ik}$ die Dämpfung maßgebend ist. Allerdings wird

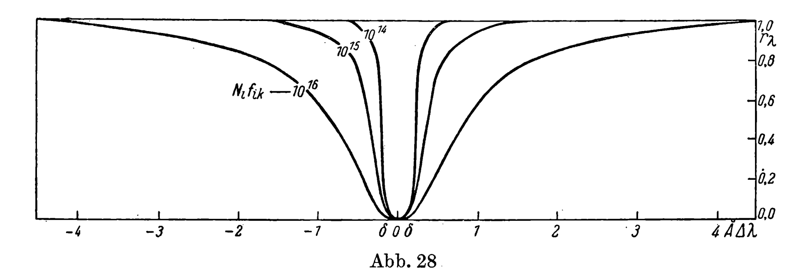


Abb. 28

auch für große $N_i f_{ik}$ der Verlauf der Intensität in unmittelbarer Nähe der Linienmitte durch den DOPPLER-Effekt bestimmt, doch ist r_ν für die zugehörigen Frequenzen (Intervall $\delta \div \delta$ in Abb. 28) so klein, daß es für den Beobachter gleichgültig ist, welcher Effekt in diesem Frequenzintervall vorherrschend ist. Daher kann man sagen, daß bei großen $N_i f_{ik}$ die gesamte Kontur im wesentlichen durch die Dämpfung bestimmt wird.

Folglich sind für die Kontur der schwachen Absorptionslinien (ohne merkliche Flügel) hauptsächlich der DOPPLER-Effekt und für die hinreichend starken Linien (mit ausgeprägten Flügeln) in der Hauptsache die Dämpfungseffekte maßgebend.

2. Vergleich der theoretischen und der beobachteten Konturen

Wir wollen untersuchen, inwieweit die theoretischen Konturen mit den aus den Beobachtungen erhaltenen Konturen übereinstimmen. Am sichersten ist solch ein Vergleich für die stärksten Absorptionslinien. Die Konturen der schwachen Linien sind in der Regel durch Einflüsse rein instrumenteller Art

stark verzerrt, und die Elimination dieser Verzerrungsfaktoren ist für gewöhnlich zu unsicher. Die Kontur der starken Linien wird in der Hauptsache durch die Dämpfungsprozesse bestimmt. Die Substitution von (12.7) in (12.4) ergibt

$$r_\nu = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}\frac{e^2}{m_e c}\frac{\delta_{ik}}{(\nu - \nu_0)^2} N_i f_{ik}}. \tag{12.8}$$

Die Gegenüberstellung der durch (12.8) gegebenen theoretischen Kontur mit der beobachteten Kontur führt man folgendermaßen aus: Wir geben in (12.8) eine Reihe von Werten für das Produkt $\delta_{ik} f_{ik} N_i$ vor und versuchen, die bestmögliche Übereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungsergebnissen zu erzielen. Das gleiche Verfahren ist auch auf $r_\nu(\vartheta)$ in Formel (9.24) anzuwenden. Hierbei zeigt es sich, daß für die Konturen vieler starker Linien des Sonnenspektrums und der Sternspektren eine zufriedenstellende Übereinstimmung hergestellt werden kann. Als Beispiel sind die Konturen der Linie H und K für das Spektrum der Sonnenmitte in Abb. 29 dargestellt.

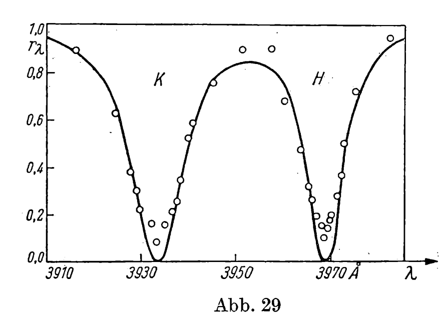


Abb. 29

Aus Abb. 29 ist ersichtlich, daß die größten Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung in den zentralen Bereichen der Linie auftreten. Die beobachtete Intensität der Linienmitte ist größer als die theoretische. Bei faktisch allen starken Absorptionslinien übertrifft die beobachtete Intensität der Linienmitte die theoretische. Abgesehen von dieser Abweichung (wir kommen in § 14 auf sie zurück), zeigen Abb. 29 und analoge Darstellungen, daß der Hauptfaktor, der die Konturen der starken Linien bestimmt, die Dämpfung ist. Diese Schlußfolgerung wird durch sämtliche übrigen Angaben bestätigt. Eine weit strengere Theorie als unsere, die wir zur Gewinnung unserer Ausgangsformel (12.1) benutzt haben, führt zu einer analogen Schlußfolgerung.

Mit Rücksicht auf unsere Schlußfolgerung können wir die nach der erwähnten Methode gefundenen Größen $N_i f_{ik} \delta_{ik}$ zur Bestimmung der Zahl der Atome über 1 cm² der Photosphäre benutzen, d.h., wir können die Größe N_i ermitteln. Zu diesem Zweck müssen wir f_{ik} und δ_{ik} kennen. Die Größen $f_{ik} = f_{1k}$ für die Resonanzlinien sind gewöhnlich bekannt. In der Regel sind sie von der Größenordnung Eins. Weniger leicht sind die Größen $\delta_{ik} = \delta_{1k}$ zu bestimmen. Nach (11.25) sind sie nicht nur durch die Strahlungsdämpfung, sondern auch durch die Stoßdämpfung festgelegt. Die Größe γ_c ist dagegen zur Zeit nur in wenigen Fällen (und dann nur näherungsweise) bekannt. Für die Linien des Sonnenspektrums ist γ_c im Mittel etwa 5–10mal größer als γ_0 (die sogenannte klassische Dämpfungskonstante). Wenn in δ_{ik} die Stoßdämpfungs-

konstante entfällt, vergrößern wir die gefundene Anzahl der Atome. Hierbei wird – wie aus der Formel (12.8) folgt – N_i im Verhältnis eines Faktors von der Größenordnung $\sqrt{(\gamma_i + \gamma_k) : \gamma_c}$ falsch. Wenn wir berücksichtigen, daß für die Resonanzlinien $\gamma_i + \gamma_k \approx \gamma_k \approx \gamma_0$, ist, und den maximalen Faktor 10 benutzen, so ist das unter Weglassen der Konstante γ_c gefundene N_i ungefähr dreimal so groß.

Nach der beschriebenen Methode können wir die Größe N_i nicht nur aus der Formel (12.8) bestimmen, die sich auf die gesamte Scheibe der Sonne (des Sternes) bezieht, sondern auch aus der Formel (9.24), die auf die verschiedenen Punkte der Sonnenscheibe anwendbar ist. Das in diese Formel eingehende τ_ν^σ können wir wiederum dem Ausdruck (12.7) entnehmen.

Die von Unsöld abgeleiteten Werte N_1 für die Resonanzlinien des Sonnenspektrums (in dem der Beobachtung unmittelbar zugänglichen Spektralbereich) sind in Tabelle 49 seines Buches „Physik der Sternatmosphären"[1]) angeführt. Diese Größen sind etwas zu groß, weil bei ihrer Ableitung die Stoßdämpfung nicht berücksichtigt wurde.

Analoge Rechnungen können beim Studium der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphären Verwendung finden. Zu diesem Zweck müssen wir unter Benutzung der Formeln von Boltzmann und Saha von der Zahl der Atome in einem Zustand zu der Zahl der Atome in den übrigen Zuständen übergehen und durch Summation alle Atome des vorliegenden Elementes berücksichtigen.

Außer der Unvollkommenheit des benutzten Modells einer „umkehrenden Schicht" krankt die betrachtete Methode für die Bestimmung der Anzahl der Atome daran, daß sie für die schwachen Linien nicht zu verwenden ist, da ihre Konturen fast ausschließlich instrumentell bedingt sind.

Aus diesem Grunde besteht der Vorteil der Methode zur Bestimmung der N_i nicht in ihrer Anwendung auf die Linienkonturen, sondern auf die Gesamtabsorption, d.h. auf die Äquivalentbreite der Linien. Auf die Äquivalentbreite hat nämlich die instrumentelle Verzerrung einen sehr viel geringeren Einfluß als auf die Kontur selbst. Als hauptsächliche Verzerrungsfaktoren bleiben hierbei das Streulicht und die Geister beim Gitterspektrographen erhalten.

3. Die elementare Theorie der Wachstumskurven

Die Kurve, die eine Beziehung zwischen den Äquivalentbreiten der Linien (d.h. der Größen W_λ oder W_ν) und den Größen $f_{ik}N_i$ herstellt, heißt *Wachstumskurve*. Für die Ableitung der theoretischen Wachstumskurve benutzen wir wieder die Formel (12.4). Wir müssen jedoch beachten, daß selbst für den Gültigkeitsbereich des betrachteten Schemas einer „umkehrenden Schicht" die Ableitung der Formel (12.4) mit mathematischen Vereinfachungen verbunden war. Eine strengere mathematische Untersuchung zeigt, daß an Stelle des

[1]) 1. Aufl. (d. Übers.).

Faktors 3/4 vor τ_ν^σ im Nenner von (12.1) und (12.4) ein gewisser Faktor μ stehen müßte, der selbst von τ_ν^σ abhängt, für $\tau_\nu^\sigma = 0$ gleich Eins ist und für $\tau_\nu^\sigma \to \infty$ gegen 3/4 strebt. Da unsere Rechnungen nur den Charakter einer Näherung besitzen, können wir den erwähnten Faktor $\mu(\tau_\nu^\sigma)$ gleich Eins setzen. Wir benutzen also an Stelle der Formel (12.4) die noch einfachere Formel

$$r_\nu = \frac{1}{1+\tau_\nu^\sigma} = \frac{1}{1+N_i s_\nu}. \tag{12.9}$$

Wenn wir an Stelle der Voraussetzung $\mu = 1$ die Größe μ in ihrer wirklichen Gestalt einsetzen, so geht dieser Faktor in die Endformeln für die Äquivalentbreite in Form eines Koeffizienten von N_i ein. Dies kommt somit dadurch zum Ausdruck, daß der von uns bestimmte Wert von N_i sich von den wahren Werten um den Faktor μ unterscheidet.

Aus (12.9) ergibt sich für die Linientiefe R_ν

$$R_\nu = 1 - r_\nu = \frac{\tau_\nu}{1+\tau_\nu} = \frac{N_i s_\nu}{1+N_i s_\nu} = \frac{1}{1+(N_i s_\nu)^{-1}}. \tag{12.10}$$

Folglich erhalten wir nach (9.2) für die Äquivalentbreite W_ν

$$W_\nu = \int\limits_0^\infty \frac{d\nu}{1+(N_i s_\nu)^{-1}} = 2\int\limits_{\nu_0}^\infty \frac{d\nu}{1+(N_i s_\nu)^{-1}}. \tag{12.11}$$

Bei der Umformung der rechten Seite der Gleichung (12.11) haben wir die Symmetrie der Funktion s_ν bezüglich der Frequenz der Linienmitte ν_0 berücksichtigt [siehe (12.6) und (12.7)]. Folglich ist nach (12.10) auch R_ν symmetrisch, und beide Hälften der Linie geben die gleiche Gesamtabsorption.

Die Integration von (12.11) erstreckt sich streng genommen über das gesamte Spektrum. Sie beschränkt sich aber praktisch auf den verhältnismäßig schmalen Bereich der Absorptionslinie selbst, für die W_ν berechnet werden soll, weil s_ν schon für relativ kleine $\nu - \nu_0$ praktisch gleich Null wird.

Für gewöhnlich benutzen die Beobachter W_λ und nicht W_ν. Wie wir außerdem sehen werden, erweist es sich als zweckmäßig, nicht W_λ selbst, sondern W_λ/λ zu verwenden.

Im Hinblick auf die relative Kleinheit der Äquivalentbreiten können wir für den Zusammenhang zwischen W_λ und W_ν die Differentialformel (4.38) benutzen und erhalten

$$\frac{W_\lambda}{\lambda} = \frac{W_\nu}{\nu}. \tag{12.12}$$

Wir untersuchen jetzt die Abhängigkeit der Größe W_ν und entsprechend W_λ von X_0, d. h. faktisch von den Werten $N_i f_{ik}$. Zunächst betrachten wir die Werte von $N_i f_{ik}$, für die die Linienbreite nur durch den Doppler-Effekt bestimmt

wird. In diesem Fall können wir für $N_i s_\nu$ den Ausdruck (12.6) benutzen. Seine Substitution in (12.11) ergibt

$$W_\nu = 2\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu}{1 + \dfrac{e^{\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2}}{X_0}}. \tag{12.13}$$

Wir führen jetzt die neue Veränderliche p ein:

$$p = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}. \tag{12.14}$$

Dann nimmt (12.13) die Gestalt

$$W_\nu = 2\Delta\nu_D \int_0^{\infty} \frac{dp}{1 + \dfrac{e^{p^2}}{X_0}} = 2X_0\Delta\nu_D \int_0^{\infty} (e^{p^2} + X_0)^{-1} dp \tag{12.15}$$

an.

Zunächst wenden wir uns dem Fall zu, daß $N_i f_{ik}$ sehr klein ist, so daß $X_0 < 1$. In diesem Fall kann das Integral (12.15) mit Hilfe der binomischen Entwicklung des Ausdruckes unter dem Integral berechnet werden:

$$W_\nu = 2\Delta\nu_D X_0 \int_0^{\infty} (e^{-p^2} - X_0 e^{-2p^2} + X_0^2 e^{-3p^2} - \cdots)\, dp. \tag{12.16}$$

Mit Rücksicht auf

$$\int_0^{\infty} e^{-np^2} dp = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \tag{12.17}$$

finden wir

$$W_\nu = \sqrt{\pi}\,\Delta\nu_D X_0 \left\{1 - \frac{X_0}{\sqrt{2}} + \frac{X_0^2}{\sqrt{3}} - \cdots\right\}. \tag{12.18}$$

Diese Entwicklung kann man praktisch für $0 \leqq X_0 < 0{,}5$ verwenden.

Zur Berechnung von (12.15) für größeres X_0 setzen wir

$$X_0 = e^b, \quad b = \ln X_0, \quad p^2 = u. \tag{12.19}$$

Dann wird (12.15) zu

$$W_\nu = \Delta\nu_D \int_0^{\infty} \frac{u^{-\frac{1}{2}} du}{1 + e^{u-b}}. \tag{12.20}$$

Das auf der rechten Seite von (12.20) stehende Integral spielt in der Elektronentheorie der Metalle eine große Rolle. Für hinreichend große $b = \ln X_0$ kann es mit Hilfe des folgenden asymptotischen Ausdruckes dargestellt werden:

$$\int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{2}}\,du}{1+e^{u-b}} = 2\sqrt{b}\left\{1 - \frac{\pi^2}{24b^2} - \frac{7\pi^4}{384b^4} - \cdots\right\}. \tag{12.21}$$

In Verbindung mit (12.21) und (12.19) können wir (12.20) folgendermaßen schreiben:

$$W_\nu = 2\Delta\nu_D\sqrt{\ln X_0}\left\{1 - \frac{\pi^2}{24\ln^2 X_0} - \frac{7\pi^4}{384\ln^4 X_0} - \cdots\right\}. \tag{12.22}$$

In der Praxis kann man diese Reihenentwicklung für $\ln X_0 \geqq 4$ oder $X_0 \geqq 55$ verwenden. Für $0{,}5 < X_0 < 55$ kann man das Integral (12.20) oder, was dasselbe ist, (12.15) durch numerische Integration berechnen.

Mit noch größer werdendem $N_i f_{ik}$ (und folglich X_0) verschwindet der Einfluß des DOPPLER-Effektes an der Bildung der Linienkontur vollständig; diese wird jetzt durch Dämpfungsprozesse bestimmt. Für sehr große Werte von X_0 führen wir (12.7) in (12.11) ein.

$$W_\nu = 2\int_{\nu_0}^\infty \frac{d\nu}{1 + \dfrac{\sqrt{\pi}\,(\nu-\nu_0)^2}{X_0\,\delta_{ik}\,\Delta\nu_D}}. \tag{12.23}$$

Setzen wir

$$\frac{\sqrt{\pi}\,(\nu-\nu_0)^2}{X_0\,\delta_{ik}\,\Delta\nu_D} = x^2, \tag{12.24}$$

so finden wir

$$W_\nu = 2\pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{X_0\,\delta_{ik}\,\Delta\nu_D}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi^{\frac{3}{4}}\sqrt{X_0\,\delta_{ik}\,\Delta\nu_D}\,. \tag{12.25}$$

Das Übergangsgebiet der Wachstumskurve, das dem Übergang von der Formel (12.22) zur Formel (12.25) entspricht, findet man durch numerische Integration der Ausgangsformel (12.11), indem man ein s_ν benutzt, das man z.B. den am Schluß des Buches aufgeführten Tabellen entnimmt.

Gehen wir entsprechend der Formel (12.12) auf die Wellenlängenskala über und benutzen für $\Delta\nu_D$ den Ausdruck (11.31), so erhalten wir für die von uns betrachteten drei Fälle

$0 \leqslant X_0 < 0{,}5$:

$$\frac{W_\lambda}{\lambda} = \sqrt{\pi}\,\frac{v_0}{c}\,X_0\left\{1 - \frac{X_0}{\sqrt{2}} + \frac{X_0^2}{\sqrt{3}} - \cdots\right\} \approx \frac{v_0}{c}\sqrt{\pi}\,X_0, \tag{12.26}$$

$X_0 \geqslant 55$:

$$\frac{W_\lambda}{\lambda} = 2\,\frac{v_0}{c}\sqrt{\ln X_0}\left\{1 - \frac{\pi^2}{24\ln^2 X_0} - \frac{7\pi^4}{384\ln^4 X_0} - \cdots\right\} \approx 2\,\frac{v_0}{c}\sqrt{\ln X_0}, \qquad (12.27)$$

X_0 sehr groß:

$$\frac{W_\lambda}{\lambda} = \pi^{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{v_0}{c}\,\frac{\delta_{ik}}{\nu_0}\,X_0} = \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{2}\sqrt{\frac{v_0}{c}\,X_0\,\frac{\Gamma_{ik}}{\nu_0}}. \qquad (12.28)$$

Aus diesen Formeln folgt in der Tat, daß man für die Darstellung der Abhängigkeit der Wachstumskurve von der Wellenlänge für die untersuchten Linien nicht W_λ sondern W_λ/λ benutzen muß. Die Frequenz ν_0 (und damit λ_0) geht nur in (12.28) ein, und dort auch nur unter dem Wurzelzeichen.

Aus den angeschriebenen Formeln ergeben sich folgende Schlußfolgerungen: Für schwache Linien, für die $X_0 \ll 1$ ist, wächst die Äquivalentbreite proportional X_0, d.h. proportional der Zahl $N_i f_{ik}$, an. Dieses relativ schnelle Wachstum von W_λ hängt damit zusammen, daß hier mit zunehmendem X_0, d. h. $N_i f_{ik}$, sozusagen eine „Sättigung" der Linie in ihren zentralen Bereichen eintritt, so daß r_{ν_0} von Eins (wo $X_0 = 0$) praktisch auf Null (wo $\ln X_0 \gg 1$) absinkt und die Tiefe in der Linienmitte von Null bis etwa Eins anwächst. Bei größeren Werten von X_0, wenn $r_{\nu_0} \ll 1$, wird das Anwachsen von W_λ nicht durch die Zunahme der Tiefe R_ν in den zentralen Gebieten der Linie, sondern in der Hauptsache durch eine Vergrößerung ihrer Breite bewirkt. Aus den Formeln (12.9) und (12.6) geht hervor, daß eine Änderung der Linienbreite mit wachsendem X_0, d.h. mit wachsendem $N_i f_{ik}$, durch das Auftreten des Exponentialfaktors in der Formel (12.6) außerordentlich langsam vor sich geht [10, S. 60–61].

Lassen wir X_0 noch mehr wachsen, so daß X_0 schon sehr groß ist, so nimmt die Äquivalentbreite proportional der Quadratwurzel aus $N_i f_{ik}$ zu.

Aus verschiedenen Gründen stellt man die Wachstumskurven in der Form dar, daß man nicht unmittelbar die Abhängigkeit zwischen W_λ/λ und X_0, sondern die Abhängigkeit zwischen den (dekadischen) Logarithmen dieser Größen aufträgt.

In Abb. 30 ist die nach den abgeleiteten Formeln (12.26) bis (12.28) berechnete Wachstumskurve für verschiedene Werte von $\Delta\lambda_D$ und δ_{ik} dargestellt. Die letzte Größe bezeichnen wir in der Wellenlängenskala mit $\Delta\lambda_N$. Nach (4.38) ist sie gleich

$$\Delta\lambda_N = \frac{\lambda_0^2}{c}\,\delta_{ik}. \qquad (12.29)$$

Aus Abb. 30 folgt, daß mit zunehmendem $\Delta\lambda_D$, d.h. mit zunehmender Dispersion der Geschwindigkeit v_0, die ganze Wachstumskurve gehoben wird, wobei die beiden ersten Abschnitte der Kurven größer werden als der dritte. Ferner wird bei fest vorgegebenem $\Delta\lambda_D$ der am weitesten nach rechts gelegene dritte Abschnitt der Wachstumskurve, der der Dämpfung entspricht, mit größer

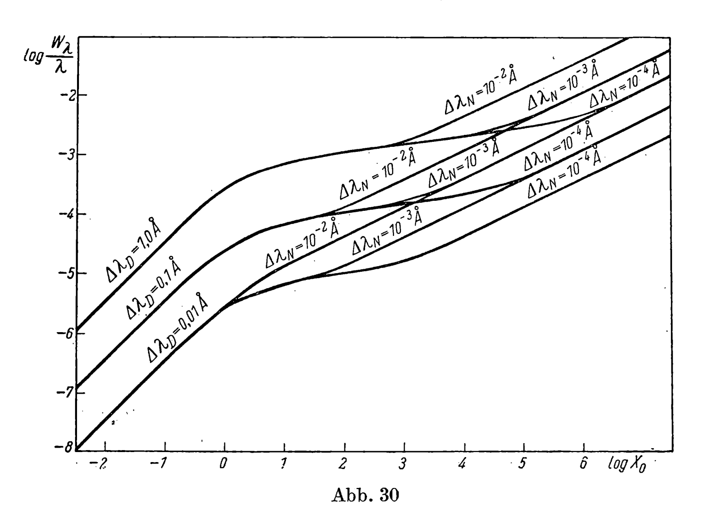


Abb. 30

werdendem $\Delta\lambda_N$, d.h. δ_{ik}, angehoben. Somit bilden die Wachstumskurven der Abb. 30 eine von den beiden Parametern $\Delta\lambda_D$ und $\Delta\lambda_N$ abhängende Kurvenschar.

Häufig stellt man die theoretischen Wachstumskurven so dar, daß man auf der Ordinatenachse nicht $\lg\frac{W_\lambda}{\lambda}$, sondern $\lg\frac{W_\lambda}{\lambda}\frac{c}{v_0}$ aufträgt. In diesem Fall nehmen die Formeln (12.26) bis (12.28) die Gestalt an:

$$\frac{W_\lambda}{\lambda}\frac{c}{v_0} = \frac{W_\lambda}{\Delta\lambda_D} = \sqrt{\pi}\, X_0\left\{1 - \frac{X_0}{\sqrt{2}} + \frac{X_0^2}{\sqrt{3}} - \cdots\right\} \approx \sqrt{\pi}\, X_0, \tag{12.30}$$

$$\frac{W_\lambda}{\lambda}\frac{c}{v_0} = \frac{W_\lambda}{\Delta\lambda_D} = 2\sqrt{\ln X_0}\left\{1 - \frac{\pi^2}{24\ln^2 X_0} - \frac{7\pi^4}{384\ln^4 X_0} - \cdots\right\}$$
$$\approx 2\sqrt{\ln X_0}, \tag{12.31}$$

$$\frac{W_\lambda}{\lambda}\frac{c}{v_0} = \frac{W_\lambda}{\Delta\lambda_D} = \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{2}\sqrt{X_0 Z} = \pi^{\frac{3}{4}}\sqrt{a X_0}, \tag{12.32}$$

mit

$$Z = \frac{\Gamma_{ik}}{\Delta v_D} = \frac{\Gamma_{ik}}{v_0}\frac{c}{v_0} = 4\pi\frac{\delta_{ik}}{\Delta v_D} = 4\pi a. \tag{12.33}$$

Die Größe a ist durch die Formel (11.38) definiert; hierbei ist $Z = 4\pi a$.

In diesem Fall ist die Ordinate für die beiden ersten Abschnitte der Wachstumskurve nur eine Funktion von X_0. Dagegen wird der letzte Abschnitt noch durch den Quotienten von δ_{ik} zu $\Delta\nu_D$ mitbestimmt. Dies ist in Abb. 31 graphisch dargestellt.

Wir erkennen, daß in diesem Fall nur eine Aufspaltung der Wachstumskurve auftritt, die den verschiedenen Werten von Z und folglich von a entspricht.

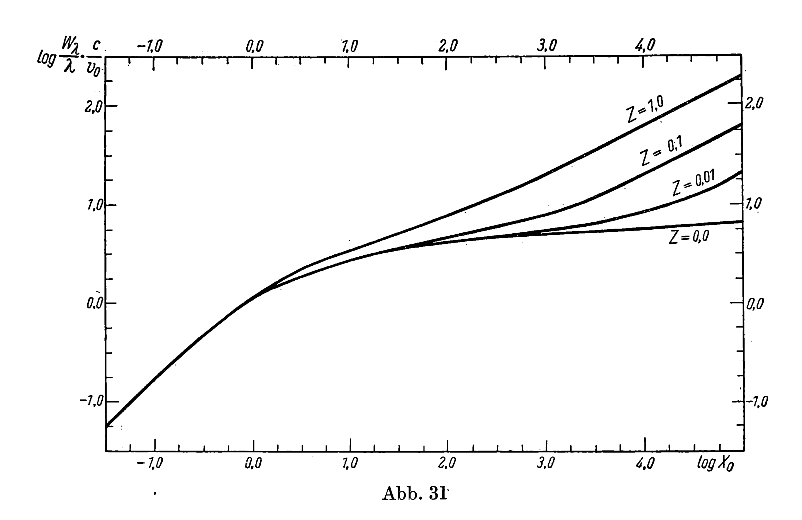


Abb. 31

4. Methoden zur Konstruktion der Wachstumskurven aus Beobachtungen

Die Konstruktion einer Wachstumskurve aus Beobachtungen wird durch die Benutzung von Multiplettlinien ermöglicht. Aus der Formel (12.5) folgt, daß lg X_0, d.h. die Abszisse der Wachstumskurven, für ein vorgegebenes Element gleich $C + \lg N_i f_{ik} = C + \lg N_i + \lg f_{ik}$ ist, wobei C eine von N_i und f_{ik} unabhängige Größe ist. Hieraus folgt, daß N_i und f_{ik} eine vollkommen gleichberechtigte Rolle spielen. Im Hinblick hierauf geht die Konstruktion einer empirischen Wachstumskurve aus Beobachtungen folgendermaßen vor sich: Wir wählen ein beliebiges Multiplett, dessen Komponenten ein gemeinsames unteres Niveau besitzen. Für ein derartiges Multiplett ist die Zahl N_i für alle Komponenten seiner Linien praktisch gleich. (Eine geringe Differenz in N_i ist darauf zurückzuführen, daß ein derartiges Niveau in der Regel aufgespalten ist, wobei sich die Unterniveaus um eine kleine Größe – von einigen Hundertstel bis zu einem oder drei Zehntel Volt – voneinander unterscheiden.) Wir nehmen ferner an, daß die relativen oder, was noch günstiger ist, die absoluten Werte von f_{ik} für alle Linien des vorliegenden Multipletts bekannt sind. Dann können wir dieses

Multiplett folgendermaßen darstellen: Auf der Ordinatenachse der Abb. 31 tragen wir für jede Linie des Multipletts den aus der Beobachtung gefundenen Wert $\lg \frac{W_\lambda}{\lambda}$ und auf der Abszissenachse den ihm entsprechenden Wert $\lg f_{ik}$ auf und zeichnen den diesen Größen entsprechenden Punkt in die graphische Darstellung ein. Hierauf verbinden wir alle so erhaltenen Punkte durch eine glatte Kurve. Folglich liefert ein Multiplett einen Abschnitt der gesuchten Wachstumskurve. (In den meisten Fällen reicht das Intervall der Größen f_{ik} für ein Multiplett nicht aus, um die gesamte Wachstumskurve zu konstruieren.)

Das gleiche Verfahren müssen wir auch für andere Multipletts durchführen. Aus diesen einzelnen Abschnitten der Wachstumskurve, die wir auf die beschriebene Weise gefunden haben, können wir die gesamte Wachstumskurve zusammensetzen, indem wir die einzelnen Abschnitte der Kurven parallel zur Abszissenachse verschieben und zu erreichen versuchen, daß die Streuung der Punkte bei der schließlich erhaltenen Kurve am geringsten ausfällt. Diese Methode ist ein Analogon zur Ermittlung der charakteristischen Kurve einer photographischen Platte in der photographischen Photometrie.

Die auf die angegebene Weise erhaltene Wachstumskurve verschieben wir auf der Abb. 31 (schon als ganze Kurve) nach oben und nach den Seiten, um sie am besten mit einer der in Abb. 31 dargestellten theoretischen Kurve zur Deckung zu bringen. Hierbei folgt aus der Verschiebung der gewonnenen Kurve nach oben (bis sie mit einer speziellen theoretischen Kurve zusammenfällt) unmittelbar $\lg \frac{c}{v_0}$, d. h. die Geschwindigkeit v_0. Außerdem legt dieser Vergleich auch Z fest, d. h. bei schon bestimmtem v_0 die Konstante Γ_{ik}/ν_0. Endlich können wir aus der herbeigeführten Übereinstimmung der theoretischen Wachstumskurve mit der aus der Beobachtung abgeleiteten Kurve auch $\lg X_0$ für eine beliebige Linie bestimmen, da $\lg \frac{W_\lambda}{\lambda}$ aus der Beobachtung bekannt ist. Wenn dann für diese Linie auch noch der absolute Wert von f_{ik} bekannt ist, so kann man bei bekanntem X_0 und $\Delta\nu_D$ mit Hilfe der Formel (12.5) N_i bestimmen. (Dies ist eine weitere Methode zur Bestimmung der relativen chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphären.)

Es ist zu bemerken, daß die Konstruktion der Wachstumskurven und ihr Vergleich mit der Schar der theoretischen Kurven nach der angegebenen Methode zur Voraussetzung hat, daß erstens Γ_{ik}/ν_0 für alle Linien gleich ist und daß zweitens ebenfalls v_0 für sämtliche Elemente, deren Linien bei der Gewinnung der Wachstumskurve benutzt worden sind, gleich ist.

Wir behandeln jetzt eine weitere Methode zur Gewinnung der Wachstumskurve, die im Prinzip der vorhergehenden Methode analog ist, sich von ihr aber dadurch unterscheidet, daß sie ermöglicht, die Anregungstemperatur der Atome zu erhalten. Es sei N_r die Gesamtzahl der Atome einer vorgegebenen Sorte, die sich im r-ten Ionisationszustand (über 1 cm² der „Photosphäre") befinden. Dann können wir unter Zulassung der Gültigkeit des BOLTZMANNschen Gesetzes für die Zahl N_i (die Anzahl der Atome, die sich im i-ten An-

regungszustand befinden) nach (5.54) schreiben:

$$N_i \equiv N_{r,i} = \frac{N_r}{u_r} g_i e^{\overline{k T_A}}^{\varepsilon_i}, \tag{12.34}$$

wobei T_A eine Temperatur ist, die wir als *Anregungstemperatur* bezeichnen wollen. (Den Index r haben wir bei dem statistischen Gewicht und bei dem Anregungspotential fortgelassen.)

Führen wir (12.34) in (12.5) ein und benutzen wir (11.31), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lg X_0 &= \lg\left\{\frac{\sqrt{\pi}\, e^2}{m_e c}\frac{N_r}{u_r}\frac{1}{v_0}\right\} + \lg g_i f_{ik}\lambda_0 - \frac{\varepsilon_i}{k T_A}\lg e \\ &= \lg\left\{\frac{\sqrt{\pi}\, e^2}{m_e c}\frac{N_r}{u_r}\frac{1}{v_0}\right\} + \lg g_i f_{ik}\lambda_0 - \frac{5040}{T_A}\varepsilon_i, \end{aligned} \tag{12.35}$$

wobei im letzten Teil der Gleichung ε_i nicht mehr in CGS-Einheiten, sondern in Elektronenvolt ausgedrückt ist.

Wir nehmen jetzt an, daß wir für alle Linien, die Multipletts des vorgegebenen r-fach ionisierten Elementes bilden, die Größen f_{ik} relativ[1]) oder absolut kennen. Wir geben für T_A einen vorläufigen Wert vor, der gewöhnlich etwas niedriger als die effektive Temperatur des Sternes ist (siehe im folgenden), tragen auf der Abszissenachse die Größen

$$\lg X_f = \lg g_i f_{ik}\lambda_0 - \frac{5040}{T_A}\varepsilon_i \tag{12.36}$$

und auf der Ordinatenachse $\lg \frac{W_\lambda}{\lambda}$ auf. So erhalten wir für das vorgegebene r-fach ionisierte Element eine Wachstumskurve, die man durch genauere Werte von T_A verbessern muß. Wir suchen nun nach der besten Übereinstimmung (siehe oben) dieser Kurven mit einer der theoretischen Kurven der Abb. 31 und erhalten v_0 und Γ_{ik}/v_0.

Zur Verbesserung des Wertes der Anregungstemperatur können wir folgenden Weg einschlagen: Wir schreiben (12.35)

$$Y = \lg X_0 - \lg g_i f_{ik}\lambda_0 = L - \frac{5040}{T_A}\varepsilon_i, \tag{12.37}$$

mit

$$L = \lg\left\{\frac{\sqrt{\pi}\, e^2}{m_e c}\frac{N_r}{u_r}\frac{1}{v_0}\right\}. \tag{12.38}$$

Ferner tragen wir in die graphische Darstellung, die wir schon benutzt haben, um eine theoretische Wachstumskurve mit der vorläufigen, aus der Beobach-

[1]) Hierbei sind alle Multipletts in einer einzigen Skala ausgedrückt, so daß man bei sämtlichen Linien aller Multipletts diese beim Übergang von den relativen f_{ik} zu den absoluten alle mit ein und demselben Faktor multiplizieren muß.

tung erhaltenen Wachstumskurve $\left(\text{d. h. die Abhängigkeit zwischen } \lg \frac{W_\lambda}{\lambda} \frac{c}{v_0} \text{ und } \lg X_0\right)$ in Übereinstimmung zu bringen, die Multipletts ein, die uns zur Konstruktion der letzteren gedient haben. Als Abszisse nehmen wir für jede Linie die ihr entsprechende Größe $\lg g_i f_{ik} \lambda_0$, und auf der Ordinatenachse tragen wir die Größe $\lg \frac{W_\lambda}{\lambda_0} \frac{c}{v_0}$ auf, wobei W_λ der beobachtete Wert der Äquivalentbreite und v_0 die bereits in der ersten Näherung bestimmte Geschwindigkeit ist. Dann ist der horizontale Abstand von dem vorliegenden Multiplett zur Wachstumskurve nichts anderes als

$$Y = \lg X_0 - \lg g_i f_{ik} \lambda_0. \tag{12.38'}$$

Auf diese Weise können wir die Größe Y für alle in die Wachstumskurve eingehenden Multipletts bestimmen.

Wenn die Voraussetzung über die BOLTZMANNsche Verteilung der Atome richtig ist, muß nach (12.37) der Zusammenhang zwischen der ermittelten Größe Y und ε_i für die einzelnen Multipletts linear sein. Tragen wir daher auf der Abszissenachse ε_i und auf der Ordinatenachse Y auf, so erhalten wir eine Gerade, deren Neigung T_A selbst zu bestimmen gestattet. Durch Verlängern dieser Geraden bis $\varepsilon_i \equiv 0$ finden wir L und damit (bei schon bestimmtem v_0) auch N_r. Dies ist ebenfalls eine Methode zur chemischen Analyse der Sternatmosphären. Selbstverständlich muß man bei dieser Analyse auch die übrigen Ionisationsstufen des vorliegenden Elements berücksichtigen. (Wir erwähnen noch, daß wir die Anregungstemperatur T_A auch ermitteln können, wenn wir nicht auf die theoretische Wachstumskurve zurückgehen, sondern lediglich von (12.36) ausgehen. In diesem Fall besteht zwischen $Y' = \lg X_f - \lg g_i f_{ik} \lambda_0$ und dem Anregungspotential ε_i eine lineare Beziehung. Ein Nachteil dieser Methode besteht darin, daß sie die Konstante L nicht anzugeben vermag.)

Die erwähnte lineare Abhängigkeit findet man am genauesten, wenn man die Methode der kleinsten Quadrate anwendet. Der ermittelte genauere Wert für T_A kann von neuem dazu benutzt werden, eine Wachstumskurve mit dem Argument $\lg X_f$ zu zeichnen usw. Gleichzeitig werden auch die Werte v_0 und Γ_{ik}/v_0 verbessert.

In analoger Weise kann man die Wachstumskurven auch für die übrigen Ionisationsstufen des vorliegenden Elementes und auch für andere Elemente ermitteln. Alle diese Kurven kann man zu einer gemeinsamen Kurve zusammenfügen, wenn auch – wie wir später sehen werden – die Wachstumskurven für die neutralen und die ionisierten Elemente in einigen Fällen verschieden ausfallen.

Die Wachstumskurven für verschiedene Elemente können ebenfalls verschieden ausfallen. Daher muß streng genommen die Konstruktion der Wachstumskurve für jedes Element (in einer beliebigen Ionisationsstufe) gesondert vorgenommen werden. Aus dem Vergleich solcher Kurven lassen sich wichtige Schlußfolgerungen ziehen (siehe im folgenden).

5. Laboratoriumsintensitäten, theoretische Intensitäten und „Sonnenintensitäten" der Linien

Bevor wir an die Behandlung der wichtigsten Schlußfolgerungen gehen, die man aus den Wachstumskurven ziehen kann, betrachten wir noch kurz die in der Wachstumskurve benutzten Größen f_{ik} [12, S. 306]. Die zuverlässigsten Werte der f_{ik} für die Multipletts sind gegenwärtig die aus Laboratoriumsversuchen bestimmten Werte. Diese „Intensitäten", die stets in der Form des Produktes $g_i f_{ik}$ angegeben werden, werden im Laboratorium entweder aus Absorptions- oder Emissionslinien bestimmt. Die Genauigkeit der *relativen Laboratoriumsintensitäten* $g_i f_{ik}$ beträgt im Mittel ungefähr 10%. Die Absolutwerte der $g_i f_{ik}$ sind in zahlreichen Fällen viel weniger genau.

Weil im Augenblick Laboratoriumsangaben über $g_i f_{ik}$ nur für wenige Elemente (in der Hauptsache Fe I, Ti I, Ni I und V I) vorliegen, verwendet man für die Ableitung der Wachstumskurven auch *theoretische Intensitäten* der Multiplettlinien.

Wir betrachten beispielsweise die Gesamtheit aller möglichen Übergänge zwischen zwei beliebigen Elektronenkonfigurationen. Diese Übergänge bilden Gruppen von einigen Multipletts. Es sei S die relative (im Verhältnis zu den übrigen Multipletts aus der betrachteten Gesamtheit der Übergänge) Gesamtintensität eines beliebigen Multipletts und s die relative Intensität einer vorgegebenen Linie aus dem betrachteten Multiplett. Dann ist innerhalb der Gesamtheit der Übergänge die relative Intensität dieser Linie gleich

$$S \frac{s}{\sum s}. \tag{12.39}$$

Die Summe ist über sämtliche Linien des vorgegebenen Multipletts zu erstrecken. Hierbei sind für die betrachtete Gesamtheit der Übergänge (zwischen zwei Elektronenkonfigurationen) die $S \frac{s}{\sum s}$ den $g_i f_{ik} \lambda_0$ proportional [12, S. 306].

Da die zu einer Gesamtheit von Übergängen gehörigen Multipletts für eine sichere Bestimmung einer Wachstumskurve gewöhnlich nicht ausreichen, benutzt man mehrere solcher Gesamtheiten. Für jede von ihnen leitet man eine gesonderte Wachstumskurve ab, aus denen man durch Parallelverschiebung längs der Abszissenachse die resultierende Kurve zusammensetzt (wie gezeigt wurde, da bei jeder Gesamtheit von Übergängen $S \frac{s}{\sum s}$ proportional $g_i f_{ik} \lambda_0$ ist).

Die Berechnungen der $S \frac{s}{\sum s}$ gehen bis heute von der Voraussetzung aus, daß man auf alle Atome die Russel-Saunders-Kopplung anwenden kann [13, S. 45]. Diese Voraussetzung ist aber bekanntlich in vielen Fällen falsch. Ein Vergleich zeigt, daß sich die Laboratoriumsintensitäten $g_i f_{ik} \lambda_0$ in einigen Fällen von den theoretischen Werten $S \frac{s}{\sum s}$ um das Hundertfache unterscheiden kön-

nen, während die Laboratoriumsdaten $g_i f_{ik} \lambda_0$ für gewöhnlich mit Fehlern behaftet sind, die 10% nicht übersteigen. Daher verwendet man sogenannte *solare Linienintensitäten,* die man folgendermaßen erhält:

Wir nehmen an, daß wir aus vorliegenden zuverlässigen Laboratoriumsdaten $g_i f_{ik}$ eine Wachstumskurve für die Sonne (beispielsweise für Fe I oder Ti I) konstruiert haben. Hierbei seien auf der Abszissenachse $\lg X_f$ und auf der Ordinatenachse $\lg \frac{W_\lambda}{\lambda}$ aufgetragen. Die Anregungstemperatur T_A für die Sonne bestimmen wir nach dem angegebenen Verfahren (aus denselben Linien). Dann können wir für eine beliebige Linie des Sonnenspektrums, für die $g_i f_{ik}$ nicht bekannt ist, den „solaren Wert“ von $\lg X_f$ aus der oben konstruierten „Standardkurve“ mit Hilfe des für diese Linie gemessenen W_λ bestimmen.

Wir teilen jetzt alle Linien aus einem Stern- oder dem Sonnenspektrum, für die $g_i f_{ik}$ nicht bekannt ist, nach den Elementen und nach den Ionisationsstufen auf, wobei wir die Linien, die zu einem beliebig vorgegebenen Element in einer vorgegebenen Ionisationsstufe gehören, entsprechend dem Anregungspotential ε_i des unteren Niveaus in Gruppen zusammenfassen, z. B. von 0 bis 0,5 eV, von 0,5 bis 1,0 eV usw. Dann ist nach (12.36) für jede derartige Gruppe der Verlauf der $\lg g_i f_{ik} \lambda_0$ durch den Verlauf von $\lg X_f$ bestimmt. Für jede Linie einer solchen Gruppe trägt man den aus den Messungen erhaltenen Wert $\lg \frac{W_\lambda}{\lambda}$ zusammen mit dem zugehörigen „solaren Wert“ von $\lg X_f$ auf und zieht durch alle Punkte dieser Gruppe eine glatte Kurve, die einen Teil der Wachstumskurve darstellt. Hierauf verschieben wir die einzelnen „Teile“ in horizontaler Richtung, so wie es angegeben worden ist, und erhalten die resultierende Wachstumskurve. Endlich versuchen wir sie in die bestmögliche Übereinstimmung mit einer theoretischen Wachstumskurve zu bringen. Ebenso verfahren wir mit unserer „Standard“-Wachstumskurve, von der wir ausgingen und die aus den zuverlässigsten Werten von $g_i f_{ik}$ ermittelt wurde. In beiden Fällen können wir aus dem gemessenen W_λ/λ und dem schon bestimmten v_0 die Werte $(\lg X_0)_{\mathrm{St}}$ und $(\lg X_0)_\odot$ und folglich auch die Differenz zwischen diesen beiden Größen bestimmen.

Die Anregungstemperatur für das vorliegende Element können wir folgendermaßen bestimmen: Wir schreiben die Formel (12.35) einmal für die Sonne und ein zweites Mal für den Stern und subtrahieren beide Gleichungen:

$$(\lg X_0)_{\mathrm{St}} - (\lg X_0)_\odot = \\ = \lg \frac{(N_r)_{\mathrm{St}}\,(u_r)_\odot}{(N_r)_\odot\,(u_r)_{\mathrm{St}}} - \lg \frac{(v_0)_{\mathrm{St}}}{(v_0)_\odot} - 5040\,\varepsilon_i \left[\frac{1}{(T_A)_{\mathrm{St}}} - \frac{1}{(T_A)_\odot}\right]. \quad (12.40)$$

Hieraus folgt, daß für die Linien eines beliebigen Atoms oder Ions die Differenz zwischen den $\lg X_0$ eine l i n e a r e Funktion von ε_i ist. Folglich erhalten wir eine Gerade, wenn wir für verschiedene Liniengruppen auf der Abszissenachse

die Differenz $(\lg X_0)_{\mathrm{St}} - \lg (X_0)_{\odot}$ und auf der Ordinatenachse das Potential ε_i auftragen. Die Neigung dieser Geraden ist durch $\left[\frac{1}{(T_A)_{\mathrm{St}}} - \frac{1}{(T_A)_{\odot}}\right]$ bestimmt, und wenn $(T_A)_{\odot}$ bekannt ist, so ist es auch $(T_A)_{\mathrm{St}}$. Diese Methode der Bestimmung von $(T_A)_{\mathrm{St}}$ ist auch in dem Fall anwendbar, daß man nicht die Differenz der $\lg X_0$, sondern der $\lg X_f$ benutzt. Die Formel (12.40), in der die Anpassung der beobachteten Kurven an die theoretische enthalten ist, ist aus dem Grunde wichtig, daß man mit ihrer Hilfe die chemische Zusammensetzung der Sterne, die von ähnlichem Spektraltyp wie die Sonne sind, im Vergleich zur Sonne untersuchen kann.

Schließlich weisen wir darauf hin, daß man die beschriebene Methode zur Bestimmung von $(T_A)_{\mathrm{St}}$ über $(T_A)_{\odot}$ auch in den Fällen anwenden kann, in denen die Wachstumskurve für den Stern aus den Laboratoriumswerten $g_i f_{ik}$ gewonnen worden ist.

An Stelle des Vergleichs der Sternatmosphären mit der Sonnenatmosphäre kann man – worauf O. A. MELNIKOW als erster hingewiesen hat – mit größerer Sicherheit die Atmosphäre zweier Sterne von benachbartem Spektraltyp vergleichen, z. B. die Überriesen vom Typ A und F, die Zwerge vom Typ A und F usw.

Tatsächlich kann man in dem vorliegenden Fall annehmen, daß die Atmosphären der beiden Sterne die gleiche Struktur besitzen. Diese Methode wurde in der Praxis von T. M. FOFANOWA in Pulkowo auf die Untersuchung einer Reihe von Überriesen angewandt [14].

Wir wenden uns noch einmal den „solaren Werten“ von $\lg X_f$ zu und weisen darauf hin, daß bei ihrer Anwendung große Vorsicht geboten ist. Bei der Bestimmung von $\lg X_f$ aus der Wachstumskurve des Sonnenspektrums ist vorausgesetzt worden, daß alle hierbei benutzten „Standardlinien“ ein und derselben absorbierenden (streuenden) Schicht entsprechen. Dagegen kann das Auftreten der kontinuierlichen Absorption, die mit der Frequenz veränderlich ist, dazu führen, daß die in den verschiedenen Bereichen des Spektrums befindlichen Linien Schichten verschiedener „Dicke“ entsprechen. Dies ist unbedingt zu beachten. Daher ist es genaugenommen am besten, wenn man bei der Konstruktion der Wachstumskurven die Laboratoriumswerte $g_i f_{ik}$ benutzt, oder aber die theoretischen Werte, wenn diese zuverlässig genug sind.

6. Die aus Beobachtungen ermittelten Wachstumskurven. Die Turbulenzgeschwindigkeiten in den Sternatmosphären

Wir wenden uns jetzt den Resultaten, die sich aus den Wachstumskurven ergeben, und ihrer Deutung zu.

Mit der Ableitung von Wachstumskurven für die Sonne und die Sterne haben sich zahllose Untersuchungen beschäftigt. In der Sowjetunion werden diese Arbeiten von O. A. MELNIKOW und seinen Schülern in Pulkowo durchgeführt.

In Abb. 32 bringen wir eine Wachstumskurve für die Sonne, die von L. A. Mitrofanowa in Pulkowo für die Linien von Fe I abgeleitet wurde (die $g_i f_{ik}$ wurden im Laboratorium aus den Emissionslinien von Fe I ermittelt).

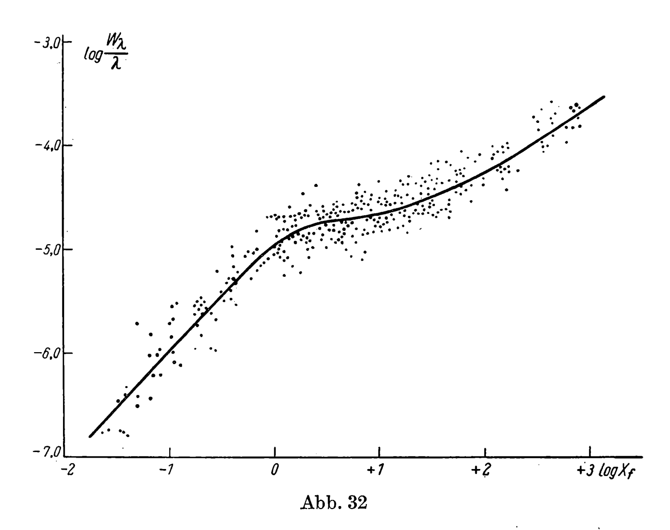


Abb. 32

In Abb. 33 ist eine Wachstumskurve wiedergegeben, die von O. A. Melnikow in Pulkowo aus den Ti II-Linien für den Überriesen α Cyg abgeleitet worden ist. Hier sind ebenfalls Laboratoriumswerte für $g_i f_{ik}$, die aus Emissionslinien bestimmt wurden, benutzt. In Abb. 32 sind die einzelnen Punkte für jede Linie aufgetragen, in Abb. 33 dagegen Mittelwerte (aus einigen Linien), wobei der Durchmesser der Kreisscheibchen der Anzahl der Linien, die in die Bestimmung des Mittels eingehen, proportional ist.

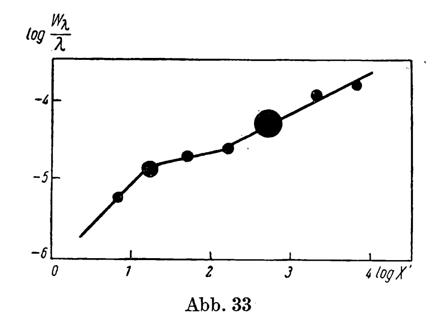


Abb. 33

Mit Hilfe der erwähnten Arbeiten gelang es, eine Reihe interessanter Gesetzmäßigkeiten bezüglich des physikalischen Zustandes der Sternatmosphären aufzudecken.

Aus der Konstruktion der Wachstumskurven und ihrem Vergleich mit den theoretischen Wachstumskurven ergab sich, daß v_0 in vielen Fällen und insbesondere in den Atmosphären der Überriesen beträchtlich größer ist als die mittlere kinetische (thermische) Geschwindigkeit, die der mittleren Temperatur der Sternatmosphären entspricht. So erreicht beispielsweise die über v_0 aus der Wachstumskurve ermittelte Turbulenzgeschwindigkeit v_t [es wurde die Formel (11.29) mit $T \approx T_e$ benutzt] für die Überriesen, deren Temperatur mit der der Sonne vergleichbar ist, in einigen Fällen die Größenordnung von 10 km/sec, während die mittlere thermische Geschwindigkeit in dem betrachteten Fall die Größenordnung 1 km/sec besitzt. Für die Sonne selbst sind die Turbulenzgeschwindigkeiten in der „umkehrenden Schicht" anscheinend nicht größer als 1,5 km/sec.

Dieses Ergebnis zeigt, daß die Bedingungen für das Entstehen von turbulenten Strömungen in den stark ausgedehnten und verhältnismäßig dünnen Hüllen der Überriesen günstiger liegen als in den dichten und wenig ausgedehnten Atmosphären der Zwerge.[1])

Ferner sprechen die vorliegenden Daten dafür, daß das bei den Überriesen ermittelte v_t für die ionisierten Atome größer ist als für die neutralen. Dieser Umstand ist offenbar darauf zurückzuführen, daß das mittlere Niveau, auf dem sich die ionisierten Atome in der Atmosphäre eines Überriesen befinden, höher liegt (wegen des kleineren p_e) als das für die neutralen. So ist z.B. bei dem Zwerg Prokyon für die neutralen Atome $v_t \approx 1$ km/sec und für die ionisierten Atome $v_t \approx 3$ km/sec. Bei dem Überriesen α Persei sind die entsprechenden Werte $v_t \approx 3{,}5$ km/sec und 6,5 km/sec. Endlich liegen Anzeichen dafür vor, daß sich in den Atmosphären der Überriesen v_t mit zunehmendem Anregungspotential ε_i verringert. Dies entspricht ebenfalls, wenn man von den Angaben über die Sonnenchromosphäre ausgeht, einer Vergrößerung von v_t dadurch, daß sich das Niveau, auf dem sich die absorbierenden Atome befinden, nach oben verschiebt. Als Beispiel geben wir an, daß für α Persei die Linien mit $\varepsilon_i \approx 0{,}0$ eV $v_t = 7{,}0$ km/sec und die Linien mit $\varepsilon_i \approx 4{,}5$ eV $v_t \approx 3{,}5$ km/sec ergeben. Dieser Sachverhalt weist darauf hin, daß in den Atmosphären der Überriesen für die verschiedenen Atome gesonderte effektive Schichten wirksam sind. Die ionisierten Atome liegen beträchtlich höher als die neutralen.

Das Anwachsen der Turbulenzgeschwindigkeit mit der Höhe des Niveaus in der Sternatmosphäre tritt besonders deutlich beim Studium solcher Doppelsysteme wie ζ Aurigae in Erscheinung. Das System ζ Aurigae besteht aus einem Riesen vom Typ K 5 mit stark ausgedehnter Atmosphäre und einem beträchtlich kleineren Stern vom Typ B 8. Außerhalb der Bedeckung besitzt

[1]) Anscheinend gibt es (bisher noch nicht aufgeklärte) Ausnahmen von dieser Gesetzmäßigkeit. Z.B. ist bei dem Überriesen α Car die Turbulenzgeschwindigkeit annähernd so groß wie bei den Zwergen. Dieses Beispiel zeigt, daß man hier mit Verallgemeinerungen vorsichtig sein muß.

das System ein zusammengesetztes Spektrum: im roten Spektralbereich dominiert das K-Spektrum, im blauen und violetten Spektralbereich das B-Spektrum.

Wenn der B-Stern hinter den K-Riesen tritt, erscheinen im blauen und violetten Spektralbereich des Systems, in dem bis dahin das B-Spektrum dominierte, zahlreiche scharfe Absorptionslinien, die durch die Absorption des Lichtes des B-Sternes in der ausgedehnten Atmosphäre des roten Riesen hervorgerufen werden. Hierdurch bietet sich die Möglichkeit, die Atmosphäre des K-Sternes in Abhängigkeit von der Höhe über ihrer Photosphäre zu studieren. Wenn der B-Stern hinter dem K-Stern hervortritt, geht das gleiche in umgekehrter Richtung vor sich.

Die Ableitung einer Wachstumskurve für verschiedene Zeiten nach dem Hervortreten des B-Sternes hinter dem K-Stern, d.h. für verschiedene Höhen, führte zu folgenden Ergebnissen: in der Höhe $0{,}8 \cdot 10^6$ km beträgt die Turbulenzgeschwindigkeit 6,5 km/sec und in der Höhe $20{,}6 \cdot 10^6$ km 13 km/sec. Dies bestätigt unmittelbar unsere obigen Feststellungen.

In zahlreichen Fällen sind die Turbulenzgeschwindigkeiten besonders groß. So beträgt z.B. die Turbulenzgeschwindigkeit bei ε Aurigae etwa 20 km/sec, und eine noch größere Turbulenzgeschwindigkeit liegt in der Atmosphäre von 17 Leporis (67 km/sec) vor.

Es ist klar, daß das Auftreten von turbulenten Strömungen zu einer Vergrößerung der Linienbreite und zu einem verwaschenen Aussehen der Linie führt. Dieser Effekt fällt bei hinreichend großem v_t sogar schon bei einer oberflächlichen Betrachtung des Spektrogramms eines Sterns auf.

Das Auftreten von turbulenten Bewegungen in den Sternatmosphären und das Anwachsen der Turbulenz mit der Höhe sprechen dafür, daß die Atmosphären der betrachteten Sterne außergewöhnlich kompliziert gebaut sind. Die Atmosphären der Überriesen zeichnen sich durch eine besonders komplizierte Struktur aus. In ihnen treten außer den allgemeinen turbulenten Bewegungen zusätzliche differentielle Bewegungen der einzelnen Elemente auf. So besitzen nach einer Untersuchung von G. A. Schain und P. F. Schain [31] die Wasserstofflinien im Spektrum der Überriesen α Cygni und β Orionis gegenüber den Linien der ionisierten Metalle eine positive Verschiebung, die im ersten Fall $+\,1{,}9$ km/sec und im zweiten Fall $+\,4$ km/sec beträgt. Im Spektrum von α Cygni tritt wahrscheinlich eine geringe Verschiebung der ionisierten Metallinien gegenüber den neutralen auf usw. Wir haben es hier offenbar außer der allgemeinen Turbulenz mit einem Materiestrom mit einer für die verschiedenen Elemente verschiedenen Geschwindigkeit zu tun.

Abschließend ist zu dem Problem der Turbulenzgeschwindigkeiten folgende Bemerkung zu machen: Das Studium der Konturen der Absorptionslinien in den ausgedehnten Atmosphären zeigt, daß man sie von dem Fall unterscheiden muß, daß die Atmosphäre aus einer dünnen Schicht besteht (siehe § 13). Eine Untersuchung in dieser Richtung zeigt, daß die aus der Wachstumskurve ohne Berücksichtigung dieses Faktors ermittelte Turbulenzgeschwindigkeit gegenüber der wirklichen Turbulenzgeschwindigkeit in der Sternatmosphäre zu klein ist. Für die Überriesen, die eine ausgedehnte Atmosphäre besitzen, kann dieser Effekt eine beträchtliche Größe erreichen.

7. Die Anregungstemperatur. Die Dämpfungskonstante

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie die Anregungstemperatur zu bestimmen ist. Die oben angegebenen Methoden sind nicht nur aus dem Grunde wichtig, um T_A selbst zu finden, sondern auch, um die BOLTZMANNsche Temperaturverteilung in der äußeren Schicht der Sterne nachzuprüfen. Wenn Y und damit nach (12.5), (12.35), (12.37) und (12.38) auch

$$\lg \frac{N_i}{g_i} = Y - \lg \frac{\sqrt{\pi}\, e^2}{m_e c} \frac{1}{v_0} = \lg \frac{N_r}{u_r} - \frac{5040}{T_A} \varepsilon_i \tag{12.41}$$

lineare Funktionen von ε_i sind, so ist die Anwendung der BOLTZMANNschen Formel für ein vorgegebenes Intervall von ε_i gerechtfertigt. [Die Gleichheit zwischen dem ersten und dem letzten Glied der Formel (12.41) ergibt sich aus der logarithmischen Form der BOLTZMANNschen Formel.]

Die Ergebnisse von entsprechenden Untersuchungen zeigen, daß die Linearität in den meisten Fällen (natürlich innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler) für ε_i von 0 bis etwa 5 eV erfüllt ist.[1]) Als Beispiel bringen wir eine graphische Darstellung von O. A. MELNIKOW (Abb. 34), die für die neutralen Eisenlinien im Sonnenspektrum abgeleitet wurde (u_0 ist die Zustandssumme für das neutrale Eisen).

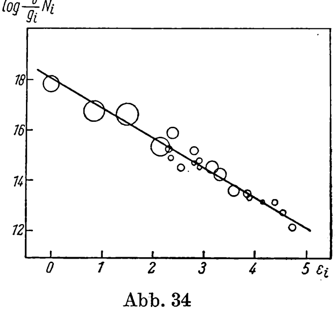


Abb. 34

Bei der Bestimmung der Temperatur T_A aus analogen graphischen Darstellungen erweist diese sich in den meisten Fällen niedriger als die effektive Temperatur des Sternes. Beispielsweise ist für die Sonne $T_e = 5710°$. Gleichzeitig erhielt O. A. MELNIKOW aus kalibrierten $g_i f_{ik}$ für Fe I $T_A = 4580° \pm 100°$. A. DEMIDOWA erhielt aus den theoretischen Werten $S \frac{s}{\sum s}$ für Fe I $T_A = 4700° \pm 450°$, und S. E. WOINOWA ermittelte aus einer mittleren Wachstumskurve für Fe I $T_A = 4780° \pm 15°$. Ähnliche anomal niedrige Werte von T_A erhält man für die Sonne auch aus anderen Daten. Allerdings kommt man auch in einigen Fällen, z. B. bei Va I, auf $T_A \approx 5100°$, d. h. auf einen Wert, der näher bei $T_e = 5700°$ liegt.

Die Zusammenstellung aller Angaben über T_A für die Sonne zeigt überdies eine überaus starke Streuung in den T_A-Werten für die verschiedenen Elemente. Es ist möglich, daß wir es hier tatsächlich mit verschiedenen T_A für die verschiedenen Elemente zu tun haben.

1) Für $\varepsilon_i > 5$ eV liegen zur Zeit noch keine zuverlässigen Resultate vor. Über die Fälle, in denen Abweichungen von der Linearität auftreten, siehe § 15.

Ähnliche Resultate ($T_A < T_e$) erhält man in der Regel auch bei den Sternen, wobei die Differenz zwischen T_e und T_A bisweilen einige tausend Grad betragen kann.[1]) Außerdem ist die Differenz $T_e - T_A$ bei den Riesen offenbar kleiner als bei den Zwergen. Für Sirius und γ Gemini (Sterne der Hauptreihe) erhält man bei $T_e \approx 10000°$ etwa $T_A \approx 6000°$!

Wir merken an, daß man bei den Sternen T_A sowohl aus der linearen Abhängigkeit zwischen Y und ε_i als auch durch den Vergleich der Linienintensitäten im Sternspektrum mit den entsprechenden Linien im Sonnenspektrum bestimmen kann [siehe Gleichung (12.40)].

Zum Abschluß gehen wir noch kurz auf die Deutung der Ungleichung $T_A < T_e$ ein. Zur Zeit ist die Sachlage hier noch völlig ungeklärt. Wir weisen jedoch auf zwei Möglichkeiten hin:

1. Man könnte das anomal niedrige T_A dadurch zu erklären versuchen, daß in den Frequenzen der Absorptionslinien, in denen die Anregungsprozesse der Atome vor sich gehen, die Strahlungsdichte gerade durch das Vorhandensein der Absorptionslinien in diesen Frequenzen geschwächt wird. Wie wir in § 15 sehen werden, müssen wir jedoch diesen Erklärungsversuch aus theoretischen Gründen fallen lassen.

2. Eine eingehende Analyse der Wachstumskurven zeigt, daß das Anwachsen von v_t, d.h. der Turbulenzgeschwindigkeit, mit dem Anregungspotential ε_i in einem endlichen Intervall von $\lg X_0$ auf die Wachstumskurve den gleichen Einfluß ausübt wie eine Verkleinerung von T_A. Mit anderen Worten, der eine Einfluß kann den anderen kompensieren. Wir setzen jetzt voraus, daß v_t in Wirklichkeit mit abnehmendem ε_i anwächst. Wenn wir dann fälschlicherweise annehmen, daß die Streuung der Punkte um die Wachstumskurve nur auf die Fehler in W_λ und f_{ik} zurückzuführen ist, d.h., wenn wir $v_t = \text{const}$ annehmen, erhalten wir einen zu kleinen Wert für T_A. Es ist möglich, daß die Differenz zwischen T_A und T_e teilweise auf diesen Umstand zurückzuführen ist, weil – wie wir gesehen haben – v_t tatsächlich mit kleiner werdendem ε_i, d.h. mit der Höhe in der Sternatmosphäre, anwächst. Diese Erklärung (die von Struve und Unsöld vorgeschlagen wurde) kann nur an solchen Multipletts nachgeprüft werden, deren Intensitäten die ganze Wachstumskurve umfassen.

Wir betrachten jetzt die aus der Wachstumskurve abgeleitete Größe Γ_{ik}/ν_0. In den meisten Fällen ist Γ_{ik}/ν_0, das – wie wir gezeigt haben – ein Mittelwert für die gesamte Wachstumskurve ist, beträchtlich größer als der Wert, der nur einem einzigen Abklingvorgang der Strahlung entspricht und im Mittel (für $\lambda = 5000$ Å) etwa $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ beträgt. Für die Sonne erhält man beispielsweise auf Grund zahlreicher Untersuchungen einen mittleren Wert für Γ_{ik}/ν_0, der

---

[1]) Das gleiche Ergebnis erhält man nach O. A. Melnikow auch für die Cepheiden, die nichtstationäre Sterne sind. Siehe O. A. Melnikow, Spektralphotometrie der Sterne δ Cephei und η Aquilae und der K-Effekt für die Cepheiden. Veröffentlichungen des Astronomischen Hauptobservatoriums, LXIV, Serie II, 1950 (О. А. Мельников, Спектрофотометрия звезд δ Цефея и η Орла и K-эффект для цефеид. Труды Главной астрономической обсерватории, LXIV, серия II, 1950).

ungefähr fünf- bis zehnmal größer ist als die angegebene Zahl $1{,}5 \cdot 10^{-7}$. Das gleiche gilt auch für die meisten Zwergsterne. Dies ist nur dadurch zu erklären, daß die Konstante δ_{ik} in Formel (11.25) und folglich auch Γ_{ik} hauptsächlich durch die Stoßdämpfung und nicht durch die Strahlungsdämpfung bestimmt werden.

Diese wichtige Schlußfolgerung wird von uns im folgenden Paragraphen bestätigt. Im Augenblick können wir sie nachprüfen (nur qualitativ), wenn wir folgende Überlegungen durchführen:

Wenn die Größe Γ_{ik}/ν_0 tatsächlich durch die Stoßdämpfung bestimmt wird, muß sie nach (11.45), (11.47) und (11.49) mit zunehmender Dichte der Materie anwachsen und sich mit abnehmender Dichte verkleinern.

Mit anderen Worten, es ist zu erwarten, daß Γ_{ik}/ν_0 in den Atmosphären der Riesen kleiner ist als in den Atmosphären der Zwerge. Für die ionisierten Atome muß diese Größe im Mittel kleiner sein als für die neutralen, weil sich die ersteren im Mittel in größerer Höhe befinden als die letzteren.

Diese Vermutungen werden zum Teil durch die Beobachtungen bestätigt, wenn auch in einigen Fällen Abweichungen von den erwarteten Gesetzmäßigkeiten auftreten. So geht aus dem vorliegenden Material hervor, daß bei den neutralen Elementen Γ_{ik}/ν_0 für die Riesen in der Nähe von Γ_{ik}/ν_0 für die Zwerge liegt, d.h. etwa zehnmal größer als die Strahlungsdämpfungskonstante ist, daß dagegen bei den ionisierten Elementen Γ_{ik}/ν_0 etwa gleich der Größe $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ ist.

Im allgemeinen ist das Material bis jetzt noch dürftig. Bevor man daher an endgültige Verallgemeinerungen gehen kann, sind noch weitere Untersuchungen erforderlich.

8. Kritische Bemerkungen

Die zweckmäßige Anwendung der Wachstumskurve führt zu einer Reihe von wichtigen Ergebnissen. Wir dürfen jedoch nicht vergessen, daß die oben entwickelte Theorie sehr vereinfacht und schematisch ist. Aus diesem Grunde sind einige kritische Bemerkungen am Platze. Erstens muß man bei der Verwendung der vorgenommenen Beobachtungen große Vorsicht walten lassen. So zeigte z.B. T. M. Fofanowa (Pulkowo) [14], daß bei Verwendung eines Spektrographen mit kleiner Dispersion die aus der Wachstumskurve ermittelte Geschwindigkeit v_0 mit abnehmender Dispersion des benutzten Spektrographen (fiktiv) zunimmt. Daher sind zur Ableitung von Wachstumskurven solche Spektrogramme zu benutzen, die eine hinreichend große lineare Dispersion (größer als 10 Å/mm) besitzen. Zweitens gründet sich die oben entwickelte Theorie der Wachstumskurven auf eine Reihe von vereinfachenden Voraussetzungen, von denen die hauptsächlichen die folgenden sind:

1. Das von uns benutzte Modell einer „umkehrenden Schicht" und die ihm entsprechende Formel (12.9) sind stark vereinfacht. Diese Formel setzt insbesondere für alle λ eine gleiche „Dicke" der umkehrenden Schicht voraus. Dies ist einer Unabhängigkeit der Größe $\varkappa_\nu$ von ν äquivalent. Im Hinblick

hierauf sind in neuerer Zeit zahlreiche Berechnungen durchgeführt worden, die sich auf die genauere Formel (10.20) mit ihren verschiedenen Modifikationen stützen.

Den Ausdruck für η_ν kann man in Verbindung mit Gleichung (11.39) und der Proportion $\sigma_\nu : \sigma_{\nu_0} = s_\nu : s_{\nu_0}$ folgendermaßen umformen:

$$\eta_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\varkappa_\nu} = \frac{\sigma_{\nu_0}}{\varkappa_\nu} \varphi(a, p) = \eta_{\nu_0} \varphi(a, p), \tag{12.42}$$

mit

$$\eta_{\nu_0} = \frac{\sigma_{\nu_0}}{\varkappa_\nu}. \tag{12.43}$$

Hierdurch wird das Argument X_0 der elementaren Theorie der Wachstumskurve durch die Größe η_{ν_0} ersetzt. Wir erhalten wieder eine Schar von Wachstumskurven für verschiedene Werte der Konstante a. Bei der Ermittlung dieser Kurvenschar muß man für den Quotienten b_ν/a_ν und auch für ε_ν, die über (10.9) in die Gleichung (10.20) eingehen, einen bestimmten Wert annehmen. Wie wir in § 14 sehen werden, kann man in vielen Fällen für die Berechnung der Äquivalentbreiten $\varepsilon_\nu = 0$ setzen.

Aus den Ergebnissen von entsprechenden Berechnungen folgt, daß der allgemeine Charakter der mit Hilfe der Gleichung (12.20) abgeleiteten Wachstumskurven der gleiche ist wie in den Abb. 30 oder 31, wenn auch im einzelnen gewisse Unterschiede auftreten. Ein Vergleich der von T. M. Fofanowa [14][1]) abgeleiteten Wachstumskurve für verschiedene Modelle zeigt jedoch, daß bei der gegenwärtig gebräuchlichen Dispersion diese Differenzen zwischen den einzelnen Punkten der Wachstumskurven nicht mit genügender Genauigkeit festgelegt werden können. Dessenungeachtet bleibt die Ableitung einer physikalisch begründeten theoretischen Wachstumskurve eine der allerwichtigsten Aufgaben der theoretischen Astrophysik.

2. In der von uns behandelten elementaren Theorie benutzten wir einen gewissen Mittelwert von Γ_{ik}/ν_0 für alle Linien. Diese Voraussetzung erweist sich aber sowohl im Falle der Strahlungsdämpfung als auch im Falle der Stoßdämpfung als zu grob. Ferner haben wir in dieser Theorie angenommen, daß Γ_{ik}/ν_0 nicht von der Tiefe in der Sternatmosphäre abhängt. In dem Fall, daß Γ_{ik}/ν_0 durch die Stoßdämpfung bestimmt wird, ist diese Voraussetzung bekanntermaßen falsch, weil Γ_{ik} von der Teilchenzahl an der vorliegenden Stelle abhängt.

3. Ferner benutzt man bei der Ableitung einer zusammengesetzten Wachstumskurve aus einigen Elementen einen Mittelwert für v_0. Dieser Schritt wird gewöhnlich damit begründet, daß die Turbulenzgeschwindigkeit aller Atome ungefähr gleich ist. Das ist aber nur näherungsweise gültig.

---

[1]) In derselben Arbeit wird der Einfluß einer Änderung des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten mit der Wellenlänge auf die aus der Wachstumskurve ermittelten Parameter untersucht. Dieser Einfluß erwies sich als relativ gering.

4. Schließlich rechnen wir in der dargelegten Theorie damit, daß die Anregungstemperatur T_A in der gesamten Sternatmosphäre konstant ist. Dies ist – wie wir in § 15 sehen werden – ebenfalls nur eine grobe Näherung.

Daher ist es nicht verwunderlich, daß die Übereinstimmung zwischen den theoretischen und den aus Beobachtungen abgeleiteten Wachstumskurven sehr häufig unbefriedigend ist. Die Unstimmigkeiten längs der X_0-Skala erreichen bisweilen 0,15–0,20 im Logarithmus X_0 oder, was dasselbe ist, im Logarithmus $N_i f_{ik}$. Die Verwendung der Formel (10.20) an Stelle von (12.9) ändert die Sachlage nur unbeträchtlich.

§ 13. Die Deutung der beobachteten Konturen der Absorptionslinien in den Spektren der Sterne und der Sonne

1. Die Berechnung des Verhältnisses des selektiven Absorptionskoeffizienten zum kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten

In dem vorliegenden Paragraphen behandeln wir die Konturen der Absorptionslinien in den Spektren der zu den verschiedenen Spektraltypen gehörigen Sterne. Zu Beginn betrachten wir die Metallinien und darauf die Wasserstoff- und die Heliumlinien. Außerdem untersuchen wir den Einfluß der Rotation des Sternes auf die Konturen der Spektrallinien.

Das größte Vertrauen verdienen die theoretischen Berechnungen für die Resonanzlinien.[1]) Dagegen sind die Rechnungen für die Linien, die von einem angeregten Niveau aus entstehen (die „subordinate lines"), mit größerer Unsicherheit behaftet (siehe § 14).

Die Hauptschwierigkeit besteht darin, daß die Prozesse der Absorption und der nachfolgenden Reemission für die „subordinate lines" völlig inkohärent sind. Daher werden wir im weiteren Verlauf unserer Untersuchung speziell die Fälle mit Nichtresonanzlinien beiseite lassen.

Die Ableitung einer Linienkontur läßt sich in erster Linie auf die Berechnung von

$$\eta_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\varkappa_\nu} \tag{13.1}$$

zurückführen, die in die Strömungsgleichung (10.2) eingeht. Eine Größe von geringerer Bedeutung, die gewöhnlich nur für die zentralen Frequenzen der Absorptionslinien eine wichtige Rolle spielt, ist ε_ν. Wenn man alle drei Größen, η_ν, ε_ν und B_ν, der Gleichung (10.2) durch die grundlegenden physikalischen Parameter T, p, p_e, ϱ usw. ausdrückt und diese (ebenso wie in § 7 unter Benutzung der Theorie der Photosphären) mit der optischen Tiefe τ_ν für die Frequenz der

[1]) Diese Bemerkung bezieht sich nicht auf die Theorie der durch die Sternrotation verzerrten Konturen.

vorgegebenen Absorptionslinien in Verbindung bringt, reduziert sich das Problem auf die Lösung der Gleichung (10.2).

Wir betrachten nun ein konkretes Beispiel: die Absorptionslinien im Spektrum der Sonne, wobei wir unsere obigen Ausführungen berücksichtigen. (Die heißeren Sterne werden wir später behandeln.)

Gleich zu Anfang haben wir vereinbart, daß die Materiedichte ϱ, auf die sich die Koeffizienten σ_ν und $\varkappa_\nu$ der Gleichung (9.29) und folglich auch (10.2) beziehen, die Gesamtdichte der Materie[1]) sein soll, die sämtliche in 1 cm³ befindlichen Atome berücksichtigt. Wir bestimmen σ_ν, indem wir von der allgemeinen Formel (5.23) ausgehen.

Es sei s_ν der Absorptionskoeffizient für ein Atom, das sich im i-ten Anregungszustand und in der r-ten Ionisationsstufe befindet. Die Anzahl dieser Atome in 1 cm³ sei $n_{r,i}$. Nach (5.23) können wir für die selektive Intensitätsschwächung durch diese Atome

$$dI_\nu = -I_\nu s_\nu n_{r,i} dh = -I_\nu s_\nu \frac{n_{r,i}}{\varrho} \varrho dh \tag{13.2}$$

schreiben. Folglich ist der auf 1 g der Gesamtmasse bezogene selektive Absorptionskoeffizient gleich

$$\sigma_\nu = s_\nu \frac{n_{r,i}}{\varrho}. \tag{13.3}$$

Für das folgende ist es zweckmäßig, die Anzahl der in den Zuständen i und r befindlichen Atome nicht auf 1 cm³, sondern auf ein Gramm Materie (unter Berücksichtigung der Atome aller Elemente) zu beziehen. Diese Anzahl, die wir mit $n^g_{r,i}$ bezeichnen, ist gleich

$$n^g_{r,i} = \frac{n_{r,i}}{\varrho}. \tag{13.4}$$

Folglich gilt die allgemeine Beziehung

$$\sigma_\nu = s_\nu n^g_{r,i}. \tag{13.5}$$

Es sei ferner die Gesamtzahl der Atome des betrachteten Elementes in allen Ionisations- und Anregungszuständen und auf 1 g Materie bezogen gleich n^g. Wir können $n^g_{r,i}$ und n^g folgendermaßen in Beziehung zueinander setzen:

$$n^g_{r,i} = Z_{r,i}(p_e, T)\, n^g, \tag{13.6}$$

wobei die Funktion $Z_{r,i}$ leicht nach den Formeln von SAHA (5.11) und BOLTZMANN (5.54) berechnet werden kann. [Ein Beispiel für diese Berechnung ist in § 16, Formeln (16.1) bis (16.11) angegeben.]

[1]) Wir könnten σ_ν und $\varkappa_\nu$ auch auf die durch die Wasserstoffatome bestimmte Dichte beziehen, doch ist die angegebene Methode die gebräuchlichere.

Wir können n^g selbst wie folgt bestimmen: Es sei n die Gesamtzahl der Atome des betrachteten Elementes in 1 cm³. Dann ist offenbar

$$n^g = \frac{n}{\varrho}. \tag{13.7}$$

Die Dichte ϱ können wir als Summe

$$\varrho = \sum_s n_s m_s \tag{13.8}$$

schreiben, wobei m_s die Atommasse eines entsprechenden Elementes ist. Die Summation ist über sämtliche Elemente zu erstrecken. Den Ausdruck (13.8) kann man auch folgendermaßen schreiben:

$$\varrho = n_{\mathrm{H}} m_{\mathrm{H}} \left\{1 + \frac{n_{\mathrm{He}} m_{\mathrm{He}}}{n_{\mathrm{H}} m_{\mathrm{H}}} + \frac{n_{\mathrm{Li}} m_{\mathrm{Li}}}{n_{\mathrm{H}} m_{\mathrm{H}}} + \cdots\right\}, \tag{13.9}$$

wobei wir rechts unten an die Zahlen n und m die Symbole für die entsprechenden Elemente angefügt haben. Wie man gemäß Tabelle 1 leicht berechnen kann, sind in der geschweiften Klammer von (13.9) nur die ersten beiden Glieder, die den Wasserstoff und das Helium berücksichtigen, von Bedeutung. Wenn wir ferner unter Benutzung derselben Tabelle $n_{\mathrm{He}} : n_{\mathrm{H}} = 0{,}2$ annehmen, wird die geschweifte Klammer gleich 1,8. Um die Allgemeinheit zu wahren, bezeichnen wir jedoch die geschweifte Klammer mit b. Unter Benutzung von (13.5), (13.6), (13.7) und (13.9) erhalten wir für σ_ν:

$$\sigma_\nu = s_\nu Z_{r,i}(p_e T) \frac{1}{b\, m_{\mathrm{H}}} \frac{n}{n_{\mathrm{H}}}. \tag{13.10}$$

Somit muß für die Berechnung von σ_ν die Häufigkeit des betrachteten vorgegebenen Elementes im Verhältnis zum Wasserstoff bekannt sein. Wir nennen in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen des § 5 diese Häufigkeit a_s. Die Größe n_1 der Formel (5.1) ist in unserem Fall die Anzahl der Wasserstoffatome in 1 cm³ (neutrale und ionisierte).

Oft gibt man die Häufigkeit der Atome eines beliebigen Metalls in einem gewissen Volumen im Verhältnis zur Gesamtzahl der Atome aller Metalle in diesem Volumen an und bezeichnet diese Häufigkeit mit α. Die Häufigkeit der Wasserstoffatome im Verhältnis zu allen Metallatomen bezeichnet man mit A. Die Größe A liegt in den Sternatmosphären in der Nähe von 10000. Somit kann man, wenn n_{M} die Anzahl aller Metallatome in 1 cm³ bedeutet, die Formel (13.10) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}\sigma_\nu &= s_\nu Z_{r,i}(p_e, T) \frac{a_s}{b\, m_{\mathrm{H}}} \\ &= s_\nu Z_{r,i}(p_e, T) \frac{1}{b\, m_{\mathrm{H}}} \frac{n}{n_{\mathrm{M}}} \frac{n_{\mathrm{M}}}{n_{\mathrm{H}}} = s_\nu Z_{r,i}(p_e, T) \frac{1}{b\, m_{\mathrm{H}}} \frac{\alpha}{A}.\end{aligned} \tag{13.11}$$

Methoden zur Bestimmung von a_s, α und A betrachten wir in § 15. Bis dahin können wir sie als bekannte Daten ansehen und sie beispielsweise der Tabelle 1 entnehmen.

Jetzt wenden wir uns dem kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu$, der in die Formel (13.1) eingeht, zu. In der Sonnenatmosphäre spielen bis zu den Werten der mittleren optischen Tiefe $\bar{\tau}$, die von der Größenordnung Eins sind, die negativen Wasserstoffionen die Hauptrolle. Bei einem weiteren Vordringen in die Tiefe beginnt die Absorption durch die neutralen Wasserstoffatome von größerer Bedeutung zu werden. Daher können wir schreiben

$$\varkappa_\nu = \varkappa_\nu(\mathrm{H}^-) + \varkappa_\nu(\mathrm{H}). \tag{13.12}$$

Betrachten wir $\varkappa_\nu$ (H^-). Für gewöhnlich bezieht man den Absorptionskoeffizienten für H^- auf ein neutrales Wasserstoffatom und auf die Einheit des Elektronendruckes (1 bar). Diesen Koeffizienten, der in Abb. 15,b graphisch dargestellt ist, bezeichnen wir mit k_ν (H^-). Benutzen wir wieder die Formel (5.23), so wie wir bei der Ableitung von σ_ν aus (13.2) vorgegangen sind, erhalten wir

$$\varkappa_\nu(\mathrm{H}^-) = \frac{(n_0)_\mathrm{H}\, k_\nu(\mathrm{H}^-)}{\varrho}\, p_e, \tag{13.13}$$

wobei $(n_0)_\mathrm{H}$ die Anzahl der neutralen Wasserstoffatome in 1 cm^3 ist.

Führen wir in (13.13) den Ausdruck (13.9) ein, so finden wir

$$\varkappa_\nu(\mathrm{H}^-) = \frac{(n_0)_\mathrm{H}}{n_\mathrm{H}} \frac{k_\nu(\mathrm{H}^-)}{b\, m_\mathrm{H}}\, p_e. \tag{13.14}$$

In der Sonnenphotosphäre ist bis zu Werten von $\bar{\tau}$, die ungefähr 5–7 betragen, der Wasserstoff praktisch neutral, so daß $(n_0)_\mathrm{H} : n_\mathrm{H} \approx 1$.

Wir wenden uns jetzt dem Koeffizienten $\varkappa_\nu$ (H) zu. Der durch die Gleichung (5.68) dargestellte kontinuierliche Absorptionskoeffizient für den Wasserstoff bezieht sich auf ein Wasserstoffatom (Z ist für Wasserstoff gleich Eins). Wir bezeichnen ihn mit k_ν (H). Wenn wir genauso vorgehen wie bei der Ableitung von (13.13), erhalten wir für $\varkappa_\nu$ (H):

$$\varkappa_\nu(\mathrm{H}) = \frac{k_\nu(\mathrm{H})\, n_\mathrm{H}}{\varrho}. \tag{13.15}$$

Die Anwendung von (13.9) ergibt

$$\varkappa_\nu(\mathrm{H}) = \frac{k_\nu(\mathrm{H})}{b\, m_\mathrm{H}}. \tag{13.16}$$

Somit erhalten wir mit Rücksicht darauf, daß $(n_0)_\mathrm{H} : n_\mathrm{H} \approx 1$, wobei $(n_0)_\mathrm{H}$ die Anzahl der neutralen Wasserstoffatome in 1 cm^3 ist, für $\varkappa_\nu$:

$$\varkappa_\nu = \varkappa_\nu(\mathrm{H}^-) + \varkappa_\nu(\mathrm{H}) = \frac{1}{b\, m_\mathrm{H}} [k_\nu(\mathrm{H}^-)\, p_e + k_\nu(\mathrm{H})]. \tag{13.17}$$

Schließlich bekommen wir mit (13.11) und (13.17) für η_ν:

$$\eta_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\varkappa_\nu} = \frac{s_\nu a_s Z_{r,i}(p_e, T)}{k_\nu(\mathrm{H}^-)\, p_e + k_\nu(\mathrm{H})}. \tag{13.18}$$

Wenn man s_ν vorgibt, ist η_ν eine bekannte Funktion der grundlegenden physikalischen Parameter einer Atmosphäre, T, p, p_e und ϱ. Ihre Änderung mit der Tiefe muß aus der Theorie der Sternphotosphären bekannt sein. Die in die Strömungsgleichung (10.2) eingehende Veränderliche τ_ν ist in zahlreichen Arbeiten durch die mittlere Tiefe τ ersetzt worden, die wir in § 6 definiert haben. Hierbei wird der folgende Quotient eingeführt:

$$n_\nu = \frac{\varkappa_\nu}{\bar{\varkappa}}, \tag{13.19}$$

wobei $\bar{\varkappa}$ der Absorptionskoeffizient $\varkappa_\nu$ ist, der nach einer beliebigen Methode über das gesamte Spektrum gemittelt wurde (siehe § 6). In diesem Fall nimmt $d\tau_\nu$ aus Gleichung (10.2) die Gestalt

$$d\tau_\nu = \varkappa_\nu \varrho\, dh = n_\nu \bar{\varkappa} \varrho\, dh = n_\nu\, d\tau \tag{13.20}$$

an. Diese Methode ist aus dem Grunde bequem, weil η_ν in der Sonnenphotosphäre nur schwach von der Tiefe abhängt. Daher kann man näherungsweise $\eta_\nu = \mathrm{const}$ setzen. In diesem Fall ist

$$\tau_\nu = n_\nu \tau. \tag{13.21}$$

Wir betrachten jetzt ε_ν aus Gleichung (10.2). Es genügt in den meisten Fällen und insbesondere für die Resonanzlinien der Ungleichung $\varepsilon_\nu \ll 1$. Wie man sich leicht überzeugen kann, z. B. mit Hilfe der Formeln (10.20) und (10.9), wird der Einfluß von ε_ν auf die Intensität nur in den inneren Bereichen der Linien, d. h. in den Kernen, merklich. In den Linienflügeln, wo η_ν klein gegen Eins oder mit Eins vergleichbar ist, ist der Einfluß von ε_ν verschwindend klein. Andererseits ist das Problem der zentralen Restintensitäten bis auf den heutigen Tag noch nicht gelöst: die Beobachtungen liefern größere Werte als die Theorie. Im vorliegenden Paragraphen werden wir uns nur mit den weiter außen liegenden Bereichen der Absorptionslinien befassen, so daß wir das Problem der zentralen Bereiche der Linien nicht berühren. Im Hinblick hierauf nehmen wir einstweilen an, daß $\varepsilon_\nu = 0$ ist.

2. Die Anwendung der Theorie auf die Absorptionslinien im Sonnenspektrum. Die Rolle der Druckeffekte

Um mit Hilfe von (13.18) und der Voraussetzung $\varepsilon_\nu = 0$ die Kontur einer beliebigen Absorptionslinie abzuleiten, müssen wir in den Ausdrücken (11.39) oder (11.24) für s_ν die durch die Gleichung (11.25) bestimmte Größe δ_{ik} festlegen.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die D-Linien des neutralen Natriums. Weil die D-Linien Resonanzlinien sind, können wir annehmen, daß in (11.25) $\tau_i = \infty$ und folglich $\gamma_i = \gamma_1 = 0$ ist. Ferner sind unter den auf der Sonne herrschenden Bedingungen die drei letzten Glieder der rechten Seite von (11.20) gegenüber dem ersten Glied, d.h. A_{21}, für die D-Linien verschwindend klein. Daher können wir für δ_{ik} schreiben:

$$\delta_{12} = \frac{\Gamma_{12}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}(\gamma_2 + \gamma_c) \approx \frac{1}{4\pi}(A_{21} + \gamma_c). \tag{13.22}$$

Wir berechnen jetzt γ_c. Wie sich aus den Rechnungen für $\Delta\lambda_g$ ergibt, wird praktisch die Kontur der gesamten Linie nur durch die Stoßdämpfung bestimmt. Um entscheiden zu können, welcher der beiden Fälle (der Fall mit $k = 4$ oder mit $k = 6$) auf die D-Linien im Sonnenspektrum anzuwenden ist, muß man die durch die Formeln (11.47) und (11.49) gegebenen γ_c miteinander vergleichen. Schon im voraus kann man sagen, daß der Fall mit $k = 6$ der wichtigere ist. Tatsächlich sind die Linien, die gegenüber dem quadratischen STARKeffekt besonders empfindlich sind, solche, die an hochangeregten, schwach gebundenen Termen (besonders den Termen D, F usw.) entstehen; dagegen sind die D-Linien Resonanzlinien entsprechend Übergängen zwischen S- und P-Termen. Mit Rücksicht hierauf beginnen wir mit γ_c für $k = 6$.

Für unsere Berechnungen wählen wir ein Niveau in der Sonnenatmosphäre, das bei $\lambda = 5010$ Å einer optischen Tiefe von $\tau_\lambda = 0{,}48$ entspricht. Für dieses Niveau ist die nach der Photosphärentheorie (siehe Tabelle 13 in § 17) mit $T_e = 5710°$ berechnete Temperatur T gleich 5859°. Ferner ist für dieses Niveau $p \approx 1{,}32 \cdot 10^5$ bar und $p_e \approx 19$ bar.

Wir machen jetzt von der Gleichung (11.49) Gebrauch. Für Natrium und für Wasserstoff erhalten wir für $\bar{v}$ einen Wert von $1{,}1 \cdot 10^6$ cm/sec. Ferner erwähnten wir schon, daß für die D-Linien $C = 2{,}65 \cdot 10^{-32}$ ist.

Für p können wir mit genügender Genauigkeit

$$p = p_{\mathrm{H}} + p_{\mathrm{He}} = (n_{\mathrm{H}} + n_{\mathrm{He}})\,kT \approx 1{,}2\,n_{\mathrm{H}}kT \tag{13.23}$$

schreiben, wobei wir in Übereinstimmung mit Tabelle 1 für $n_{\mathrm{He}}/n_{\mathrm{H}}$ das Verhältnis 0,2 angenommen haben. Für den von uns benutzten Wert von T und p ist $n_{\mathrm{H}} = 1{,}3 \cdot 10^{17}$. Führen wir dies alles in (11.49) ein, so erhalten wir $\gamma_c = 2{,}2 \cdot 10^9$. Andererseits ist $\gamma_2 \approx A_{21}$ für die D-Linien von der Größenordnung $7 \cdot 10^7$. Folglich ist γ_c für die D-Linien in der betrachteten Tiefe in der Sonnenatmosphäre ungefähr 30mal größer als die Strahlungsdämpfungskonstante γ. Bei einer Verkleinerung von $\bar{\tau}_\lambda$ nimmt γ_c ziemlich schwach ab. So verringert sich für $\bar{\tau}_\lambda \approx 0{,}15$ der Wert für γ_c ungefähr um das 0,6fache, doch übertrifft er auch in diesem Fall $\gamma_2 = A_{21}$ ungefähr um das 20fache. Wir haben gezeigt, daß der Ausdruck für C in Wirklichkeit nur näherungsweise gültig ist. Jedoch besteht – ungeachtet der möglichen Fehler – kein Zweifel darüber, daß γ_c die Größe γ_2 mindestens um eine Größenordnung übertrifft.

Die von den Elektronen bewirkte Verbreiterung ist in dem vorliegenden Fall wesentlich kleiner. Laboratoriumsmessungen zeigten, daß die D-Linien bei

160 kV/cm um $\Delta\lambda = 0{,}025$ Å verschoben sind. Wenn man die Formel (11.44) zur Bestimmung von C und (11.47) zur Bestimmung von γ_c mit $n = n_e$ benutzt, findet man leicht, daß bei dem oben angegebenen Wert $p_e = 19$ bar γ_c von der Größenordnung $5{,}4 \cdot 10^7$, d.h. sogar kleiner als $\gamma_2 = A_{21}$, wird. Somit ist die Dämpfung durch Zusammenstöße der Na-Atome mit H-Atomen die Hauptursache für die Verbreiterung der D-Linien im Sonnenspektrum.

Dieses Resultat ist offenbar für alle Resonanzlinien im Sonnenspektrum gültig.

Wenn wir (wie wir es soeben an dem Beispiel für die D-Linien von Na I durchgeführt haben) die Hauptfaktoren bestimmt haben, die zu einer Verbreiterung der uns interessierenden Linien führen, können wir nach Gleichung (11.25) δ_{ik} und somit [Gleichung (11.38)] auch a für jede Tiefe in der Sonnenatmosphäre bestimmen. Den Quotienten η_ν können wir mit Hilfe der Formeln (11.39) und (13.18) bestimmen:

$$\eta_\nu = \frac{a_s Z_{r,i}(p_e, T)}{k_\nu(\mathrm{H}^-)\, p_e + k_\nu(\mathrm{H})}\, \varphi(a, p)\, s_{\nu_0}, \tag{13.24}$$

wobei s_{ν_0} durch die Gleichung (11.40) gegeben ist.

In erster Linie müssen wir für eine vorgegebene Linie die Abhängigkeit der Größe η_ν von der Tiefe in der Sonnenatmosphäre untersuchen. Die Ausgangsparameter T, p, p_e und ϱ liefert die Theorie der Photosphäre.

Wenn die Änderung von η_ν mit der Tiefe verhältnismäßig klein ist ($\eta_\nu \approx$ const) und wenn man die Abhängigkeit der Funktion B_ν von τ_ν mit genügender Genauigkeit durch eine lineare Funktion [Gleichung (8.10)] darstellen kann, besteht die Möglichkeit, für die Linienkontur die Formel (10.20)[1] zu benutzen. Hierbei haben wir schon darauf hingewiesen, daß man für die Flügel der Resonanzlinien $\varepsilon_\nu = 0$ setzen kann. Wenn dagegen η_ν mit der Tiefe stark veränderlich ist, wendet man am besten die Methode der numerischen Integration der Strömungsgleichung an (siehe § 10).

Für die äußeren Bereiche der Linienflügel, für die schwachen Linien und überhaupt für alle die Fälle, in denen die Linientiefe R_ν 15% nicht übersteigt, kann man die Formel (10.43) verwenden. Wir erinnern, daß man die in dieser Formel auftretenden Funktionen $G_1(\tau_\nu)$ und $G_2(\tau_2)$ unmittelbar aus der Theorie der Photosphären und bei der Sonne aus dem Gesetz der Randverdunkelung ermitteln kann. In unserem Fall $\varepsilon_\nu = 0$ ist der Koeffizient der wahren selektiven Absorption $\varkappa_\nu^0$ nach (9.31) gleich Null und $\sigma_\nu^0 = \sigma_\nu$. Folglich ist in dem letzten Ausdruck für die Gleichung (10.43) das erste Glied gleich Null, und im zweiten Glied tritt unter dem Integralzeichen die Beziehung $\sigma_\nu^0 : \varkappa_\nu = \sigma_\nu : \varkappa_\nu = \eta_\nu$ auf, die wir schon in Formel (13.24) bestimmt haben. Somit reduziert sich die Be-

[1]) Für den Fall, daß η_ν sich schwach mit der Tiefe ändert und kleine Abweichungen von der linearen Entwicklung (8.10) auftreten, sind von einigen Autoren diesen Bedingungen angepaßte Formeln abgeleitet worden. Für das Studium dieser Formeln verweisen wir den Leser auf die Spezialliteratur (siehe z. B. M. Tuberg, The variations of absorption-line contours across the solar disc. Astrophysical Journal **103**, 145, 1946).

stimmung von R_ν auf die numerische Auswertung des zweiten Integrals in dem letzten Ausdruck der Gleichung (10.43).

Die Ableitung der Linienkonturen nach den angegebenen Formeln haben wir hier für die gesamte Sonnen- oder Sternscheibe ausgeführt, indem wir den Strahlungs**strom** benutzt haben. Das gleiche Verfahren können wir auch für die

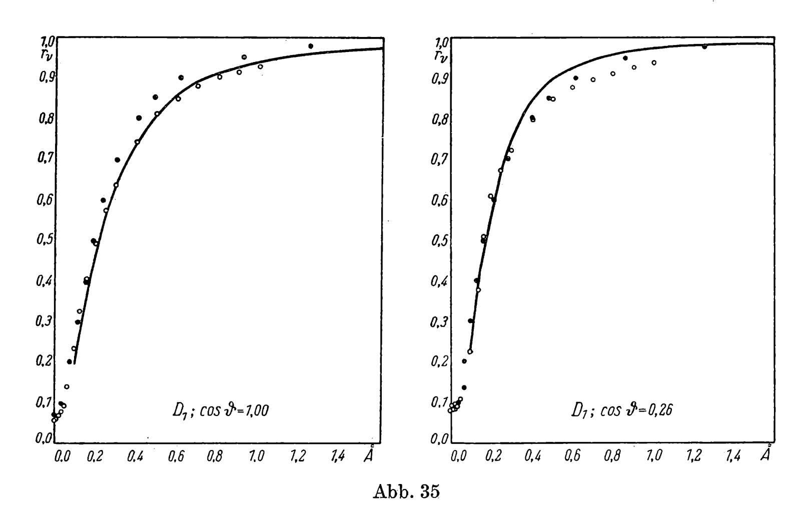


Abb. 35

einzelnen Punkte der Sonnenscheibe unter Benutzung der Strahlungs**intensitäten** durchführen. Hierbei müssen wir die Strömungsgleichung (10.2) für den vorgegebenen Winkel ϑ und nicht für den Strahlungsstrom lösen. Dies können wir insbesondere auch für alle drei Fälle durchführen, die wir in § 10 betrachtet haben:

1. den „Standardfall“ mit η_ν = const, ε_ν = const und $B_\nu = a_\nu + b_\nu \tau_\nu$;
2. die numerische Integration der Strömungsgleichung;
3. die von uns in § 10 betrachtete Methode für kleine R_ν [2, Kapitel XII].

Auch in diesen Fällen muß man von dem Quotienten η_ν ausgehen, für dessen Bestimmung wir schon allgemeine Methoden betrachtet haben.

Wenn wir die Kontur einer beliebigen Linie für einige Werte von ϑ ableiten, können wir somit die Änderung dieser Kontur mit wachsendem Abstand vom Mittelpunkt der Sonnenscheibe untersuchen und die Ergebnisse mit den Beobachtungen vergleichen. In Abb. 35 ist ein solcher Vergleich für die D_1-Linie des Sonnenspektrums gegeben.[1]) Hier ist η_ν nach dem oben beschriebenen Ver-

---

[1]) D. Harris, Theoretical contours of absorption lines. Astrophysical Journal **109**, 53, 1949.

fahren berechnet. Die Kontur ist für den Fall abgeleitet, daß die Änderung von η_ν in der Atmosphäre im Vergleich zur Größe von η_ν selbst klein und B_ν eine lineare Funktion von τ_ν ist.

In dem vorliegenden Fall sind diese Bedingungen mit hinreichender Genauigkeit erfüllt. Die Koeffizienten a_ν und b_ν der Entwicklung (8.10) sind dem beobachteten Gesetz der Randverdunkelung entnommen. Die Konturen sind für zwei Punkte der Sonnenscheibe ermittelt: für die Sonnenmitte und für $R = 0{,}97\ R_\odot$. Für a_s, d.h. für die relative Häufigkeit des Natriums, wurde der Wert $a_s \approx 3 \cdot 10^{-6}$ angenommen, der dem in Tabelle 1 angegebenen Werte von a_s ($\approx 2 \cdot 10^{-6}$) sehr nahekommt. Aus Abb. 35 geht hervor, daß die unter Berücksichtigung der Stoßdämpfung berechnete theoretische Kontur im großen und ganzen eine genügende Übereinstimmung mit der aus den Beobachtungen ermittelten Kontur aufweist, wenn auch zwischen beiden sowohl in der Linienmitte als auch in den Flügeln gewisse Abweichungen auftreten. Insbesondere fordert die dargestellte Theorie mit $\varepsilon_\nu = 0$ in der Linienmitte $r_{\nu_0} \approx 0$, während die Beobachtungen $r_\nu \approx 0{,}06$ ergeben. Die Ursache dieser Abweichungen ist zur Zeit noch nicht geklärt. Es ist durchaus möglich, daß die inkohärenten Streuprozesse, die wir im folgenden Paragraphen besprechen, zur Lösung dieses Problems beitragen.

Fast zu den gleichen Resultaten führt der Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen auch bei den anderen Resonanzlinien des Sonnenspektrums. Somit zeigt die Theorie der Absorptionslinien, die die Druckeffekte berücksichtigt – ungeachtet der noch vorliegenden kleinen Unstimmigkeiten – in quantitativer Hinsicht eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen. Wenn wir die Druckeffekte vernachlässigen und annehmen würden, daß δ_{ik} nur durch die Strahlungsdämpfung bestimmt sei, so würde die Theorie viel schmalere Linien ergeben, als aus den Beobachtungen folgt.

Diese wichtige Schlußfolgerung stimmt völlig mit den Ergebnissen überein, die aus der Analyse der Wachstumskurven bezüglich Γ_{ik} folgen.

Als Ergänzung zu den aufgezählten Ergebnissen, die mit den Druckeffekten in Verbindung stehen, erwähnen wir noch eine Tatsache, die auf die großen Beträge dieser Effekte hinweist. Es zeigt sich z.B., daß bei allen gemessenen Linien der diffusen Serie $3\,{}^1P^0 - n\,{}^1D$ des neutralen Magnesiums im Sonnenspektrum die W_λ/λ nahezu konstant sind. Sie liegen alle in dem Abschnitt der Wachstumskurven, der der Strahlungsdämpfung entspricht. Ihn diesem Fall ist nach Formel (12.28)

$$\frac{W_\lambda}{\lambda} \sim \lambda \sqrt{f_{ik}\delta_{ik}}\,. \tag{13.25}$$

Mit wachsender Nummer der Linie in der Serie verkleinert sich aber f_{ik}. Wenn ferner δ_{ik} nur durch die Strahlungsdämpfung bestimmt wäre, so würde sich nach Formel (11.25) und (11.20) auch δ_{ik} mit wachsendem k verkleinern, weil A_{ki} mit wachsendem k abnimmt. Endlich verringert sich auch die Größe λ mit wachsendem k. Daher müßte in diesem Fall W_λ/λ für die Linien der erwähnten Serie mit der Seriennummer der Linien abnehmen. Daher deutet die

beobachtete Konstanz dieser Größe auf ein Anwachsen von γ_c mit zunehmender Seriennummer die Linie hin, wobei dieses Anwachsen die Abnahme von f_{ik}, λ und A_{ki} kompensiert. Das Anwachsen von γ_c mit der Seriennummer läßt sich leicht erklären. Je größer k ist, um so größer ist die Bahn des Elektrons im Atom und um so größer ist der effektive Querschnitt der verbreiternden Zusammenstöße. Rechnungen zeigen, daß die Dämpfungskonstante γ_c von der Seriennummer $k = 3$ bis zur Seriennummer $k = 9$ ungefähr um das 30- bis 40fache zunimmt.

Somit spielen in den meisten Fällen die Druckeffekte in der Sonnenatmosphäre eine weit wichtigere Rolle als die Strahlungsdämpfung, so daß sehr oft $\gamma_c \gg \gamma_i + \gamma_k$ ist. Diese Untersuchungen sind jedoch noch nicht abgeschlossen. Insbesondere sind die Konstanten C in den Formeln (11.45), (11.47) und (11.49) nur für eine kleine Anzahl von Linien bekannt, und auch hier sind die entsprechenden numerischen Werte nur Näherungswerte. Man muß ferner bei der Entscheidung darüber, welcher Fall für die Verbreiterung die Hauptrolle spielt, der Fall mit $k = 4$ oder mit $k = 6$, große Vorsicht walten lassen. Bisweilen sind beide Fälle zu berücksichtigen. So besitzen z.B. für die ersten Glieder in der Serie $3\,^1P^0 - n\,^1D$ von Mg I die neutralen Wasserstoffatome die größte Wirksamkeit ($k = 6$), für die höheren Serienglieder beginnt aber die Linienverbreiterung durch die Elektronen (und in geringerem Maße durch die Ionen, siehe § 11) die Hauptrolle zu spielen, d.h., es liegt schon der Fall $k = 4$ vor. Demnach besitzen für diese Linien der Serien beide Effekte praktisch die gleiche Bedeutung.

3. Die Metallinien in den Sternspektren. Die Linienverbreiterung durch Turbulenz

Wir besprechen jetzt kurz die Konturen der Metallinien in den Spektren der zu anderen Spektraltypen gehörigen Sterne. Die Methode ist hier im allgemeinen die gleiche wie bei der Sonne. Wir müssen die Struktur der Photosphäre für einen vorgegebenen Stern berechnen, wobei wir entsprechende Ausdrücke für η_ν und für ε_ν erhalten (siehe § 14). Dann reduziert sich unser Problem auf die Integration der Strömungsgleichung nach irgendeiner Methode. Bei der Berechnung von Linienkonturen in einem Sternspektrum stößt man jedoch häufig auf die zusätzliche Aufgabe, die Schwerebeschleunigung g auf der Sternoberfläche zu bestimmen. Ohne Kenntnis dieser Größe kann man die Struktur der Photosphäre nicht berechnen. Wenn für einen angegebenen Stern die Masse und der Radius unbekannt sind, muß man g aus den Absorptionslinien ermitteln. Eine der sichersten Methoden ist hier der Vergleich der theoretischen Konturen der Balmer-Serie mit den Konturen dieser Serie im Spektrum des Sternes, für den g gesucht wird. Außer den Linien der Balmer-Serie können auch andere Linien benutzt werden. Die effektive Sterntemperatur T_e wird nach den Methoden des § 16 bestimmt.

Zu den Sternspektren, die sich von dem der Sonne merklich unterscheiden, liegen bisher noch keine zuverlässigen theoretischen Konturen für die Absorptions-

linien der Metalle vor. Daher kann man auch keinen Vergleich zwischen der Theorie und den Beobachtungen durchführen und daraus Schlüsse ziehen. Bei der Ableitung von Konturen interessieren am meisten die Druckeffekte.

Bei den Sternen, die erheblich kühler als die Sonne sind, wird die Ermittlung von theoretischen Konturen durch das Auftreten der Molekülbanden erschwert. Bei den hinreichend heißen Sternen, in denen der Wasserstoff schon in beträchtlichem Maße ionisiert ist, wird die Linienkontur durch Stöße der Atome mit Ionen und Elektronen und teilweise mit neutralen Heliumatomen bestimmt. Bei noch höheren Temperaturen ist auch das Helium vollständig ionisiert.

Zahlreiche Beobachtungen zeigen, daß die Linien der ionisierten Metalle in den Spektren der Überriesen in der Regel tiefer und breiter sind als die gleichen Linien in den Spektren der weniger hellen Sterne vom selben Typ (das Umgekehrte beobachtet man bei den Wasserstoff- und Heliumlinien). Für diese Tatsache liegt bis heute noch keine Erklärung vor. Die Untersuchung dieses Falles wird durch das Fehlen von genauen Konturen für die Metallinien erschwert. Wegen der geringeren Schwerebeschleunigung in den Atmosphären der Überriesen gegenüber den Atmosphären der Sterne mit kleineren absoluten Helligkeiten ist die Dichte im ersten Fall geringer als im zweiten. Dies muß sowohl auf den kontinuierlichen als auch auf den selektiven Absorptionskoeffizienten einen Einfluß ausüben.

In den Spektren einiger Überriesen sind die Metallinien so breit und so verwaschen, daß dies sofort den Gedanken an eine beträchtliche Turbulenzbewegung in den Atmosphären dieser Sterne nahelegt, wie wir sie schon im vorhergehenden Paragraphen besprochen haben. In einigen Fällen wird diese Behauptung dadurch bestätigt, daß die Kerne der Absorptionslinien durch eine Dopplerverteilung (11.34) dargestellt werden können, allerdings mit einem $\Delta\nu_D$, das größenordnungsmäßig Geschwindigkeiten von einigen 10 km/sec entspricht. Aus den Wachstumskurven folgt für diese Sterne gewöhnlich ein v_t, das in der Größenordnung von einigen km/sec liegt. Beispielsweise fand Struve aus der Analyse der Linienkonturen im Spektrum von δ Canis maioris eine Turbulenzgeschwindigkeit der Materie von etwa 30 km/sec. Dagegen ergibt die Wachstumskurve für diesen Stern eine Turbulenzgeschwindigkeit von der Größenordnung 5 km/sec.

Die wahrscheinlichste Erklärung dieser Tatsache ist die folgende: Wenn wir von den gegenwärtigen Vorstellungen über die Natur der Turbulenz ausgehen, haben wir Grund zu der Annahme, daß auch in den Sternatmosphären die Turbulenz durch das Auftreten von einzelnen Zellen verschiedener Größe gekennzeichnet ist, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten in verschiedenen Richtungen bewegen [15, S. 106–114]. Um das Verständnis der folgenden Ausführungen zu erleichtern, betrachten wir zwei Grenzfälle. Im ersten Fall wollen wir annehmen, daß die Dimension der Turbulenzzellen mit der Dicke der „umkehrenden Schicht" vergleichbar oder größer als sie ist. Im zweiten Fall wollen wir annehmen, daß die Dimension der Zellen beträchtlich kleiner als diese Dicke ist.

Es liegt auf der Hand, daß im ersten Fall jede Zelle in der umkehrenden Schicht des Sternes die Photosphärenstrahlung unabhängig von dem Vor-

handensein anderer Turbulenzzellen absorbiert. Daher vergrößert hier die Existenz der Turbulenzbewegungen die in den Linien absorbierte Energie der Photosphärenstrahlung, d. h. die Äquivalentbreite der Linie, nicht. Die Linie wird nur entsprechend verbreitert, wobei ihre Kontur (abgesehen von der Zahl der absorbierenden Atome) durch die Geschwindigkeitsverteilung der Zellen bestimmt wird. Somit wird in diesem Fall das Auftreten der Turbulenz, die die Absorptionslinien verbreitert, die für $v_t = 0$ ermittelte Wachstumskurve nicht verändern. Dieser Fall ist demjenigen eines rotierenden Sternes völlig analog, bei dem W_λ ebenfalls unverändert bleibt.

Im zweiten Fall ist die Situation die gleiche wie bei dem Auftreten von gewöhnlichen thermischen Bewegungen mit DOPPLER-Charakter. In der Tat liegen hier die einzelnen Zellen übereinander. Daher wird ein durch die umkehrende Schicht nach außen (aus der Photosphäre heraus) dringender Strahl durch die Absorption in vielen Zellen geschwächt, die in Richtung des Strahls annähernd die gleiche Geschwindigkeitskomponente besitzen. Folglich vergrößert das Auftreten der Turbulenz in diesem Fall die Äquivalentbreite und ändert somit die Wachstumskurve. Diesen Fall haben wir im wesentlichen auch in § 12 behandelt.

Die angestellten Überlegungen vermögen den Charakter der Spektren solcher Sterne wie δ Canis maioris völlig zu erklären. In der Tat bedeuten die aus der Kontur ermittelte große Turbulenzgeschwindigkeit und die aus der Wachstumskurve ermittelte beträchtlich kleinere Geschwindigkeit, daß die Dicke der umkehrenden Schicht bei den erwähnten Sternen k l e i n e r als die in der Atmosphäre dieser Sterne am häufigsten anzutreffende Größe der Turbulenzzellen[1]) ist.

Daß das in den Atmosphären der Sterne wie ε Aurigae und 17 Leporis unmittelbar aus den Wachstumskurven gefundene v_t groß ist, erklärt sich durch die sehr große Ausdehnung der Atmosphären bei diesen Sternen. (Bei ε Aurigae ist dies unmittelbar nachgewiesen.) Hier sind die Dimensionen der Turbulenzzellen ohne Zweifel klein im Vergleich zur Dicke der umkehrenden Schicht.

Aus unseren Ausführungen folgt, daß das Problem der Turbulenz in den Sternatmosphären äußerst kompliziert ist. Außer dem Studium der Wachstumskurven muß man auch die K o n t u r e n selbst eingehend untersuchen. Dies ist im Hinblick auf das Problem der Geschwindigkeitsverteilung der Turbulenzzellen von großer Wichtigkeit. In § 11 benutzten wir für diese Verteilung als Arbeitshypothese das Gesetz (11.32), wobei v_0 durch die Gleichung (11.29) definiert war. Aus durchgeführten Rechnungen ergibt sich aber, daß verschiedene Gesetze auf völlig verschiedene Konturen führen. Hierbei ändert sich auch die Wachstumskurve. Daher kann sich das mit Hilfe von (11.32) ermittelte v_t in zahlreichen Fällen beträchtlich von der wirklichen mittleren Turbulenzgeschwindigkeit in einer Sternatmosphäre unterscheiden.

Zum Schluß wenden wir uns den sehr heißen Sternen, den O- und B-Sternen der frühen Unterklassen zu. Hier ist die Situation dadurch erschwert, daß in den Atmosphären dieser Sterne außer der allgemeinen wahren Absorption die

---

[1]) Die kleinen Zellen ergeben die aus der Wachstumskurve ermittelte Geschwindigkeit $v_t = 5$ km/sec.

Streuung der Strahlung an freien Elektronen eine beträchtliche Rolle spielt. Aus Rechnungen, die die thermische Bewegung der Elektronen berücksichtigen, geht hervor, daß dieser Effekt bei den heißen Überriesen einen erheblichen Einfluß ausüben kann. Hierbei erhöht die Streuung an Elektronen die Strahlungsintensität in den zentralen Bereichen der Linien und setzt sie in den Flügeln herab.

4. Die Balmer-Serie in den Sternspektren

Jetzt befassen wir uns mit der Deutung der Linienkonturen für die Balmer-Serie in den Sternspektren. Diese Linien sind – wie wir am Schluß des § 11 gezeigt haben – gewöhnlich durch die Einwirkung zwischenmolekularer elektrischer Felder verbreitert. Die Stoßverbreiterung spielt in diesem Fall überhaupt keine Rolle. Was die Linienverbreiterung durch Strahlungsdämpfung anbelangt, kann diese Frage durch den Vergleich der Absorptionskoeffizienten, die durch die Gleichungen (11.39) und (11.56) angegeben sind, für einen vorgegebenen Abstand $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ von der Linienmitte beantwortet werden. In der ersten Gleichung bestimmt sich δ_{ik} nach (11.25) aus der Summe $\gamma_i + \gamma_k$, wobei $i = 2$ und $k = 3, 4, 5, \ldots$; hierbei sind γ_2 und γ_k durch die Gleichung (11.20) gegeben. Wir können γ_c gleich Null setzen, da uns im Augenblick nur die Strahlungsdämpfung interessiert. Außerdem spielt die Stoßdämpfung im Vergleich zur „statistischen" Verbreiterung eine ganz geringfügige Rolle. Ferner können wir in die Gleichung (11.56) an Stelle von F_0 den Ausdruck aus (11.54) einsetzen. Hierbei müssen wir in Übereinstimmung mit unseren Ausführungen in § 11 n gleich der Anzahl der Ionen in 1 cm³ setzen (Elektronen sind an der Linienverbreiterung in der Balmer-Serie nicht wesentlich beteiligt). Da aber die Anzahl der Ionen in 1 cm³ der Anzahl der Elektronen in 1 cm³ gleich sein muß, können wir die Gleichung (11.56) folgendermaßen schreiben:

$$s_\lambda = (2{,}61\,e)^{\frac{3}{2}} \frac{C n_e}{(\lambda - \lambda_0)^{\frac{5}{2}}} = 321\,C \frac{p_e}{T} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{\frac{5}{2}}}, \qquad (13.26)$$

wobei $\lambda - \lambda_0$ in Ångströmeinheiten ausgedrückt ist. Wir erinnern daran, daß (13.26) nur für die Linienflügel gültig ist.

Der Vergleich von (11.39) und (13.26) zeigt, daß in der Praxis die Verbreiterung der Balmer-Linien in den meisten Fällen durch die Gleichung (13.26) bestimmt wird. So beginnt für die Linie Hγ bei der Temperatur von 10000° und für $\Delta\lambda = 4$ Å die Strahlungsdämpfung bei $p_e < 10$ bar an Bedeutung zu gewinnen; für $T = 5000°$ ist dieser Druck um die Hälfte geringer.

Bei vielen Riesen und insbesondere Überriesen wird jedoch die Linienverbreiterung in der Balmer-Serie in der Hauptsache durch die Strahlungsdämpfung und natürlich durch den Doppler-Effekt bestimmt. Wie sich aus Berechnungen ergibt, sind diese Faktoren nicht nur in den Atmosphären der Überriesen, sondern auch in den Atmosphären der zur Hauptreihe gehörigen Sterne für $T_e > 30000°$ ausschlaggebend. Die Linienverbreiterung durch elektrische Fel-

der spielt nur für höhere Serienglieder in den Sternatmosphären mit $T_e > 30000°$ eine bestimmte Rolle.

Zahlreiche Tatsachen bestätigen, daß die Linien der BALMER-Serie und insbesondere ihre höheren Glieder in den meisten Fällen durch „mikroskopische" elektrische Felder und nicht durch die Strahlungsdämpfung verbreitert werden.

1. Wenn die Linienbreite in der BALMER-Serie nur durch die Strahlungsdämpfung bestimmt wäre, so würde nach (13.25) die Äquivalentbreite W_λ sehr schnell mit zunehmender Seriennummer k der Linie abnehmen. Tatsächlich betragen die Oszillatorenstärken für die ersten vier Linien der BALMER-Serie $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$, $H\delta$ bzw. 0,637; 0,119; 0,0443; 0,0212. Für die hohen Serienglieder nimmt die Oszillatorenstärke wie k^{-3} ab. Ferner nehmen A_{ki} und λ mit Vergrößerung der Zahl k ab. Daher müßte bei reiner Strahlungsdämpfung schon die Linie $H\gamma$ sehr schmal sein. Die Beobachtungen zeigen aber, daß in den Spektren der Sterne von frühem Spektraltyp die Äquivalentbreite in den Linien der BALMER-Serie beim Übergang von $H\alpha$ zu höheren Seriengliedern zuerst anwächst und dann, nachdem sie ein deutliches Maximum erreicht hat, langsam abnimmt. In den Spektren der Sonne und der Sterne von sonnenähnlichem Typ ist dieses Maximum schwächer ausgeprägt.

Dieser Sachverhalt läßt sich leicht als Linienverbreiterung durch elektrische Felder erklären. Mit zunehmender Seriennummer der Linie wächst die Anzahl der aufgespaltenen Komponenten des oberen Terms (siehe Tabelle 6) und folglich die Breite der Linie selbst. Daher ist die annähernde Konstanz der Äquivalentbreiten, die man bei den Linien der BALMER-Serie beobachtet, das Ergebnis zweier entgegengesetzt wirkender Effekte: der Verkleinerung von $f_{ik}\delta_{ik}$ und der Vergrößerung der Aufspaltung des oberen Niveaus mit wachsendem k. Die Abnahme der Äquivalentbreite mit wachsendem k hinter dem erwähnten Maximum folgt daraus, daß f_{ik} und folglich die optische Dicke in den zentralen Bereichen der Linien abnimmt. Daher wird, wenn wir mit einem bestimmten k beginnen, die optische Dicke kleiner als Eins, d. h., die Linien entstehen in einer optisch dünnen Schicht. Folglich nimmt ungeachtet der (mit wachsendem k) fortgesetzten Verbreiterung der Linienflügel [Gleichung (11.55) und Tabelle 6] die Linientiefe in den zentralen Bereichen der Linie ab und führt zu einer Verkleinerung der Äquivalentbreite. Zu diesem Effekt kommt noch bei den höheren Seriengliedern die Überdeckung der Linienflügel infolge der Annäherung der Linien hinzu. Bei der Änderung von W_λ mit der Seriennummer spielt auch das Gesetz für die Änderung des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten $\varkappa_\nu$ mit der Frequenz eine große Rolle. Dieses Gesetz ist für die Sterne verschiedener Spektraltypen verschieden.

2. Die Breite der Linien der BALMER-Serie ist in den Spektren der Zwerge bedeutend größer als in den Spektren der Überriesen. Zur Veranschaulichung dieses Effektes möge die Abb. 36 dienen. In dieser Abbildung sind die Mikrophotogramme der Linien der BALMER-Serie für einen Überriesen vom Spektraltyp cA2 und einen gewöhnlichen Stern vom Typ A2 wiedergegeben, wie sie von G. A. SCHAIN aus Spektrogrammen gewonnen wurden, die mit dem 40″-Reflektor des Observatoriums von Simeis aufgenommen worden sind.

Diesen Effekt kann man unter Benutzung der Formel (13.26) leicht erklären. Aus ihr geht hervor, daß die Verbreiterung durch elektrische Felder um so größer ist, je größer p_e oder n_e ist. Folglich ist in den Atmosphären der Riesen, in denen die allgemeine Dichte und also auch n_e kleiner als bei den Zwergen ist, auch der Druckeffekt kleiner.

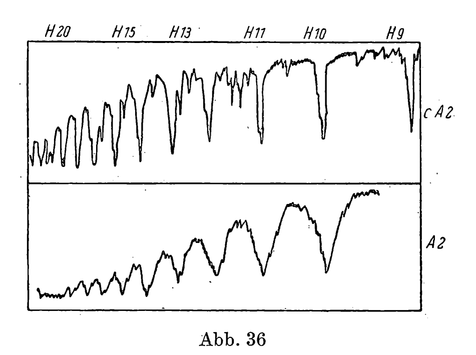


Abb. 36

In Abb. 37 sind typische Linienkonturen für Hγ dargestellt, die aus Spektren gewonnen sind, die mit großer Dispersion aufgenommen wurden. Die punktierte Kurve stellt die Linienkontur für Hγ im Spektrum des Überriesen Rigel (Spektraltyp cB 8) dar. Die untere Kontur ist die Linie Hγ im Spektrum von ζ Draconis, eines zur Hauptreihe gehörigen Sternes vom gleichen Spektraltyp.

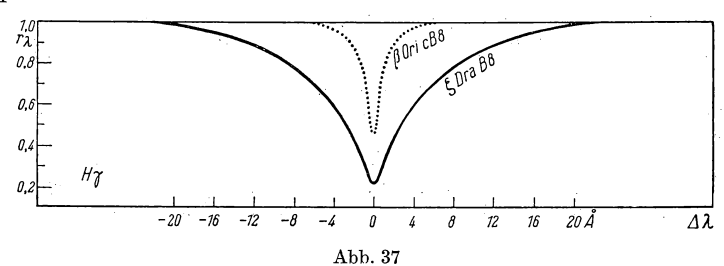


Abb. 37

Es ist interessant, daß in den Spektren der Überriesen vom Typ B die Form der Linienkonturen der Balmer-Serie geringen zeitlichen Änderungen unterliegt. Außerdem zeigen diese Konturen bisweilen eine geringe Asymmetrie, die sich ebenfalls mit der Zeit ändert. In den Spektren der Sterne mit verhältnismäßig geringer Leuchtkraft (beispielsweise der zur Hauptreihe gehörigen Sterne) ist nichts derartiges beobachtet. Dies weist auf den ganz besonderen Charakter der Struktur der Atmosphäre bei den Überriesen hin.

Auch die weißen Zwerge sind durch eine besondere Struktur ihrer Atmosphären gekennzeichnet. In Verbindung mit der überaus großen Materiedichte in ihren Atmosphären sind die Linien der BALMER-Serie in ihren Spektren außerordentlich breit.

Wenden wir uns jetzt der quantitativen Deutung der Konturen der BALMER-Serie in den Sternspektren zu. Wie bei früheren Überlegungen besteht das Hauptproblem darin, η_ν als Funktion von T, p, p_e und ϱ zu ermitteln. Weil die vorhandene Theorie für die inneren Bereiche der BALMER-Linien sehr unvollkommen ist, betrachten wir nur die Linienflügel. Wenn wir die Anwendbarkeit des statischen Falles voraussetzen, können wir für sie die Gleichung (13.26) benutzen.

Der durch die Gleichung (13.26) dargestellte Absorptionskoeffizient s_λ ist auf ein im zweiten Quantenzustand befindliches neutrales Wasserstoffatom bezogen. Seien in 1 cm³ $n_{0,2}$ derartige Atome vorhanden. Dann finden wir unter Berücksichtigung von (13.2), (13.3) und (13.9) für den auf 1 g der Gesamtmasse bezogenen Absorptionskoeffizienten

$$\sigma_\lambda = \frac{s_\lambda}{b\, m_{\mathrm{H}}} \frac{n_{0,2}}{n_{\mathrm{H}}}. \tag{13.27}$$

Das Verhältnis $n_{0,2} : n_{\mathrm{H}}$ können wir bei bekannten T und p_e mit Hilfe der Formeln von SAHA (5.11) und BOLTZMANN (5.54) bestimmen. Für die Bestimmung von $\varkappa_\nu$ ist im Falle der Sonnenatmosphäre die Gleichung (13.17) zu benutzen. Bei den Sternen vom Typ A 0, bei denen die Absorption hauptsächlich durch den neutralen Wasserstoff bewirkt wird, ist die Gleichung (13.16) zu benutzen usw.

Dabei erfordert ε_ν eine gesonderte Behandlung. Für die ersten Glieder der BALMER-Serie gilt bei nicht sehr hohen Temperaturen $\varepsilon_\nu \ll 1$. In diesem Fall besitzt – ebenso wie früher – ε_ν nur in den inneren Bereichen der Linie, die wir aber im Augenblick nicht betrachten, einen merklichen Einfluß. Bei hinreichend hohen Temperaturen ist die Strahlungsdichte schon so groß, daß die meisten Elektronen, die den Übergang $2 \rightarrow k$ vollzogen haben, durch Strahlung ionisiert werden. Dieser Fall entspricht der wahren selektiven Absorption mit $\varepsilon_\nu \approx 1$. Die Näherung $\varepsilon_\nu \approx 1$ gilt für die höheren Glieder der BALMER-Serie auch bei nicht sehr hohen Temperaturen, weil für diese Linien die Bindungsenergie $\chi_{0,k}$ sehr klein und daher die Wahrscheinlichkeit für eine Photoionisation von den entsprechenden Niveaus aus verhältnismäßig groß ist.

Uns interessieren die ersten Glieder der BALMER-Serie in den Spektren der nicht sehr heißen Sterne. Daher kann man in den erwähnten Fällen ohne merkliche Einbuße an Genauigkeit $\varepsilon_\nu = 0$ setzen.[1]) Die Ableitung der Konturen für die ersten Glieder der BALMER-Serie mit Hilfe der Formeln (13.26) und (13.27) wurde von zahlreichen Autoren vorgenommen, die hauptsächlich von den ersten

---

[1]) Einige Autoren bestimmen ε_ν auf empirischem Wege, indem sie [z.B. nach Formel (10.20)] sich damit begnügen, die theoretische Intensität in der Linienmitte mit der beobachteten Intensität in Übereinstimmung zu bringen.

beiden Methoden des § 10 Gebrauch machten. Aus diesen Rechnungen ergaben sich folgende Schlußfolgerungen: Die allgemeine Form der theoretischen Konturen, die Linienbreite usw. zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen. Die beste Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung wird in den äußeren Bereichen der Linienflügel erzielt. Hieraus ergibt sich, daß die statistische Verbreiterung durch elektrische Felder die Hauptursache für die Verbreiterung der BALMER-Linien ist. Ein mehr ins einzelne gehender Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen fördert aber eine Reihe von beträchtlichen Unstimmigkeiten zutage. So ergibt die Theorie für die inneren Bereiche der Flügel der BALMER-Serie in den Spektren der heißen Überriesen einen stärkeren Abfall von r_ν zur Linienmitte, als aus den Beobachtungen folgt. Überhaupt besteht für die inneren Bereiche der Flügel der BALMER-Linien und insbesondere für die zentralen Gebiete selbst von diesen Linien häufig keine befriedigende Übereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungen. Die Ursache dieser Unstimmigkeiten ist bis jetzt noch nicht völlig geklärt. Wir geben jedoch einige Faktoren an, die einen Einfluß ausüben können. Erstens ist die Gleichung (11.56) und alle aus ihr abgeleiteten Gleichungen nur richtig im rein statischen Fall, in dem sich die störenden Teilchen (Ionen) gegenüber den Wasserstoffatomen in Ruhe befinden. Folglich muß man an Stelle der Formel (11.56) eine genauere Formel benutzen, die die gegenseitige Bewegung der gestörten und der störenden Teilchen berücksichtigt (siehe § 11).

Ferner können die Turbulenzbewegungen, die sich am stärksten in den zentralen Gebieten der Linien bemerkbar machen, bei den Überriesen einen bedeutenden Einfluß gewinnen.

Endlich müssen wir beachten, daß die BALMER-Linien von angeregten Zuständen ausgehen. Daher kann für sie die Inkohärenz der Reemissionsprozesse von großer Wichtigkeit werden. Diese Inkohärenz kann zweifach auftreten: Erstens können die gewöhnlichen Streuprozesse vom Typ $2 \to l \to 2$ mit $l > 2$ inkohärent sein (siehe Abb. 24), zweitens braucht das Elektron, das den Übergang $2 \to l$ ausgeführt hat, nicht auf das Niveau 2 zurückzukehren, sondern kann auf ein beliebiges anderes Niveau zurückfallen, welches auch das Grundniveau sein kann. Das Elektron, das nicht von dem zweiten, sondern von einem anderen Niveau auf das höhere Niveau l gehoben wurde, kann hierauf den Übergang $l \to 2$ vollziehen, wobei es ein Quant der BALMER-Serie emittiert.

Die Prozesse der beiden Typen können gewissermaßen zu einem Energieaustausch zwischen den Spektrallinien führen (siehe § 14).

Diesen Umstand muß man bei einer weiteren Entwicklung der Konturentheorie der BALMER-Linien berücksichtigen.

Eine besondere Beachtung verdient das Problem der Zentralintensitäten in den Linien der BALMER-Serie. Diese Frage werden wir im folgenden Paragraphen behandeln. An dieser Stelle müssen wir jedoch eine wichtige Tatsache behandeln, die in unmittelbarer Beziehung zu den Konturen der BALMER-Linie steht. Weil in den zentralen Bereichen dieser Linien der Absorptionskoeffizient sehr groß ist, wird die in der Nähe der Frequenz ν_0 beobachtete Strahlung von den äußersten Schichten der Sternatmosphäre ausgehen, wo die Gesamtdichte

und folglich p_e verhältnismäßig klein ist. Daher kann es bei hinreichend kleinem p_e vorkommen, daß s_ν nicht durch die von einem elektrischen Felde herrührende Verbreiterung, sondern in der Hauptsache durch die Strahlungsdämpfung, verbunden mit dem DOPPLER-Effekt, d. h. durch die Formel (11.39), bestimmt wird. Da aber an der Entstehung der zentralen Gebiete der Linien eine verhältnismäßig geringe Zahl von Atomen beteiligt ist, wird nach Formel (11.39) die Kontur in der Linienmitte verhältnismäßig schmal. Somit werden die Konturen der BALMER-Linien folgendes Aussehen haben: Über eine breite Kontur, die durch die Wirkung der zwischenmolekularen elektrischen Felder entsteht, überlagert sich in der Mitte eine verhältnismäßig schmale Linie, die durch die Strahlungsdämpfung und den DOPPLER-Effekt hervorgerufen wird. Es ist klar, daß eine derartige „zusammengesetzte" Kontur am deutlichsten in den Spektren der gewöhnlichen Sterne und nicht etwa in denen der Überriesen ausgeprägt sein muß, weil bei diesen auch die Linienverbreiterung durch elektrische Felder weit weniger deutlich ausgeprägt ist als bei jenen.

G. A. SCHAIN[1]) machte als erster auf die Möglichkeit aufmerksam, daß in den Sternspektren solche „zusammengesetzten" Konturen auftreten können. Er stellte fest, daß ähnliche Konturen tatsächlich bei den BALMER-Linien in den Spektren von Sternen mit nicht sehr großer absoluter Helligkeit beobachtet werden. Die Existenz solcher Kerne (mit einer Breite von größenordnungsmäßig 1 Å) in den Linien der BALMER-Serie ist deshalb von Wichtigkeit, weil die Beobachter bei der Messung der Radialgeschwindigkeiten der Sterne an den Wasserstofflinien gerade die Lage dieser Kerne bestimmen, die den höchsten Schichten der Atmosphäre entsprechen. Der Vergleich der auf diese Weise ermittelten Geschwindigkeiten mit denjenigen, die man aus weniger starken (mit kleinerem R_{ν_0}) und daher in nicht so großen Höhen entstehenden Linien erhält, gibt uns die Möglichkeit, die relativen Bewegungen der Gase in den Sternatmosphären zu untersuchen.

5. Die Bestimmung der Schwerebeschleunigung in den Sternatmosphären aus den Linien der BALMER-Serie

Wenn wir für Sterne mit verschiedenen Werten der effektiven Temperatur T_e und verschiedenen Schwerebeschleunigungen g auf der Oberfläche theoretische Konturen der BALMER-Linien abgeleitet haben, können wir diese zur Bestimmung von g benutzen. Zu diesem Zweck geben wir einen beliebigen Wert für T_e vor, der in der Nähe der effektiven Temperatur des vorgegebenen Sternes liegt, und vergleichen die beobachtete Kontur einer beliebigen BALMER-Linie

[1]) G. A. SCHAIN, Die Kerne der Wasserstofflinien in den Spektren der Sterne der frühen Klassen. Mitteilungen des Astrophysikalischen Observatoriums auf der Krim, **3**, 46, 1948 (Г. А. Шайн, О ядрах водородных линий в спектрах звезд ранних классов. Известия Крымской астрофизической обсерватории **3**, 46, 1948).

mit der Folge der theoretischen Konturen für eine Reihe von g-Werten. Der g-Wert, bei dem die beste Übereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungen erzielt wird, ist der gesuchte. Um eine größere Sicherheit der Ergebnisse zu erhalten, kann man das gleiche Verfahren auch bei den übrigen Linien der Balmer-Serie durchführen. Endlich kann man eine derartige Bestimmung von g auch an einer einzigen gemessenen Gesamtabsorption vornehmen. Zu diesem Zweck müssen aus den abgeleiteten theoretischen Konturen (wieder mehrere Werte von T_e und g) vorläufige Werte von W_λ berechnet werden.

Die wichtige Rolle, die die Balmer-Serie bei der Bestimmung von g spielt, ist auf zwei Umstände zurückzuführen:

1. Infolge der Abhängigkeit der Größe s_λ von n_e über die Formel (13.26) tritt die Abhängigkeit zwischen der Äquivalentbreite der Balmer-Linie und g deutlich hervor[1]; die Riesen ergeben beträchtlich kleinere W_λ und eine völlig andere Kontur als die Zwerge (siehe Abb. 36 und 37).
2. Sowohl die Beobachtungen als auch die Theorie zeigen, daß in den Spektren der Sterne der frühen Klassen die Äquivalentbreiten der ersten Linien der Balmer-Serie von g viel stärker abhängen als von T_e.

Daher verursacht ein Fehler in dem für den Stern angenommenen T_e keinen wesentlichen Fehler in dem ermittelten g. Bei dem Vergleich der theoretischen und der beobachteten Konturen muß man eine Übereinstimmung zwischen den äußeren Gebieten der Flügel anstreben, weil – wie wir erwähnten – in den weiter im Innern gelegenen Gebieten der Linie die Übereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungen nicht befriedigend ist.

Das angegebene Verfahren zur Bestimmung von g besitzt praktische Bedeutung. Wenn wir annehmen, daß zwischen der Masse und der Leuchtkraft des Sternes, für den wir g bestimmt haben, eine eindeutige Beziehung besteht, besteht auch bei vorgegebenem T_e eine eindeutige Beziehung zwischen g und der Leuchtkraft des Sternes. Somit verwandelt sich die Abhängigkeit zwischen W_λ und g in eine Abhängigkeit zwischen W_λ und der Leuchtkraft des Sternes. Aus diesem Grunde können die Wasserstofflinien als Grundlage für die Bestimmung von spektroskopischen Parallaxen dienen. Haben wir über W_λ die Leuchtkraft des Sternes gefunden und kennen wir seine scheinbare Helligkeit, so können wir die Entfernung des Sternes bestimmen.

Nicht weniger wichtig ist die Bestimmung von g für die Überriesen. Rechnungen, die nach dem oben angegebenen und nach anderen Verfahren durchgeführt wurden, zeigten, daß das aus den Absorptionslinien ermittelte g wesentlich kleiner ist als die „dynamische" Größe, die durch den Ausdruck

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{13.28}$$

[1] Für die Metallinien spielt die Strahlungsdämpfung bei geringen Dichten eine weit wichtigere Rolle. Daher ist bei diesen Linien die Abhängigkeit der Äquivalentbreiten von der Dichte beträchtlich schwächer!

gegeben ist, wobei R der Radius der „Sternphotosphäre" ist. Aus diesem Grunde werden wir das aus den spektroskopischen Daten ermittelte g als *effektive Schwerebeschleunigung* bezeichnen und geben ihm das Symbol g_{eff}.

G. A. SCHAIN[1]) hat eine Bestimmung der Größe g_{eff} für die Überriesen vom Typ cB 5–cA 3 durch Vergleich der theoretischen und der beobachteten Konturen durchgeführt. In Abb. 38 ist ein Beispiel eines Vergleichs für die Linie H δ im Spektrum des zum Typ cB 8 gehörigen Überriesen Rigel angegeben. Für eine Gruppe von untersuchten Überriesen des angegebenen Spektraltyps ergab sich, daß lg g_{eff} zwischen 1,0 und 1,4 und lg g bei 3 liegt. Den gleichen Wert für lg g_{eff} erhält man auch aus zahlreichen Linien anderer Elemente, die in den Spektren der von G. A. SCHAIN untersuchten Überriesen auftreten. Der sehr kleine Wert für g_{eff} in den Atmosphären der Überriesen ist nach Ansicht von G. A. SCHAIN auf die besondere Struktur ihrer Atmosphäre zurückzuführen. Sie scheinen eine außerordentlich große Ausdehnung zu besitzen.

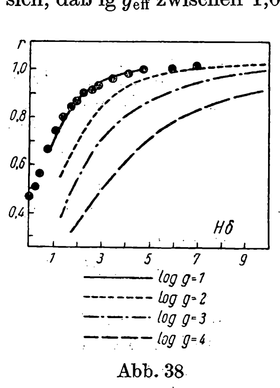


Abb. 38

Ähnliche Ergebnisse ($g_{\text{eff}} \ll g$) erhält man auch für die Überriesen der übrigen Spektralklassen. Insbesondere ist nach O. A. MELNIKOW (siehe Fußnote auf Seite 180) diese Ungleichung auch für die Cepheiden gültig. In allen diesen Fällen besitzen die Sternatmosphären eine weit größere Ausdehnung, als sie sie im hydrostatischen Gleichgewicht mit dem durch die Gleichung (13.28) bestimmten g besäßen. Besonders deutlich tritt dies beim Studium des Spektrums eines solchen Überriesen, wie es die kühle K-Komponente des Systems ζ Aurigae ist, in Erscheinung, bei dem wir (siehe § 12) die Dichteverteilung in der Atmosphäre des K-Sternes unmittelbar beobachten können. Hier erweist sich der Gradient des Dichteabfalls der Materie für die Metalle um den Faktor 1000 kleiner als im hydrostatischen Gleichgewicht.

Folglich wirkt in den Atmosphären der Überriesen außer dem Gradienten des Gasdruckes noch eine gewisse vom Sternzentrum fortgerichtete Kraft. Es liegt nahe, anzunehmen, daß diese Kraft der Gradient des Strahlungsdruckes ist. Man muß jedoch beachten, daß z. B. der Unterschied zwischen den aus der Gleichung (13.28) abgeleiteten „dynamischen" Werten von g für die Riesen der Klasse A 0 und für die Hauptreihensterne derselben Klasse verhältnismäßig klein ist. Das mittlere Verhältnis der beiden Werte für g ist in dem angegebenen Fall von der Größenordnung 10. Daher ist es völlig unwahrscheinlich, daß bei solch einem verhältnismäßig geringen Unterschied in der Schwerebeschleunigung der Strahlungsdruck einen so großen Wert annehmen soll. Anscheinend liegen die Dinge viel komplizierter. Es ist durchaus möglich, daß wir es mit den

[1]) G. A. SCHAIN, Some physical characteristics of the atmospheres of supergiants c B 5 — c A 3. Bulletin des Abastumanischen Observatoriums 7, S. 83, 1943 (Г. А. Шайн, Some... Бюллетень Абастуманской обсерватории, 7 стр. 83, 1943).

gleichen Faktoren zu tun haben, die auch in der Sonnenchromosphäre wirksam sind (siehe Kapitel III).

G. A. SCHAIN ist der Ansicht, daß die Ausdehnung der Atmosphären bei den Überriesen mit dem Ausströmen von Materie in Verbindung steht. Dies wird durch das Studium der Verschiebung der Linien von verschiedenen Elementen in den Spektren der Überriesen bestätigt.

Außerdem scheint zwischen der Ausdehnung der Atmosphären der Überriesen und den „Turbulenzbewegungen" in diesen Atmosphären ein Zusammenhang zu bestehen. Ob nun aber die Turbulenz eine Folge der Ausdehnung oder, umgekehrt, die Turbulenz selbst die Ursache für die Ausdehnung der Atmosphäre ist, wurde bisher noch nicht geklärt.

6. Die Heliumlinien. Die Verzerrung der Konturen bei benachbarten Linien

Wir wenden uns jetzt den Linien des Heliums zu. Die Verbreiterung dieser Linien wird in der Hauptsache durch Druckeffekte bewirkt. Hierfür sprechen zahlreiche Tatsachen. Die wichtigste von ihnen ist das Auftreten von verbotenen Absorptionslinien des Heliums in den Sternspektren. So wird in dem kurzwelligen Flügel der erlaubten neutralen Heliumlinie 4471,6 $2\,^3P^0 - 4\,^3D$ die „verbotene" Linie 4469,9 $2\,^3P^0 - 4\,^3F^0$ beobachtet. Das Auftreten der verbotenen Linien ist eine Folge der Einwirkung von intermolekularen elektrischen Feldern auf die Heliumatome. Die Intensität der verbotenen Linien wächst mit dem Felde F_0, d. h. mit der Zahl n_e, an. Somit wird diese Intensität in den Spektren der Hauptreihensterne größer sein als in den Spektren der Überriesen, für die p_e kleiner ist. Dies wird durch die Beobachtungen vollkommen bestätigt (Abb. 39, in der die Kontur der Linien 4471,6 Å und 4469,9 Å für Sterne mit verschiedener Leuchtkraft, doch von annähernd dem gleichen Spektraltyp dargestellt sind).

In dem Spektrum des Überriesen 0^2 Canis maioris fehlt die verbotene Linie 4470 Å, während sie in dem Spektrum des Hauptreihensternes γ Pegasi ziemlich kräftig ist. Mit größer werdendem g vergrößert sich auch die Breite der Linie 4471,6 Å selbst. Dies ist auch eine Folge des zunehmenden Druckeffektes mit wachsendem p_e.

Eine weitere Tatsache, die darauf hinweist, daß die Druckeffekte für die Heliumlinien große Werte annehmen, ist die, daß alle Linien der diffusen Nebenserie (Übergänge $P - D$) des Ortho- und Paraheliums verwaschen, während die Linien der scharfen Nebenserien (Übergänge $P - S$) schmal sind. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die höheren D-Terme durch elektrische Felder viel stärker aufgespalten werden als die Terme S und P.

Bei der Deutung der Linienkonturen des Heliums erhebt sich die grundlegende Frage, ob die Verbreiterung der Heliumlinien durch Stoßdämpfung oder durch intermolekulare Felder verursacht wird. Aus vorliegenden Beobachtungen und theoretischen Untersuchungen geht hervor, daß offenbar die Stoßdämpfung die Hauptrolle spielt (die stoßenden Teilchen scheinen hauptsächlich Protonen zu sein). Bei der Verbreiterung der Heliumlinien durch

elektrische Felder ist die Verschiebung der aufgespaltenen Komponenten gegenüber der normalen Lage unsymmetrisch.[1]) Daher müssen in diesem Fall auch die Absorptionslinien unsymmetrisch sein. Die Beobachtungen zeigen jedoch, daß z. B. die Linien 4472 und 4388 Å im wesentlichen eine symmetrische Kontur besitzen, wie es bei der Stoßdämpfung der Fall ist. Auch aus theoretischen Rechnungen ergibt sich, daß die Breite der beobachteten Heliumlinien durch die Stoßdämpfung bestimmt wird. Hierbei zeigen die theoretischen Konturen für die hinreichend starken Linien eine leichte Asymmetrie. Dies ist darauf zurückzuführen, daß sich in den Flügeln und besonders in ihren äußeren Gebieten schon die statistische Linienverbreiterung durch elektrische Felder bemerkbar macht, die um so stärker ist, je größer g ist. Offenbar sind solche „statistischen" Flügel auch auf Abb. 39 bei γ Pegasi zu erkennen.

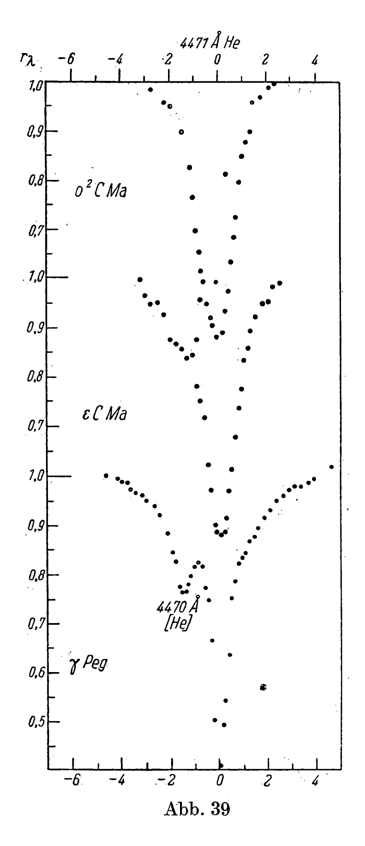


Abb. 39

Die quantitative Untersuchung der Konturen der Heliumlinien befindet sich zur Zeit noch in einem unbefriedigenden Zustand. Bei der Ausarbeitung einer Theorie muß man neben den Druckeffekten die DOPPLER-Verbreiterung (niedriges Atomgewicht des Heliums) und die Strahlungsdämpfung berücksichtigen. Die letztere ist für den Term $2\,^1P^0$ besonders wichtig, da das Elektron häufig auf das Grundniveau übergeht (für die Triplettsysteme gilt dies nicht).

Ein Spezialfall sind die Heliumlinien $(P - D)$, für die die Abhängigkeit der Linienaufspaltung von der Feldstärke nicht quadratisch, sondern linear ist.

Die Äquivalentbreite der Heliumlinien zeigt auch eine Abhängigkeit von der absoluten Größe des Sternes, wovon man sich z. B. mit Hilfe der Abb. 39 überzeugen kann. Daher kann man auch die Heliumlinien zur Bestimmung von g benutzen, wenn auch die Abhängigkeit der Größe W_λ von g in diesem Fall viel schwächer als bei den Wasserstofflinien ist.

Abschließend ist zu dem Problem der Wasserstoff- und Heliumlinien folgende Bemerkung am Platze: Bei der Berücksichtigung des Einflusses der elektri-

[1]) Wie überhaupt beim quadratischen (nicht aber beim linearen) STARKeffekt.

schen Felder auf die Linienverbreiterung hatten wir es nur mit intermolekularen „mikroskopischen“ elektrischen Feldern zu tun. Bisher hat man in den Sternatmosphären keine elektrischen Felder mit „makroskopischem“ Charakter feststellen können, die groß genug wären, um eine merkliche Verbreiterung und Verschiebung der Absorptionslinien bewirken zu können, obgleich die Existenz von verhältnismäßig kleinen elektromagnetischen Feldern kaum in Zweifel gezogen werden kann. Dagegen ist das Auftreten von großen Magnetfeldern (bis zu 6000 Gauß) auf der Oberfläche einiger Sterne einwandfrei gesichert [4, S. 185–222]. Bei manchen Sternen erleidet das Magnetfeld zeitliche Änderungen, wobei diese von Änderungen in den Intensitäten einiger Absorptionslinien begleitet werden. Die Frage nach der Natur der allgemeinen Magnetfelder auf den Sternoberflächen ist bisher noch nicht geklärt.

Die von uns betrachteten allgemeinen Ergebnisse der Theorie der Linienkonturen bezogen sich auf stationäre Sterne, wobei die Linienverbreiterung im wesentlichen durch die Eigenschaften der Atome und durch die Wechselwirkungen zwischen ihnen (Druckeffekte) bestimmt wurden. Daneben existieren aber noch zusätzliche Faktoren, die zu einer Verzerrung der „normalen“ Konturen führen. Einen Faktor – die „Turbulenz“ – haben wir schon betrachtet. Außer der „Turbulenz“ bewirken benachbarte Absorptionslinien, die Rotation der Sterne und das Ausströmen von Materie eine Verzerrung der Linienkonturen. Der letzterwähnte Effekt ist jedoch nur bei den nichtstationären Sternen groß und überhaupt bei den Sternen mit Besonderheiten im Spektrum, die wir hier nicht betrachten.

Wir betrachten zunächst die Verzerrung der Konturen durch benachbarte Absorptionslinien. Dieser Effekt ist in zahlreichen Fällen (besonders für spätere Sternklassen) von großer Bedeutung. Insbesondere verzerrt in denjenigen Spektralbereichen (hauptsächlich im Ultravioletten), in denen eine starke Verdichtung der Linien auftritt, die gegenseitige Überdeckung der Flügel benachbarter Linien nicht nur die Linie selbst, sondern kann auch eine allgemeine Abschwächung des kontinuierlichen Spektrums in dem erwähnten Bereich herbeiführen.

Beim Studium der Kontur einer Linie (1), die durch eine andere Linie (2) verzerrt ist, muß man von der allgemeinen Strömungsgleichung (9.29) ausgehen. Hierbei muß man jedoch berücksichtigen, daß der Absorptionskoeffizient in der betrachteten Frequenz σ_ν wegen der Additivität der absorbierten Energie gleich der Summe der Koeffizienten $\sigma_\nu^{(1)}$ und $\sigma_\nu^{(2)}$ ist, die den beiden Linien entsprechen. Dies erschwert natürlich die Theorie, da $\eta_\nu^{(1)}$ und $\eta_\nu^{(2)}$ sich in verschiedener Weise mit der Frequenz und der Tiefe ändern können. Es ist auch darauf zu achten, daß $\sigma_\nu^{(2)}$ die gleiche Rolle wie der kontinuierliche Absorptionskoeffizient spielt, wenn die Linie (2), die die Verzerrung bewirkt, durch wahre selektive Absorption entsteht (d. h., wenn für sie $\varepsilon_\nu = 1$ gilt).

Wenn z. B. in dem Flügel einer stärkeren Linie (2) eine schwache Linie (1) beobachtet wird, bedeutet dies, daß die schwache Linie in verhältnismäßig weit nach außen liegenden Schichten der Sternatmosphäre entsteht, weil in dem Flügel der Linie (2) die gesamte Strahlung enthalten ist, die aus den unteren

Schichten der Atmosphäre kommt. Der Vergleich dieser Linien mit solchen, die nicht von anderen Linien geschwächt sind, ermöglicht es uns, eine Reihe wichtiger Schlußfolgerungen über den physikalischen Zustand (und die chemische Zusammensetzung) der verschiedenen Schichten der Sternatmosphäre zu ziehen.

Eine ähnliche Rolle spielt in den Spektren der Sterne der frühen Klassen die Strahlungsabsorption jenseits der Grenze der BALMER-Serie. Hier ist der kontinuierliche Absorptionskoeffizient so groß, daß wir faktisch die Strahlung beobachten, die aus den äußersten Schichten der Sternatmosphäre austritt. Daher sind die Absorptionslinien in diesem Spektralbereich geschwächt. Aus dem Vergleich der Absorptionslinien, die diesseits und jenseits der Grenze der BALMER-Serie liegen, können wir ebenfalls wichtige Folgerungen über den physikalischen Zustand (und die chemische Zusammensetzung) der verschiedenen Schichten der Sternatmosphären ziehen. Diese Frage ist bisher aber nur wenig behandelt worden.

7. Die Rotation der Sterne

Als Abschluß dieses Paragraphen behandeln wir die Verzerrung der Linienkonturen durch die Rotation der Sterne. Die Rotation eines Sternes verursacht eine Verbreiterung aller Absorptionslinien im Sternspektrum. Die verschiedenen Bereiche der sichtbaren Oberfläche des rotierenden Sternes bewegen sich gegenüber dem Beobachter mit verschiedenen Radialgeschwindigkeiten. Daher ist für jedes Element der sichtbaren Sternscheibe die Absorptionslinie durch den DOPPLER-Effekt um einen gewissen Betrag verschoben. Da wir die Strahlung der gesamten Sternscheibe beobachten, erhalten wir eine Verbreiterung der Linie. Die größten Rotationsgeschwindigkeiten trifft man bei den Sternen der frühen Spektraltypen an. Für Doppelsysteme sind die Rotationsgeschwindigkeiten der Sternkomponenten statistisch um so größer, je kürzer die Umlaufperiode des Systems und je größer die Amplitude des Systems K ist.

Die Hauptaufgabe einer Theorie für die durch Rotation verzerrten Absorptionslinien ist der Vergleich der theoretischen Konturen mit den beobachteten, um die Rotationsgeschwindigkeit des Sternes zu bestimmen. Diese Aufgabe ist zum erstenmal in einer Arbeit von G. A. SCHAIN und O. STRUVE[1]) gelöst worden. Die im folgenden dargelegte Methode zur Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit eines Sternes aus dem Vergleich der theoretischen und der beobachteten Kontur hat die größte Anwendung gefunden. Sie ist eine Weiterentwicklung der von G. A. SCHAIN und O. STRUVE ausgearbeiteten Theorie. Zur Konstruktion der Kontur einer beliebigen Linie aus dem Spektrum eines rotierenden Sternes nimmt man als Ausgangskontur die beobachtete Kontur der gleichen Linie aus dem Spektrum eines nichtrotierenden Sternes vom gleichen Spektraltyp. Wir geben dann für die äquatoriale Rotationsgeschwindigkeit des Sterns

---

[1]) G. SHAJN and O. STRUVE, On the rotation of the stars. Monthly Notices, 89. 222, 1929.

verschiedene Werte vor und leiten für jeden Wert eine durch die Rotation verzerrte theoretische Kontur ab. Durch den Vergleich der beobachteten Kontur dieser Linie aus dem Spektrum des rotierenden Sterns (vom gleichen Typ) mit der konstruierten Schar der theoretischen Konturen finden wir die Rotationsgeschwindigkeit des Sternes v, oder genauer, die Größe $v \sin i$, wobei i der Winkel zwischen der Richtung zum Stern und der Rotationsachse des Sternes ist (siehe weiter unten).

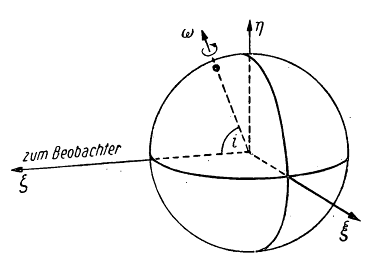


Abb. 40

Im Hinblick auf unsere Ausführungen untersuchen wir jetzt, auf welche Weise wir von der Kontur eines nicht rotierenden Sternes auf die von der Rotation verzerrte Kontur übergehen können.

Wir legen zunächst in den Mittelpunkt des Sternes ein rechtwinkliges Koordinatensystem ξ, η, ζ, wobei die ζ-Achse zum Beobachter weist (Abb. 40). Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zeigt wie gewöhnlich in die Richtung der Rotationsachse des Sternes, wobei die η-Achse so gelegt ist, daß der Vektor $\vec{\omega}$ in der ζ-η-Ebene liegt. In diesem Fall hat der Vektor $\vec{\omega}$ die Komponenten

$$\omega = \{0, \omega \sin i, \omega \cos i\}, \tag{13.29}$$

wobei – wie oben erwähnt – i der Winkel zwischen der Richtung zum Stern und der Rotationsachse des Sternes ist.

Die Lage eines beliebigen Punktes auf der Sternoberfläche ist durch den Vektor

$$\mathfrak{r} = \{\xi, \eta, \zeta\} \tag{13.30}$$

festgelegt. Ferner ist der Vektor der linearen Geschwindigkeit dieses Punktes gleich

$$\mathfrak{v} = [\vec{\omega}, \mathfrak{r}]. \tag{13.31}$$

Folglich ist die Komponente dieser Geschwindigkeit in Richtung des Sehstrahls, d. h. längs der ζ-Achse, gleich

$$v_\zeta = \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi = -\xi \vec{\omega} \sin i, \tag{13.32}$$

da $\omega_\eta = \omega \sin i$.

Aus (13.32) ist ersichtlich, daß die Radialgeschwindigkeit der einzelnen Elemente auf der sichtbaren Sternscheibe nur von der Koordinate ξ abhängig ist. Folglich hat jedes Element eines der η-Achse parallelen unendlich schmalen Streifens auf der sichtbaren Sternscheibe die gleiche Radialgeschwindigkeit.

Nach (11.30) und (13.32) wird jeder Punkt der von der Rotation nicht verzerrten Kontur, die einem Streifen mit den Grenzen $\xi + d\xi$ entspricht, um (den absoluten Betrag)

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{\lambda}{c} \xi \omega \sin i \tag{13.33}$$

verschoben. Wenn ferner R der Sternradius ist, kann man (13.33) folgendermaßen umformen:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{\lambda}{c}\frac{\xi}{R} v \sin i, \tag{13.34}$$

wobei $v = \omega R$ die lineare Geschwindigkeit der Rotation der Sternatmosphäre am Äquator ist. Hierbei ist $v \sin i$ die Radialgeschwindigkeit am Äquator in den Punkten mit $\xi = \pm R$.

Wir leiten jetzt einen Ausdruck für die Strahlungsintensität in einem beliebigen Punkt einer durch Rotation verzerrten Kontur ab. Wir setzen den Sternradius gleich Eins (die Grenzwerte von ξ und η sind dann gleich ± 1).

Es sei $I(\xi, \eta, \lambda - \lambda_0)$ die Strahlungsintensität, die im Punkte (ξ, η) auf der Scheibe eines nichtrotierenden Sternes und in der Entfernung $\lambda - \lambda_0$ von der Linienbreite herrscht. Wenn der Stern rotiert, wird die ganze Linienkontur im Punkte (ξ, η) um die durch die Gleichung (13.34) bestimmte Größe $\Delta\lambda$ verschoben.

Jetzt müssen wir in den Ausdruck für die Intensität I an Stelle von λ_0 die Größe $\lambda_0 \pm \Delta\lambda$ einführen. Die Energie, die von dem Element $d\xi\, d\eta$ der Sternscheibe in 1 sec und in dem Wellenlängenintervall $\lambda, \lambda + d\lambda$ innerhalb des Raumwinkels Eins dem Beobachter zugestrahlt wird, ist

$$I\left(\xi, \eta, \lambda - \lambda_0\left[1 \pm \xi \frac{v}{c} \sin i\right]\right) d\xi\, d\eta\, d\lambda. \tag{13.35}$$

Wenn die Intensität der kontinuierlichen Strahlung auf der gesamten Sternscheibe konstant wäre und die Linienkontur in allen Punkten der Scheibe ein und dieselbe Gestalt besäße, so würde nach (13.35) I für ein vorgegebenes ξ nicht von η abhängen. Für die realen Sterne ist diese Bedingung nicht erfüllt.

Um die Energie zu erhalten, die von der gesamten Scheibe in einer vorgegebenen Wellenlänge ausgestrahlt wird, müssen wir (13.35) integrieren.

Als Ergebnis erhalten wir für die auf die Wellenlängeneinheit bezogene Energie

$$E_\lambda = 2\int\limits_{-1}^{+1}\left\{\int\limits_0^{\sqrt{1-\xi^2}} I\left(\xi, \eta, \lambda - \lambda_0\left[1 \pm \frac{\xi}{c} v \sin i\right]\right) d\eta\right\} d\xi. \tag{13.36}$$

Die Berechnung von E_λ bei vorgegebenem $v \sin i$ und vorgegebenem λ geht folgendermaßen vor sich: Wir unterteilen die sichtbare Sternscheibe in eine Reihe schmaler Streifen, die der η-Achse parallel sind, und berechnen für jeden Streifen (der Breite $\Delta\xi$) die Größe $\left\{\int\limits_0^{\sqrt{1-\xi^2}} I\, d\eta\right\}\Delta\xi$. Hierauf summieren wir alle diese Elemente. Bei der Berechnung der geschweiften Klammer benutzen wir die Intensitäten $I(\xi, \eta)$ für den Fall eines nichtrotierenden[1]) Sterns, und für

[1]) Eine Ausnahme bildet der Fall, daß der Gravitationseffekt eine wesentliche Rolle spielt (siehe im folgenden). In diesem Fall muß man die Zahl 2 vor dem Integral (13.36) durch die unmittelbare Integration über $d\eta$ von $-\sqrt{1-\xi^2}$ bis $+\sqrt{1-\xi^2}$ ersetzen.

das vorgegebene λ nehmen wir den Punkt der Kontur, der der Entfernung $\lambda - \lambda_0 \left[1 \pm \frac{\xi}{c} v \sin i\right]$ von der Linienmitte entspricht. Das gleiche Verfahren wenden wir auch für die übrigen λ an und erhalten als Ergebnis die Kontur der durch die Rotation verzerrten Linie.

Bei der Berechnung von E_λ nach der Formel (13.36) ist darauf zu achten, daß im allgemeinen auf der Sternscheibe eine Randverdunkelung in allen Wellenlängen auftritt. Wir setzen voraus, daß die Linienkontur auf der gesamten Sternscheibe die gleiche ist, d. h., daß in allen Punkten der Scheibe die Abhängigkeit r_λ von λ gleich ist. In diesem Fall ist die zugrunde gelegte Intensitätsverteilung innerhalb einer Linie für einen beliebigen Punkt ξ, η der Sternscheibe, d. h. die Funktion $I(\xi, \eta, \lambda - \lambda_0)$, gleich

$$I(\xi, \eta, \lambda - \lambda_0) = \varphi(\lambda, \vartheta)\, I(0, 0, \lambda - \lambda_0), \qquad (13.37)$$

wobei $\varphi(\lambda, \vartheta)$ das Gesetz der Randverdunkelung auf der Sternscheibe für die vorliegende Wellenlänge und $\sin\vartheta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ist. Die Funktion $\varphi(\lambda, \vartheta) \approx \varphi(\lambda_0, \vartheta)$ ist innerhalb der Grenzen einer Linie praktisch ein und dieselbe. Man entnimmt sie aus der Theorie der Photosphäre. Bei gewissen Bedeckungsveränderlichen kann man sie aus den Beobachtungen bestimmen.

Entsprechende Rechnungen zeigen, daß der Effekt der Randverdunkelung für gewöhnlich klein ist.

Wenn bei der Entfernung von der Linienmitte sich die Kontur selbst ändert, müssen umfangreichere Rechnungen durchgeführt werden. Bisher brauchte man jedoch diesen Faktor noch nicht zu berücksichtigen.

Bei sehr großen Rotationsgeschwindigkeiten muß man den *Gravitationseffekt* berücksichtigen, der in folgendem besteht: Aus der allgemeinen Theorie der Sternrotation [16] folgt, daß der Strom πH_ν auf der Oberfläche eines Sterns, der wie ein starrer Körper rotiert, proportional der effektiven Schwerebeschleunigung in dem gegebenen Punkt ist. Folglich muß die effektive Temperatur an den Polen größer als am Äquator sein. Auf diese Weise verändert in diesem Fall die Rotation des Sterns die Energieverteilung über die Sternscheibe. Hierbei wird bezüglich der ξ-ζ-Ebene eine Asymmetrie in der Energieverteilung auftreten, weil der Winkel i im allgemeinen von 0° und von 90° verschieden sein wird.

Der Gravitationseffekt verzerrt die Linienkontur jedoch nur bei solchen Rotationsgeschwindigkeiten, bei denen die Zentrifugalkraft am Äquator etwa gleich der Anziehungskraft ist. Endlich kann im Fall eines rotierenden Sterns der Effekt der differentiellen Rotation eine beträchtliche Rolle spielen. Er besteht darin, daß die äußeren Schichten des Sternes in den verschiedenen Breiten verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Ein ähnlicher Fall liegt bekanntlich bei der Sonne vor.

Als Beispiel für die Anwendung der Formel (13.36) bringen wir in Abb. 41 die durch die Rotation verzerrte Kontur der He I-Linie 4026 Å. Die Kontur mit $v = 0$ ist die Kontur der Linie 4026 Å im Spektrum des nicht rotierenden Sternes i Herculis. Die theoretischen Konturen sind für den Fall einer fehlen-

den Randverdunkelung berechnet. Die Berücksichtigung dieses Effektes würde sie nur wenig ändern; sie würden dadurch etwas tiefer und weniger breit werden.

Wir erkennen, daß mit größer werdendem $v \sin i$ die Kontur angehoben und verbreitert wird. Hierbei übt die Rotation des Sternes keinen Einfluß auf die Äquivalentbreite der Linie aus.

Graphische Darstellungen von dem in der Abb. 41 dargestellten Typ dienen als Ausgangspunkt für die Bestimmung der Größen $v \sin i$ aus den beobachteten Konturen. Für den Vergleich der theoretischen und der gemessenen Konturen

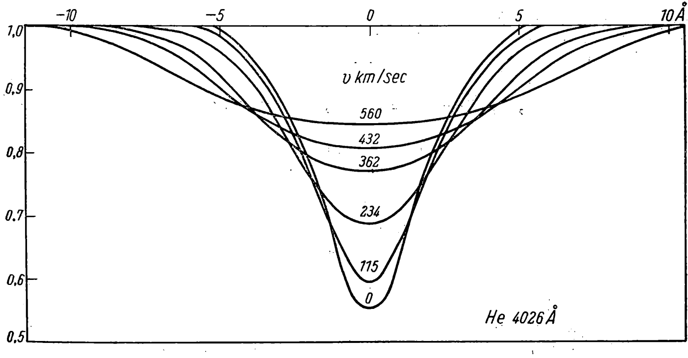


Abb. 41

muß man sie auf die gleiche Äquivalentbreite reduzieren. Wir betonen, daß wir auf die beschriebene Weise nicht $v_{\text{äqu}}$, sondern $(v \sin i)_{\text{äqu}}$ bestimmen. Endlich weisen wir darauf hin, daß bei dem angegebenen Verfahren zur Bestimmung von $(v \sin i)_{\text{äqu}}$ keine Berücksichtigung der instrumentalen Verzerrung erforderlich ist, da die Ausgangskontur und die durch die Rotation verzerrten beobachteten Konturen mit ein und demselben Instrument aufgenommen werden müssen. Offensichtlich wirkt der Rotationseffekt auf die tieferen Linien stärker ein als auf die flachen und verwaschenen. Dies ist ein Kriterium dafür, ob der Stern rotiert oder nicht. Außer diesem gibt es noch weitere Kriterien. Die Rotation des Sternes bewirkt nämlich eine Verbreiterung sämtlicher Absorptionslinien. Ferner nimmt die Linienverbreiterung in dem Spektrum eines rotierenden Sternes, grob ausgedrückt, proportional der Wellenlänge zu [siehe (13.34)]. Endlich wirkt der Rotationseffekt im Gegensatz zu vielen anderen Effekten nicht auf die Äquivalentbreite ein.

Es hat sich bereits ein ziemlich umfangreiches Material für die Größe $v \sin i$ angesammelt. Dabei ergab sich, daß diese Größe in zahlreichen Fällen sehr große Werte annehmen kann. So findet man unter den Sternen vom Typ B solche, bei denen $v \sin i$ den Wert von 400 km/sec erreicht. B-Sterne, bei denen $v \sin i$ den Wert von 200–300 km/sec erreicht, sind keine Seltenheit. Die größten Rotationsgeschwindigkeiten besitzen die Sterne vom Typ Be, bei

denen $v \sin i$ in einigen Fällen 500 km/sec übersteigen kann. Sterne der späten Klassen rotieren mit beträchtlich kleineren Geschwindigkeiten. So beträgt die lineare Geschwindigkeit der Rotation der Sonne am Äquator gerade 2 km/sec. Die Fälle, in denen eine schnellere Rotation vorliegt, sind bei Sternen später Spektralklassen äußerst selten. Solche Sterne sind hauptsächlich die Sterne vom Typ W Ursae maioris; sie zeigen unabhängig vom Spektraltyp in ihrem Spektrum schwache Linien, die ohne Zweifel durch die Rotation stark verzerrt sind. Zu den schnell rotierenden Sternen muß man auch den G-Stern HD 117555 zählen. In seinem Spektrum erscheint Hα als helle Linie. Die äquatoriale Rotationsgeschwindigkeit beträgt bei diesem Stern 75 km/sec.

Die Gewinnung von zuverlässigem Material für $v \sin i$ für eine möglichst große Anzahl von rotierenden Sternen ist eine überaus wichtige Aufgabe der theoretischen und der beobachtenden Astrospektroskopie.

Abschließend bemerken wir, daß man in den Spektren der Bedeckungsveränderlichen eine unsymmetrische Verzerrung der Linien beobachtet. Diese findet in der Rotation des bedeckten Sterns des Systems eine ausreichende Erklärung. Wenn wir hinter dem bedeckenden Stern einen der Ränder des bedeckten und rotierenden Sternes sehen, verschiebt die Annäherung dieses Randes zum Beobachter (oder umgekehrt seine Fortbewegung vom Beobachter) die Absorptionslinie nach einer Seite, und weil wir einen endlichen Abschnitt der Scheibe sehen, dem verschiedene $\xi v \sin i$ entsprechen, ist die resultierende Linie unsymmetrisch.

§ 14. Die Änderung der Konturen der Absorptionslinien von der Sonnenmitte zum Sonnenrand. Die inkohärente Streuung. Die zentralen Restintensitäten

1. Die Änderung der Konturen der Absorptionslinien von der Mitte zum Rand. Der Wechselwirkungseffekt

Die Analyse der Konturen der Absorptionslinien in verschiedenen Punkten der Sonnenscheibe ist die Hauptmethode zur Prüfung der Theorie der Absorptionslinien im Sonnenspektrum. In dem vorliegenden Fall untersuchen wir die Schichten, in denen die Absorptionslinien entstehen, in verschiedenen Richtungen, d.h., wir berücksichtigen die neue Veränderliche ϑ. Auf diese Weise können wir nachprüfen, ob wir die Verteilung der verschiedenen charakteristischen Größen für die Atmosphäre mit der Tiefe richtig abgeleitet haben. Zu diesen charakteristischen Größen gehört auch die Art und Weise der Wechselwirkung zwischen der Strahlung und den Atomen. Durch das Studium der Linienkonturen in den verschiedenen Punkten der Sonnenscheibe können wir beispielsweise entscheiden, was in den verschiedenen Tiefen hauptsächlich für die Entstehung der Linie maßgebend ist, die Streuung oder die wahre Absorption.

Auf diese Weise konnten wir z. B. zu Beginn des § 9 nachweisen, daß in der Sonnenatmosphäre zumindest die starken Linien durch die Streuung des Lichtes entstehen.

Wir nehmen an, daß wir eine völlige Übereinstimmung zwischen den theoretischen und den beobachteten Konturen in der *Mitte* der Sonnenscheibe dadurch erzielen konnten, daß wir von bestimmten Hypothesen ausgegangen sind und entsprechend gewählte Parameter benutzt haben. Dann ist die Gegenüberstellung der aus der Theorie und den Beobachtungen folgenden Ergebnisse für *verschiedene Punkte der Sonnenscheibe* ein Prüfstein für die Richtigkeit der zugrunde gelegten theoretischen Voraussetzungen und Parameter.

Die angegebene Methode ist auch auf die Bedeckungsveränderlichen anwendbar. In diesem Fall muß man die Linien im Spektrum des bedeckten Sternes während und außerhalb der Bedeckung untersuchen.

Um die Kontur einer beliebigen Absorptionslinie in verschiedenen Punkten der Sonnenscheibe untersuchen zu können, müssen wir die Strömungsgleichung (10.2) oder die Gleichung (9.32) lösen.

Die Gleichung (10.2) können wir folgendermaßen schreiben:

$$\frac{dI_\nu(\vartheta,\tau_\nu)}{d\tau_\nu} - I_\nu(\vartheta,\tau_\nu)(1+\eta_\nu)\sec\vartheta + [J_\nu\eta_\nu(1-\varepsilon_\nu) + B_\nu(1+\eta_\nu\varepsilon_\nu)]\sec\vartheta = 0, \tag{14.1}$$

d.h., wir erhalten eine Gleichung von der Gestalt (3.20). In Übereinstimmung mit (3.21) können wir die Lösung von (14.1) folgendermaßen angeben:

$$I_\nu(\vartheta,\tau_\nu) = A_\nu e^{\sec\vartheta\int_0^{\tau_\nu}(1+\eta_\nu)\,dt_\nu} + e^{\sec\vartheta\int_0^{\tau_\nu}(1+\eta_\nu)\,dt_\nu}\int_{\tau_\nu}^{\infty}[(1-\varepsilon_\nu)\eta_\nu J_\nu + (1+\varepsilon_\nu\eta_\nu)B_\nu]\,e^{-\sec\vartheta\int_0^{t_\nu}(1+\eta_\nu)\,dt_\nu}\sec\vartheta\,dt_\nu, \tag{14.2}$$

wobei A_ν eine Integrationskonstante ist.

Wir stellen jetzt die gleichen Überlegungen an, wie bei der Ermittlung von (3.36) und (3.37) und finden, daß $A_\nu = 0$ ist. Folglich ist die austretende Intensität $I_\nu(\vartheta, 0)$ an der Grenze des Sternes gleich

$$I_\nu(\vartheta,0) = \int_0^\infty [(1-\varepsilon_\nu)\eta_\nu J_\nu + (1+\varepsilon_\nu\eta_\nu)B_\nu]\,e^{-\sec\vartheta\int_0^{t_\nu}(1+\eta_\nu)\,dt_\nu}\sec\vartheta\,dt_\nu. \tag{14.3}$$

Wir bezeichnen die zugehörige Intensität des kontinuierlichen Spektrums in der Frequenz ν mit $I_\nu^0(\vartheta, 0)$ und setzen in diesem Fall $\eta_\nu = 0$. Dann erhalten

wir für die Restintensität $r_\nu(\vartheta)$ in dem betrachteten Punkt der Scheibe folgenden Ausdruck:

$$r_\nu(\vartheta) = \frac{I_\nu(\vartheta, 0)}{I_\nu^0(\vartheta, 0)}$$

$$= \frac{\int\limits_0^\infty [(1 - \varepsilon_\nu)\eta_\nu J_\nu + (1 + \varepsilon_\nu \eta_\nu) B_\nu]\, e^{-\sec\vartheta \int\limits_0^{t_\nu} (1+\eta_\nu)\, dt_\nu} \sec\vartheta\, dt_\nu}{\int\limits_0^\infty B_\nu e^{-t_\nu \sec\vartheta} \sec\vartheta\, dt_\nu}. \quad (14.4)$$

Die Abhängigkeit der Größen B_ν, J_ν, η_ν und ε_ν von der optischen Tiefe muß also bekannt sein, wenn wir für verschiedene vorgegebene ϑ die Abhängigkeit der Größe $r_\nu(\vartheta)$ von der Frequenz ermitteln wollen. Für die Größen B_ν, J_ν und η_ν haben wir hierüber schon in den §§ 10 und 13 ausführlich gesprochen. Die Abhängigkeit der Größe ε_ν von der Tiefe betrachten wir am Schluß dieses Paragraphen. In den meisten Fällen werden die Integrale in (14.4) durch numerische Integration berechnet. In einigen Fällen kann man $r_\nu(\vartheta)$ jedoch explizit angeben. Zum Beispiel kann man bei der im Abschnitt 2 des § 10 dargestellten Methode den Funktionen J_ν und B_ν die Gestalt (10.12) bzw. (8.10) geben, wobei C_ν durch den Ausdruck (10.17) gegeben ist und die Parameter η_ν und ε_ν in der ganzen Atmosphäre konstant sind. Wenn wir die in diesem Fall elementare Integration ausführen, erhalten wir für $r_\nu(\vartheta)$

$$r_\nu(\vartheta) = [a_\nu + b_\nu \cos\vartheta]^{-1} \left\{ a_\nu + \frac{b_\nu \cos\vartheta}{1 + \eta_\nu} + \frac{\eta(1 - \varepsilon_\nu)\left[\frac{2}{3} b_\nu - a_\nu(1 + \eta_\nu)\right]}{[1 + \eta_\nu + q_\nu \cos\vartheta]\left[\frac{2}{3} q_\nu + 1 + r_\nu\right]} \right\}, \quad (14.5)$$

wobei q_ν durch den Ausdruck (10.9) gegeben ist.

Den Ausdruck (14.5) können wir gesondert für reine Streuung ($\varepsilon_\nu = 0$) und reine Absorption ($\varepsilon_\nu = 1$) betrachten und die erhaltenen Konturen miteinander vergleichen. Dieser Vergleich zeigt, daß innerhalb der Linienflügel die Restintensität (für eine bestimmte Wellenlänge in der Linie) und das Gesetz ihrer Änderung von der Sonnenmitte zum Sonnenrand fast nicht von ε_ν abhängen, d.h., es ist gleichgültig, ob die Absorptionslinie (genauer: ihre Flügel) durch Streuung der Strahlung oder durch wahre Absorption entsteht.

Es ist ferner von Interesse, die Abhängigkeit der Größe $r_\nu(\vartheta)$ vom Winkel ϑ für zwei Modelle zu vergleichen, für das eben betrachtete Modell und für das einfache Modell des § 9, in dem eine Unterteilung der Sternatmosphäre in die „umkehrende Schicht" und die „Photosphäre" durchgeführt wird. Für den Fall der Streuung wird $r_\nu(\vartheta)$ durch die Formel (9.24) gegeben. Für den Fall der Absorption kann man eine entsprechende Formel durch Absonderung eines gewissen Bereiches mit den Grenzen $\tau_\nu = 0$ und $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)}$ in den Photosphärenmodellen des § 3 ableiten. In diesen Bereichen werden auch die Absorptionslinien entstehen.

Der Vergleich der angegebenen Modelle zeigt, daß die Intensitätsänderung in den Flügeln beim Übergang vom Mittelpunkt der Stern- (Sonnen-)Scheibe zum Rand in beiden Fällen völlig verschieden ist. Dies gilt sowohl für Streuung als auch für Absorption. Mit anderen Worten, die Änderung der Kontur der Linienflügel beim Übergang von der Mitte der Scheibe zum Rand hängt merklich von der Struktur der Sternatmosphäre ab.

Endlich wird in den zentralen Bereichen der hinreichend starken Linien die Änderung von $r_{\nu_0}(\vartheta)$ mit dem Winkel ϑ in starkem Maße davon abhängen, welcher Prozeß für diese Frequenzen maßgebend ist, die Absorption oder die Streuung. So ist z.B. im ersten Fall $I_{\nu_0}(\vartheta)$ für alle ϑ näherungsweise gleich $B_\nu(T_0)$ und hängt wenig von ϑ ab, während sich die Intensität $I_{\nu_0}(\vartheta)$ im Falle der Streuung in völlig anderer Weise mit ϑ ändert.

Wir behandeln kurz einige grundlegende Beobachtungsergebnisse für das Gesetz der Änderung der Linienkonturen auf der Sonnenscheibe. Für die starken Linien liegt die allgemeine Gesetzmäßigkeit vor, daß am äußersten Sonnenrand (praktisch bei $R \approx 0{,}995\, R_\odot$) $r_\nu(\vartheta)$ innerhalb der gesamten Kontur größer sind als die ihnen entsprechenden $r_\nu(\vartheta)$ im Sonnenmittelpunkt (vergleiche Abb. 23 und 35). Überhaupt ist die Änderung der Kontur auf der gesamten Scheibe (von $R = 0$ bis $R = 0{,}995\, R_\odot$) bisweilen überaus kompliziert und für verschiedene Linien verschieden.

Die Äquivalentbreite der schwachen Linien, deren Konturen instrumentell bedingt sind, wächst gewöhnlich zum Rand der Scheibe an, doch erreicht sie in einer gewissen Entfernung vom Scheibenmittelpunkt ein Maximum und beginnt hierauf wieder abzunehmen. Für die sehr schwachen Linien wächst W_λ kontinuierlich bis zum äußersten Rand der Scheibe an. In dieser Hinsicht unterscheiden sich die sehr schwachen Linien auffallend von den starken Linien, bei denen W_λ am Rande kleiner ist als in der Mitte. Die zentralen Restintensitäten sind bei den schwachen Linien im Gegensatz zu den starken Linien praktisch auf der ganzen Sonnenscheibe gleich groß.

Wir wenden uns jetzt den Ergebnissen zu, die aus der quantitativen Gegenüberstellung der dargelegten allgemeinen Theorie mit den Beobachtungen folgen. In Abb. 35 haben wir schon ein Beispiel für eine derartige Gegenüberstellung gebracht. Aus ihr geht hervor, daß die theoretische und die beobachtete Kontur eine befriedigende Übereinstimmung zeigen, wenn auch gewisse Unstimmigkeiten bestehen bleiben. Das Vorhandensein von gewissen Unstimmigkeiten zwischen der Theorie und den Beobachtungen folgt auch aus den

meisten übrigen Arbeiten, die sich mit der Untersuchung der Konturenänderung auf der Sonnenscheibe befassen.[1]) Diese Abweichungen treten nicht nur bei den starken Linien (besonders im ultravioletten Spektralbereich), sondern auch bei den schwachen Linien auf.

Als Ursache für diese Unstimmigkeiten könnte man die ungenaue Berechnung der Integrale auf der rechten Seite von (14.4) ansehen; unter Verzicht auf die verschiedenen Verallgemeinerungen, wie z.B. $\eta_\nu = \text{const}$, $B_\nu = a_\nu + b_\nu t_\nu$ usw., könnte man versuchen, die Methoden zur Berechnung der fraglichen Integrale zu vervollkommnen. Insbesondere könnte man für den Zusammenhang zwischen B_ν und t_ν die direkte Methode verwenden, die am Schluß des § 7 dargestellt worden ist. Ferner könnte man auch die Änderung von $I_\nu(\vartheta, \tau_\nu)$ mit ϑ mit genügender Genauigkeit berücksichtigen, wenn man die Abhängigkeit J_ν von τ_ν ermitteln würde usw. Jedoch zeigen all diese Korrektionen, obwohl sie noch klein sind, daß die Verwendung des Ausdruckes (14.4) keine befriedigende Übereinstimmung der Theorie mit den Beobachtungen liefern kann. Wir weisen darauf hin, daß die vorliegenden Beobachtungen im Augenblick noch einer größeren Genauigkeit bedürfen. Gewöhnlich gehen die Ergebnisse verschiedener Beobachter etwas auseinander.

Die schwachen Linien stellen einen besonderen Fall dar. Finsternisbeobachtungen ergaben, daß diese Linien bis zu den äußersten Punkten der Sonnenscheibe als Absorptionslinien beobachtet wurden, wo sie in Emissionslinien hätten übergehen müssen (siehe § 21). Diese Tatsache kann z.B. durch eine Unebenheit der Sonnenoberfläche erklärt werden, wodurch wir eine Strahlung beobachten, die aus Bereichen der Sonnenoberfläche mit verschiedener Orientierung zum Beobachter kommt. Folglich kann selbst in dem Fall, in dem wir bei einer „ebenen" Oberfläche $\vartheta \approx \frac{\pi}{2}$ erwarten würden, ein Bereich mit einem effektiven ϑ vorliegen, das sich von dem Wert $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ unterscheidet. Dies verstärkt natürlich die Absorptionslinien am äußersten Rand.

Wenden wir uns wieder den starken Linien zu. Die Unmöglichkeit, die aus der Anwendung der allgemeinen Formel (14.4) folgenden Ergebnisse mit den Beobachtungen in Übereinstimmung zu bringen, legt es nahe, anzunehmen, daß die der Formel zugrunde gelegten Voraussetzungen völlig falsch sind. Wir erinnern daran, daß diese Formel unmittelbar aus der Strömungsgleichung (9.29) folgt. In dieser Strömungsgleichung steckt die grundlegende Voraussetzung dafür, daß die Reemission innerhalb einer Absorptionslinie ohne Änderung der Frequenz vor sich geht. Mit anderen Worten, jedes absorbierte Quant wird mit derselben Frequenz reemittiert. Inwieweit diese Voraussetzung gerechtfertigt ist, werden wir im folgenden untersuchen.

In erster Linie betrachten wir die Reemissionsprozesse für die Übergänge, deren unteres Niveau nicht das Grundniveau ist. Dieser Fall ist deshalb

---

[1]) Über die ausführliche Darstellung dieser Untersuchungen und der gefundenen Abweichungen siehe [2, S. 534–540].

von Wichtigkeit, weil bei derartigen Übergängen die „subordinate lines" entstehen, die in den Sternspektren viel häufiger sind als die Resonanzlinien.

Die Entstehung der „subordinate lines" unterscheidet sich von den Resonanzlinien, die am Grundniveau entstehen, durch folgende Eigenschaften (siehe Abb. 24):

1. Nach der Absorption eines Quants durch ein Atom beim Übergang $k \to l$ kann das Elektron auf ein völlig anderes Niveau, etwa auf das Grundniveau mit $i = 1$, zurückfallen. In diesem Fall unterscheidet sich die Frequenz des emittierten Quants stark von der Frequenz des absorbierten Quants, und die dem Übergang $k \to l$ entsprechende Emission (d.h. der Koeffizient j_ν) wird geschwächt. Die entgegengesetzt gerichteten Übergänge vom Typ $1 \to l \to k$ führen jedoch zu einer Verstärkung der Reemission in den Frequenzen, die dem Übergang $k \to l$ entspricht. Auf diese Weise kann man die Energiebilanz in einer „subordinate line" (Übergang $k \to l$) nur dann berechnen, wenn man den Zusammenhang dieser Linie mit den übrigen Linien, die mit dieser ein oberes oder unteres Niveau gemeinsam haben, berücksichtigt. Diesen Effekt werden wir im folgenden als *Wechselwirkungseffekt* bezeichnen.

2. Bei den „subordinate lines" ist das untere Niveau nicht scharf. Daher kann nach der Absorption eines Quants $h\nu'$ durch das Atom das Elektron, das den Übergang $k \to l$ vollzogen hat, auf dasselbe Niveau k, doch auch auf ein anderes (energetisches) Element dieses Niveaus, zurückfallen, wodurch ein Quant $h\nu''$ emittiert wird, das sich von dem absorbierten Quant $h\nu'$ etwas unterscheidet. In diesem Fall können wir den Reemissionsprozeß als *inkohärent* bezeichnen, wobei darauf zu achten ist, daß sich der Begriff der Inkohärenz hier nicht auf die Phase, sondern auf die Frequenz bezieht. Es ist klar, daß die Phase bei dem betrachteten Reemissionsprozeß gleich bleibt (wenn störende Einflüsse, z.B. Stöße, fehlen).

Der Wechselwirkungseffekt wurde von zahlreichen Autoren untersucht. Für jede „subordinate line" kann er verschiedenen Charakter aufweisen, weil das Schema der mit ihr zusammenhängenden Linien im allgemeinen verschieden sein wird.

Ohne Berücksichtigung der Inkohärenz in der Frequenz kann man den Wechselwirkungseffekt für eine beliebige Linie auf Grund der Bilanz der Anzahl der Übergänge in der gegebenen Linie unter Berücksichtigung der mit ihr zusammenhängenden wichtigsten Linien untersuchen. Diese Bilanz ermöglicht es, das Verhältnis der Anzahl der Atome im oberen und unteren Zustand und somit auch die durch den Wechselwirkungseffekt hervorgerufene Änderung von j_ν zu berechnen. Als Beispiel für die Berücksichtigung des Wechselwirkungseffektes (ohne Berücksichtigung der Inkohärenz) betrachten wir eine der wichtigsten Linien in den Sternspektren, die Linie Hα, die vom zweiten Niveau ausgeht, und ferner die Linien Hβ, Hγ, ... Man kann annehmen, daß der überwiegende Anteil der an der Entstehung von Hα beteiligten Absorptionsprozesse den Übergängen $2p \to 3s$ und $2p \to 3d$ entspricht. Im Vergleich zu diesen Übergängen ist die Anzahl der Übergänge $2s \to 3p$ gering (Abb. 42). Andererseits wird ein auf das Niveau $3s$ oder $3d$ gelangtes Elektron hauptsächlich

auf das Niveau $2p$ zurückkehren, da die Übergangswahrscheinlichkeit auf höhere Niveaus von den Niveaus $3s$ und $3d$ für die nicht sehr heißen Sterne gering ist im Vergleich zur Übergangswahrscheinlichkeit $3 \to 2$. Die Übergänge $3s \to 1s$ und $3d \to 1s$ sind nach den Auswahlregeln für die azimutale Quantenzahl verboten. Somit beschränkt sich der Wechselwirkungseffekt in diesem Fall (Hα) nur auf die Prozesse $2s \to 3p$ (die weiter zu dem Übergang $3p \to 1s$, d.h. zur Emission eines Quants Lβ, führen können).

Daher ist wegen der Seltenheit der Übergänge $2s \to 3p$ der betrachtete Effekt nicht so groß, wie man es auf den ersten Blick vermuten könnte.

Das gleiche trifft in etwas geringerem Maße auch auf die Linie Hβ usw. zu.

2. Die Inkohärenz der Streuprozesse

Wir haben soeben den Wechselwirkungseffekt für die Linien der BALMER-Serie betrachtet und gezeigt, daß dieser Effekt klein ist. In anderen Fällen kann er jedoch beträchtliche Werte annehmen. In Wirklichkeit müssen wir nämlich neben dem Wechselwirkungseffekt gleichzeitig den Effekt der Inkohärenz berücksichtigen.

Bei der inkohärenten Streuung des Lichtes ist der für den Emissionskoeffizienten j_ν grundlegende Ausdruck (9.5)

$$j_\nu = \sigma_\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} \tag{14.6}$$

offenbar durch folgenden Ausdruck zu ersetzen [17]:

$$j_\nu = \int\int I_{\nu'}\, p(\nu, \nu', \gamma)\, \sigma_{\nu'}\, d\nu' \frac{d\omega}{4\pi}, \tag{14.7}$$

wobei $p(\nu, \nu', \gamma)\, d\nu$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß die Strahlung der Frequenz ν' in dem Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ in eine Richtung gestreut wird, die mit der Anfangsrichtung des Strahles den Winkel γ bildet.

Die Bedeutung der inkohärenten Streuprozesse in den Sternatmosphären trat erst in jüngster Zeit zutage. Insbesondere entdeckte man, daß die Inkohärenz (in Frequenz und Phase) auch bei den Resonanzlinien auftritt. Im folgenden betrachten wir die Ursachen, die zu der Erscheinung der Inkohärenz sowohl bei den „subordinate lines“ als auch den Resonanzlinien führen können:

1. Die durch thermische, turbulente und andere Bewegungen der absorbierenden und emittierenden Atome entstehende Inkohärenz. Im allgemeinen fallen die Geschwindigkeitskomponenten der sich bewegenden Atome nicht in die Bewegungsrichtung der absorbierten und emittierten Quanten. Daher müssen sich die Frequenzen der absorbierten und reemittierten Quanten unterscheiden, selbst wenn die Streuung an den ruhenden Atomen der vorgegebenen Sorte völlig kohärent ist.

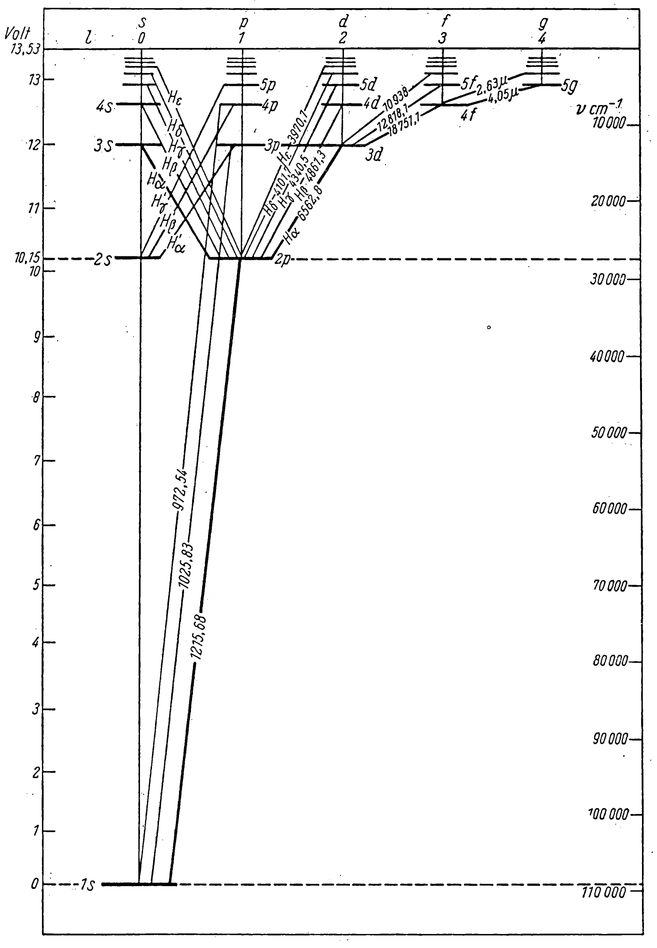


Abb. 42

2. Die durch die Unschärfe des unteren Niveaus hervorgerufene Inkohärenz. Diese betrifft hauptsächlich die „subordinate lines".[1]) Hier ist die Größe des reemittierten Quants $h\nu''$ (siehe Abb. 24) im allgemeinen von der Größe des

[1]) Außerdem spielt für die „subordinate lines" der Wechselwirkungseffekt eine gewisse Rolle (siehe weiter oben).

absorbierten Quants $h\nu'$ verschieden. Beim Vorhandensein eines starken Strahlungsfeldes (sehr heiße Sterne) kann auch das Grundniveau unscharf sein [siehe Formel (11.20)]. In diesem Fall ist auch bei den Resonanzlinien die Kohärenz verletzt.

Es ist von Interesse, daß in dem eben betrachteten Fall folgende einschränkende Bedingung für die Emission und die Absorption der Quanten vorliegt: In einem hinreichend großen Zeitabschnitt müßte in der vorgegebenen Linie die Summe $h\nu$ für alle von dem Atom absorbierten Quanten gleich der Summe $h\nu$ für alle von demselben Atom reemittierten Quanten sein. Diese Bedingung ergibt sich natürlich aus dem Satz von der Erhaltung der Energie.

Beide oben angegebenen Fälle für das Auftreten einer Inkohärenz beziehen sich nur auf die Inkohärenz in der Frequenz, weil bei ihnen die Kontinuität des Wellenvorganges nicht verletzt wird.

3. Die durch Druckeffekte bewirkte Inkohärenz. Dieser Faktor ist in den Sternatmosphären offenbar der wichtigste, weil – wie wir in den §§ 12 und 13 gesehen haben – die Verbreiterung des Atomniveaus in den Sternatmosphären, möglicherweise mit Ausnahmen der Überriesen, in großem Maße durch den Druckeffekt bewirkt wird. Das Studium dieses Effektes zeigt, daß in dem vorliegenden Fall die Reemission der absorbierten Quanten völlig inkohärent in Frequenz und in Phase sein muß. Dies ist am leichtesten für den Fall der statistischen Verbreiterung zu erklären. Wenn z.B. die Absorption eines Quants durch ein Atom in dem Augenblick vor sich geht, in dem sich in der Nähe des Atoms ein störendes Teilchen befindet, so wird sich die Frequenz des absorbierten Quants von der Frequenz des Quants unterscheiden, das bei Abwesenheit eines störenden Teilchens absorbiert wird. Bis zu dem Zeitpunkt, in dem das Elektron auf das Ausgangsniveau zurückspringt, kann sich das störende Teilchen von dem Atom weit genug entfernt haben, so daß sich die Frequenz des emittierten Quants von der Frequenz des absorbierten Quants unterscheiden wird. Die Differenz (Überschuß oder Verlust) der Energie von absorbiertem und emittiertem Quant vergrößert (oder verkleinert) die Energie des störenden Teilchens, dessen kinetische Energie (im Unendlichen) sich jetzt von seiner anfänglichen genau um die Differenz der Energie von absorbiertem und emittiertem Quant unterscheidet (wenn natürlich das absorbierende Atom in seinen Ausgangszustand zurückkehrt und man die Inkohärenz beim ungestörten Atom vernachlässigen kann).

In dem vorliegenden Fall sind die Frequenzen der absorbierten und der emittierten Quanten völlig unabhängig voneinander, und die Reemission der Quanten ist vollkommen inkohärent. Dies ist z.B. auf die Verbreiterung der Wasserstofflinien durch intermolekulare elektrische Felder anwendbar. Der Fall der Stoßverbreiterung der Linien ist dem Fall der statistischen Verbreiterung völlig analog.

Aus unseren Ausführungen folgt, daß beim Auftreten von Druckeffekten die Frequenzen der absorbierten und der emittierten Quanten im allgemeinen voneinander verschieden sind. Darüber hinaus sind die Streuprozesse beim Auftreten von Druckeffekten völlig inkohärent. Außerdem ist die hier betrachtete Inkohärenz eine solche in Frequenz und Phase. Tatsächlich sind die

Druckeffekte (siehe § 11) gerade dadurch bedingt, daß bei den Schwingungen der absorbierenden und der emittierenden Atome Phasenänderungen auftreten.

Wir untersuchen nun, in welcher Weise man die Strömungsgleichung beim Auftreten von inkohärenten Streuprozessen abändern muß. Hierbei betrachten wir nur die durch die Effekte der Stoßdämpfung hervorgerufene Inkohärenz. In den §§ 12 und 13 haben wir gesehen, daß diese Effekte in vielen Fällen für die Verbreiterung der Absorptionslinien maßgebend sind.

In diesem Fall ist die Streuung völlig inkohärent. Dies bedeutet, daß die Frequenzverteilung der reemittierten Quanten nicht von der Frequenzverteilung der Strahlung, die die Atome anregt, abhängt. Folglich wird die Verteilung der reemittierten Quanten über die Frequenz durch das in § 11 entwickelte Gesetz bestimmt, d.h., die bei völlig inkohärenter Streuung reemittierte Energie muß dem *selektiven Absorptionskoeffizienten* σ_ν proportional sein.[1])

Wir betrachten jetzt als konkretes Beispiel die Aufstellung der Strömungsgleichung für die Resonanzlinien. Hierbei müssen wir berücksichtigen, daß die Verbreiterung dieser Linien im allgemeinen sowohl durch Druckeffekte als auch durch Strahlungsdämpfung hervorgerufen wird. Die strenge Trennung dieser beiden Faktoren bei der Aufstellung der Strömungsgleichung ist eine bisher noch nicht gelöste Aufgabe. Wenn wir jedoch von dem Modell des klassischen Oszillators ausgehen, können wir die erforderliche Trennung folgendermaßen durchführen. Die Strahlungsdämpfungskonstante für eine vorgegebene Linie sei γ_k und die Stoßdämpfungskonstante γ_c. Dann wird die Absorption der Strahlung durch den Absorptionskoeffizienten (11.24) mit $\delta_{ik} = \frac{1}{4\pi}(\gamma_k + \gamma_c)$ bestimmt, wobei $\gamma_1 \approx 0$, weil wir es mit einer Resonanzlinie zu tun haben. Aus eingehenden Untersuchungen geht dann hervor, daß von der absorbierten Energie der Bruchteil $\gamma_k : (\gamma_k + \gamma_c)$ kohärent reemittiert wird, d.h., die Frequenzen der absorbierten und der emittierten Quanten sind gleich. Der Bruchteil $\gamma_c : (\gamma_k + \gamma_c)$ wird vollständig inkohärent reemittiert, wobei in Übereinstimmung mit unseren obigen Ausführungen die Frequenzverteilung der reemittierten Energie mit der Frequenzabhängigkeit der Größe s_ν (oder σ_ν) identisch ist.

Demgemäß besteht der Emissionskoeffizient j_ν aus zwei Bestandteilen. Der erste Bestandteil, der dem kohärent gestreuten Licht entspricht, hat die Gestalt

$$(j_\nu)_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_k + \gamma_c}\,\sigma_\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi}. \tag{14.8}$$

Den zweiten Anteil kann man schreiben, indem man von der gesamten Energiemenge ausgeht, die von einem Gramm Materie absorbiert wird:

$$4\pi \int \sigma_{\nu'}\, d\nu' \int I_{\nu'} \frac{d\omega}{4\pi}. \tag{14.9}$$

[1]) Weil die zitierten Gesetze für die Verteilung der Wahrscheinlichkeit sowohl für Emissionsprozesse als auch für Absorptionsprozesse gleich sind.

Von dieser Energie wird der Bruchteil $\gamma_c : (\gamma_k + \gamma_c)$ inkohärent gestreut. Da wir es mit einer vollständig inkohärenten Streuung zu tun haben, können wir für den zweiten Anteil von j_ν schreiben:

$$(j_\nu)_{ik} = \frac{\gamma_c}{\gamma_k + \gamma_c} \sigma_\nu^{(n)} \int \sigma_{\nu'} d\nu' \int I_{\nu'} \frac{d\omega}{4\pi}, \tag{14.10}$$

wobei $\sigma_\nu^{(n)}$ der auf Eins normierte Absorptionskoeffizient ist, d.h.

$$\sigma_\nu^{(n)} = \frac{\sigma_\nu}{\int \sigma_\nu d\nu} \tag{14.11}$$

(σ_ν ist der selektive Absorptionskoeffizient, der wie gewöhnlich definiert ist). Das Integral von (14.10) über die gesamte Linie muß den mit $\gamma_c : (\gamma_k + \gamma_c)$ multiplizierten Ausdruck (14.9) ergeben.

Folglich erhält die Strömungsgleichung an Stelle von (9.30) folgende Gestalt, wenn wir die Prozesse der wahren Absorption nicht berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{\varrho\, dh} &= (\varkappa_\nu + \sigma_\nu) I_\nu(\vartheta) \\ &- \frac{\sigma_\nu}{\gamma_k + \gamma_c} \left\{ \gamma_k \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \frac{\gamma_c}{\int \sigma_\nu d\nu} \int \sigma_{\nu'} d\nu' \int I_{\nu'} \frac{d\omega}{4\pi} \right\} - \varkappa_\nu B_\nu. \end{aligned} \tag{14.12}$$

An die rechte Seite von (14.12) darf man keine zusätzlichen Glieder mit dem Faktor ε_ν anfügen, wenn man nicht zuvor speziell untersucht hat, in welchem Maße die Rekombinationen auf das k-te Niveau den zweiten Summanden in der geschweiften Klammer der angeschriebenen Gleichung verändern können.

Eine exakte Lösung der Gleichung (14.12) für den Fall $\gamma_k = 0$, d.h. die Lösung der Gleichung

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{\varrho\, dh} = (\varkappa_\nu + \sigma_\nu) I_\nu(\vartheta) - \frac{\sigma_\nu}{\int \sigma_\nu d\nu} \int \sigma_{\nu'} d\nu' \int I_{\nu'} \frac{d\omega}{4\pi} - \varkappa_\nu B_\nu, \tag{14.13}$$

wurde von W. W. Sobolew [17] in einer anschaulichen Form ermittelt. Dieser Fall ist von großem Interesse, weil – wie wir in den §§ 12 und 13 gesehen haben – in vielen Fällen tatsächlich $\gamma_k \ll \gamma_c$ ist.

Die Schärfe der auf Grund der erhaltenen Lösung abgeleiteten Konturen der Absorptionslinien verringert sich mit der Annäherung an den Rand der Scheibe. Dies entspricht den Beobachtungsergebnissen. Die von Münch für die K-Linie von Ca II auf Grund der unter gewissen Voraussetzungen ermittelten Lösung der Gleichung (14.12) durchgeführten Rechnungen führen ebenfalls zu einer völlig zufriedenstellenden Übereinstimmung mit den beobachteten Änderungen der Kontur der K-Linie auf der Sonnenscheibe. Somit scheint die Berücksichtigung der inkohärenten Streuung die Abweichungen zwischen den theoretischen und den beobachteten Konturen zu beseitigen. Trotzdem ist aber noch weitere umfangreiche Arbeit zu leisten. Insbesondere wäre es von

großem Interesse, die exakte Lösung von W. W. SOBOLEW auf gewisse Linien des Sonnenspektrums anzuwenden. Außerdem ist es äußerst wichtig, die physikalischen Grundlagen für die Theorie der inkohärenten Streuung unter Hinzuziehung von Laboratoriumsangaben auszuarbeiten.[1]) Wir weisen darauf hin, daß die entsprechenden experimentellen Angaben die Hypothese der Inkohärenz der Streuprozesse bei verbreiternden Stößen vollkommen bestätigen. ORTMANN und PRINGSHEIM zeigten (mit Quecksilberlampen), daß, wenn die Gasatome durch die Strahlung einer schmalen Resonanzlinie angeregt werden, die infolge Reemission entstehende neue Linie beträchtlich breiter als die erste Linie ist und eine Kontur besitzt, die durch die Verbreiterung infolge von Stößen der betrachteten Atome mit anderen Atomen vollständig bestimmt ist. Soeben haben wir inkohärente Streuprozesse betrachtet, die mit den Druckeffekten in Verbindung standen. Wenn dagegen die Inkohärenz nur von der Unschärfe des unteren Niveaus herrührt („subordinate lines"), so ist – wie die Untersuchungen zeigen – die gestreute Strahlung nicht völlig inkohärent, sondern besteht aus zwei Bestandteilen. Ihr erster Bestandteil entspricht der kohärenten Streuung und ihr zweiter der inkohärenten Streuung. Jedoch werden die „subordinate lines" offenbar hauptsächlich durch die Druckeffekte verbreitert. Daher ist zu erwarten, daß die angestellten Überlegungen über die vollkommen inkohärente Streuung auch auf diese Linien anwendbar sind.

Abschließend merken wir folgendes an: Aus den Beobachtungen und aus der (wenn auch einstweilen noch unvollkommenen) Theorie geht hervor, daß die Unterschiede zwischen den Linienkonturen im Falle der kohärenten und der inkohärenten Streuung verhältnismäßig klein sind. Dies bedeutet, daß unsere sämtlichen quantitativen Folgerungen in bezug auf solche Parameter wie die Turbulenzgeschwindigkeit, die Dämpfungskonstante, die Anzahl der absorbierenden Atome (und damit die chemische Zusammensetzung) usw. sich nicht stark ändern werden, wenn wir die kohärenten Streuprozesse durch die inkohärenten Streuprozesse ersetzen. Mit anderen Worten, unsere quantitativen Angaben sind offenbar größenordnungsmäßig richtig.

3. Die zentralen Restintensitäten der Absorptionslinien Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen

Wir wenden uns jetzt den Restintensitäten in den zentralen Teilen der Absorptionslinien zu. Wir haben schon mehrfach darauf hingewiesen, daß zwischen den rechnerischen Ergebnissen und den Beobachtungen ernst zu nehmende Unterschiede auftreten, und zwar liegen in der Mitte der hinreichend starken Linien des Sonnenspektrums ($\nu = \nu_0$), wo man nach der Formel (10.20) (bei

[1]) Über die Theorie der Diffusion der Resonanzstrahlung unter Berücksichtigung der Frequenzänderung in Absorption und Ausstrahlung siehe L. BIBERMAN, Zur Theorie der Diffusion der Resonanzstrahlung, Journal für experimentelle und theoretische Physik, **17**, 416, 1947 (Л. Биберман, К теории диффузии резонансного излучения. Журнал экспериментальной и теоретической физики **17**, 416, 1947).

$\varepsilon_\nu = 0$) die Bedingung $r_{\nu_0} \approx 0$ erwarten müßte, die beobachteten r_{ν_0} gewöhnlich zwischen 0,05 und 0,2. Ähnliche Unstimmigkeiten treten nicht nur bei der Sonne, sondern auch bei den übrigen Sternen auf. Überhaupt ist auf Grund der Gleichung (10.20) für $\varepsilon_\nu = 0$ zu erwarten, daß für die hinreichend starken Linien die Bedingung $r_{\nu_0} \approx 0$ erfüllt sein muß. Hiervon kann man sich sehr leicht überzeugen, wenn man in die angegebene Formel genügend große Werte für τ_{ν_0} bzw. für η_{ν_0} einsetzt. Inwieweit die Voraussetzungen der betrachteten Theorie auch für Sterne von sonnenunähnlichem Typ nicht mit den Beobachtungen übereinstimmen, kann man beispielsweise aus der Abb. 43 entnehmen, die von G. A. Schain aus Simeiser Spektrogrammen für die Linie Hγ gewonnen wurde. Auf der Abszissenachse sind die Spektraltypen von O bis M 0 und $\lg T_e$ und auf der Ordinatenachse die Linientiefe $R_{\nu_0} = 1 - r_{\nu_0}$ aufgetragen. Aus dieser graphischen Darstellung ist ersichtlich, daß in dem Bereich der Klassen F5–B2, in dem man die Linie Hγ als hinreichend stark ansehen kann, sich R_{ν_0} sehr stark von Eins unterscheidet. Daher ist auch r_{ν_0} von Null verschieden.

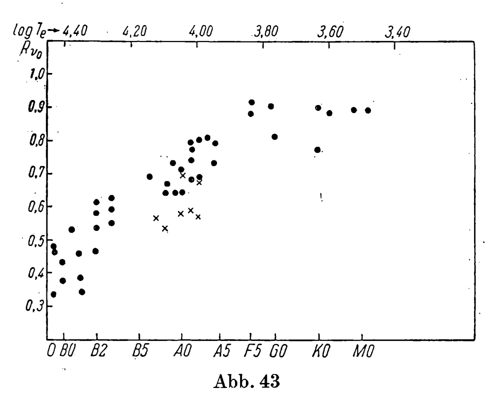


Abb. 43

Wir befassen uns nun mit der möglichen Deutung der betrachteten Ergebnisse und untersuchen zunächst, in welchem Maße die Intensität innerhalb der Linie durch die Prozesse der wahren Absorption bestimmt wird. In § 9 haben wir gesehen, daß beim Vorherrschen der wahren Absorption ($\varepsilon_\nu \approx 1$) die Strahlungsintensität in der Mitte einer starken Absorptionslinie näherungsweise $B_\nu(T_0)$ sein muß, und dies für alle Winkel ϑ. Wenn somit die Strahlungsintensität in den der Linie benachbarten Bereichen des kontinuierlichen Spektrums gleich $B_\nu(T_E)$ ist, wobei T_E die Strahlungstemperatur (siehe § 8) ist, so kann man r_{ν_0} in guter Näherung durch den Ausdruck

$$r_{\nu_0} \approx \frac{B_\nu(T_0)}{B_\nu(T_E)} \tag{14.14}$$

darstellen. (In zahlreichen Fällen kann man annehmen, daß $T_E \approx T_e$.)

Folglich besitzt r_{ν_0} in diesem Fall einen ziemlich großen, von Null verschiedenen Wert. Wir haben in § 9 allerdings gezeigt, daß die zentralen Bereiche der Absorptionslinien im Sonnenspektrum nicht durch die Prozesse der wahren Absorption, sondern hauptsächlich durch Streuprozesse entstehen. Jedoch wird stets ein gewisser Bruchteil ε_ν der absorbierten Quanten nach den Gesetzen

der wahren Absorption reemittiert. Gleichzeitig ist es klar, daß die Einführung von $\varepsilon_\nu > 0$ in die Gleichung (10.20) r_{ν_0} gegenüber dem Fall $\varepsilon_\nu = 0$ vergrößert. Diese Möglichkeit werden wir jetzt behandeln. Hierbei betrachten wir einstweilen nur die Linien des Sonnenspektrums; die zu anderen Spektraltypen gehörigen Sterne behandeln wir später.

Um die Restintensitäten r_ν in der Mitte einer starken Linie zu erhalten, gehen wir von folgenden vereinfachenden Überlegungen aus:

Da für die betrachtete Linie der Absorptionskoeffizient σ_ν in den zentralen Bereichen sehr groß ist, beobachten wir eine Strahlung, die aus einer nicht sehr tiefen oberflächlichen Schicht der Sonnenphotosphäre zu uns gelangt. Im Innern dieser Schicht, die zum Teil auch den unteren Teil der Chromosphäre umfaßt, können wir die Temperatur als konstant ansehen (siehe § 21) und sie gleich der Oberflächentemperatur T_0 setzen. Im Hinblick auf die geringe Dicke der betrachteten Schicht können wir annehmen, daß $\eta_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\varkappa_\nu}$ und ε_ν ebenfalls nicht von der Tiefe abhängen. Folglich dürfen wir von der Gleichung (10.18) Gebrauch machen, in der wir mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Konstanz der Temperatur $b_\nu = 0$ setzen. Für den Strom $H_\nu^{(0)}(0)$, der dem kontinuierlichen Spektrum entspricht, setzen wir

$$H_\nu^{(0)}(0) = B_\nu(T_E), \qquad (14.15)$$

wobei T_E die Strahlungstemperatur ist. Man kann T_E im Falle der Richtigkeit der linearen Entwicklung (8.10) aus (14.15) und (10.19) bestimmen. Im allgemeinen erhält man sie, indem man $\pi B_\nu(T_E)$ dem theoretischen Strahlungsstrom πH_ν im kontinuierlichen Spektrum an der Grenze der Atmosphäre gleichsetzt. Endlich kann man T_E auch aus den Beobachtungen ermitteln.

Unter Berücksichtigung unserer Ausführungen erhalten wir für r_ν

$$r_\nu = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{1+\varepsilon_\nu\eta_\nu}}{\sqrt{1+\eta_\nu}+\frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{1+\varepsilon_\nu\eta_\nu}}\,\frac{B_\nu(T_0)}{B_\nu(T_E)}. \qquad (14.16)$$

Für $\varepsilon_\nu = 1$ erhalten wir näherungsweise[1]) die Gleichung (14.14), was auch zu erwarten war.

Wir weisen gleichzeitig darauf hin, daß man die Formel (14.16) nicht für $\eta_\nu = 0$ anwenden darf, da wir sie für den Fall $\eta_\nu \gg 1$, d.h. für die Mitte der starken Linien, abgeleitet haben. Die Verwendung von (14.16) für $\eta_\nu = 0$ ist nur in dem Fall gestattet, wenn in der gesamten Sternatmosphäre $T = T_0 = \text{const}$ ist.

In der Mitte einer hinreichend starken Linie ist für gewöhnlich nicht nur η_ν,

---

[1]) Der hierbei auftretende Faktor 1,07 vor $B_\nu(T_0) : B_\nu(T_E)$ ist durch die mathematischen Vereinfachungen des Verfahrens, insbesondere durch die Einführung der Gleichung (14.15), bedingt.

sondern auch $\varepsilon_\nu \eta_\nu$ beträchtlich größer als Eins. In diesem Fall nimmt die Formel (14.16) die Gestalt

$$r_\nu \approx \frac{4}{3}\sqrt{3}\sqrt{\varepsilon_\nu}\,\frac{B_\nu(T_0)}{B_\nu(T_E)} = 2{,}3\sqrt{\varepsilon_\nu}\,\frac{B_\nu(T_0)}{B_\nu(T_E)} \tag{14.17}$$

an, wobei wir berücksichtigt haben, daß $\varepsilon_\nu \ll 1$.

Im Sonnenspektrum ist bei $\lambda = 4500$ Å $T_E \approx 6200°$ und bei $\lambda = 6000$ Å $T_E \approx 6000°$. Bei $T_e = 5710°$ finden wir aus der Gleichung (4.25), daß $T_0 \approx 4640°$ ist. Mit diesen Zahlenwerten erhalten wir bei $\lambda \approx 4500$ Å für das Verhältnis $B_\nu(T_0) : B_\nu(T_E) \approx 0{,}17$ und bei $\lambda = 6000$ Å $B_\nu(T_0) : B_\nu(T_E) \approx 0{,}30$. Somit steht im ersten Fall in der Formel (14.17) vor $\sqrt{\varepsilon_\nu}$ näherungsweise der Faktor 0,4 und im zweiten Fall näherungsweise der Faktor 0,7. Hieraus und aus der Formel (14.17) folgt, daß, wenn z. B. in der Mitte einer Absorptionslinie, die in der Nähe von $\lambda = 4500$ Å liegt, $r_{\nu_0} \approx 0{,}05$, $\varepsilon_\nu \approx 0{,}016$, und für eine in der Nähe von $\lambda = 6000$ Å gelegenen Linie $\varepsilon_\nu \approx 0{,}005$ ist.

Wir untersuchen jetzt, welche Werte von ε_ν wir für die starken Linien des Sonnenspektrums zu erwarten haben. Zur Bestimmung werden wir Resonanzlinien betrachten. Dem unteren Niveau dieser Linie ordnen wir den Index 1 und dem oberen Niveau den Index k zu.

Wir erinnern daran, daß ε_ν denjenigen Anteil der Energie angibt, der von der gesamten selektiv absorbierten Energie in Wärmeenergie umgewandelt wird. Es ist klar, daß diese Größe auch den Bruchteil derjenigen Übergänge, die den Prozessen der wahren Absorption entsprechen, von der Gesamtzahl der Übergänge angibt, die die Quantenabsorption begleiten.

Wenn wir einen Näherungswert für r_{ν_0} ermitteln wollen, brauchen wir nicht die Übergänge vom k-ten Niveau auf höhergelegene diskrete Niveaus zu berücksichtigen.

Wir behandeln jetzt die Elektronen, die durch Absorptionsprozesse vom Grundniveau auf das k-te Niveau gehoben werden (Übergänge vom Typ $1 \to k$). Die Elektronen, die sich auf dem k-ten Niveau befinden, können auf drei verschiedene Arten das k-te Niveau wieder verlassen:

1. indem sie auf das Grundniveau zurückkehren. Die auf ein angeregtes Atom bezogene Anzahl dieser Übergänge ist gleich dem Koeffizienten A_{k1}.

2. durch Photoionisation vom k-ten Niveau aus. Die Anzahl dieser Prozesse bezeichnen wir mit C_{kf}. Sie ist gleich dem durch $n_{r,k}$ dividierten Ausdruck (8.6);

3. durch Stöße zweiter Art, die die Atome vom k-ten Anregungszustand in den Grundzustand überführen, ohne daß ein Quant $h\nu_{1k}$ emittiert wird.

Die auf ein angeregtes Atom bezogene Anzahl dieser Prozesse sei c_{k1}.

Von diesen drei Prozessen entspricht der erste der Streuung und die beiden letzten der Umwandlung von Strahlungsenergie in Wärmeenergie. Da die Gesamtzahl der auf ein Atom bezogenen Übergänge vom k-ten Niveau gleich $A_{k1} + C_{kf} + c_{k1}$ und die der wahren Absorption entsprechende Zahl der

Übergänge gleich $C_{kf} + c_{k1}$ ist, wird

$$\varepsilon_\nu = \frac{C_{kf} + c_{k1}}{C_{kf} + c_{k1} + A_{k1}}. \tag{14.18}$$

Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß ε_ν innerhalb der ganzen Linie gleich sein muß.[1])

In der Formel (14.18) können wir (sowohl im Zähler als auch im Nenner) den Summanden c_{k1} vernachlässigen. Wir haben gesehen, daß die zentralen Bereiche der Absorptionslinien in den äußersten Schichten der Sonnenatmosphäre entstehen. In diesen Schichten ist die Teilchendichte gering, und folglich können die Stöße zweiter Art dort keine merkliche Rolle spielen. Diese Folgerung bestätigt sich auch durch unmittelbare Rechnung. Somit können wir die Größe $\varepsilon_\nu = \varepsilon$ nach der Formel

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon = \frac{C_{kf}}{C_{kf} + A_{k1}} \tag{14.19}$$

berechnen.

Zur Ermittlung der Größen C_{kf} gehen wir auf die Formel (8.6) zurück. Wenn wir die Näherung (10.16) für die Grenze benutzen, finden wir auf Grund von (8.6)

$$C_{kf} \approx \frac{2\pi}{h} \int_{\nu_k}^{\infty} (H_\nu)_{\tau_\nu = 0} \frac{(k'_\nu)_k}{\nu} d\nu. \tag{14.20}$$

Hierbei können wir für die Berechnung von C_{kf} in dem Bereich, der für die Photoionisation des vorliegenden Atoms die Hauptrolle spielt, $(H_\nu)_{\tau_\nu = 0} = B_\nu(T_E)$ setzen, wobei T_E die Strahlungstemperatur ist. Für die Niveaus des Wasserstoffatoms und ebenfalls für die Niveaus der übrigen Atome mit kleiner Bindungsenergie $\chi_{r,k}$ dürfen wir bei der Berechnung von $(k'_\nu)_k$ die Gleichung (5.24) benutzen. Für die tiefen Terme mit großem $\chi_{r,k}$ muß man für jeden einzelnen Fall direkte quantenmechanische Rechnungen durchführen oder Laboratoriumsdaten benutzen.

In Tabelle 7 sind Werte von C_{kf} aufgeführt, die unter Benutzung der Formel (14.20) mit $(H_\nu)_{\tau_\nu = 0} = B_\nu(T_E)$ und der Formel (5.24) gewonnen wurden. In der letzten Formel ist $Z = 1$, $g' = 1$ und $n = k = 2$ gesetzt worden.

Wenn auch die Angaben der Tabelle nur Näherungswerte sind, kann man trotzdem mit ihrer Hilfe die Größenordnung der Werte für ε berechnen. Wir betrachten zunächst die D_1- und die D_2-Linie des Natriums, für die sich aus der Beobachtung ein r_{ν_0} von etwa 0,05–0,06 ergibt. Für sie ist $\chi_{0,k} = 3{,}03$ eV. Wenn wir als obere Grenze $T_E = 6500°$ annehmen, so ist für diese Linien $C_{kf} \approx 9 \cdot 10^4$. Andererseits ist für sie $A_{k1} \approx 6 \cdot 10^7$. Mit diesen Werten erhalten wir für die betrachteten Linien $\varepsilon \approx 0{,}0015$ und $r_{\nu_0} \approx 0{,}03$.

---

[1]) Eine strengere Begründung findet man in der Übersicht über die Absorptionslinien in [18, S. 57].

Bei der Linie $\lambda = 4227$ Å von CaI beobachtet man $r_{\nu_0} \approx 0{,}03$. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist $A_{21} \approx 1{,}4 \cdot 10^8$, $\chi_{0,k} \approx 3{,}2$ eV, $C_{kf} \approx 6 \cdot 10^4$, $\varepsilon \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4}$ und der theoretische Wert $r_{\nu_0} \approx 0{,}007$. Somit ist in beiden Fällen

Tabelle 7

$\chi_{r,k}$ [eV]	C_{kf} $T_E = 4900°$	C_{kf} $T_E = 6500°$
2	$2 \cdot 10^5$	$7{,}5 \cdot 10^5$
3	$1{,}5 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^4$
4	$1 \cdot 10^3$	$1{,}2 \cdot 10^4$
6	5	225
8	0,03	4,5

der theoretische Wert von r_{ν_0} kleiner als der beobachtete. Noch schlechter liegen die Dinge bei den Linien H und K des ionisierten Kalziums. Für sie ist $\chi_{1,k} = 8{,}7$ eV und folglich nach Tabelle 7 $C_{kf} < 1$. Andererseits ist für die K-Linie $A_{k1} \approx 1{,}4 \cdot 10^8\,\text{sec}^{-1}$. Hieraus finden wir, daß in diesem Fall ε von der Größenordnung 10^{-8} oder kleiner ist, was für die Erklärung des beobachteten Wertes von r_{ν_0}, der gleich 0,07–0,08 ist, nicht ausreicht.

4. Die Berücksichtigung der Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht für die Sonne. Die Sterne der übrigen Spektralklassen

Wir versuchen, den Einfluß der möglichen Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht auf das letzte Glied der rechten Seite in der Gleichung (10.2) zu berücksichtigen. Da dieses Glied die Strahlung angibt, die den Prozessen der wahren Absorption entspricht, können wir die erwähnten Abweichungen dadurch darstellen, daß wir $\varepsilon_\nu \eta_\nu B_\nu$ einfach mit einer gewissen Größe Q multiplizieren. Ist $Q > 1$, so ist die Strahlung größer als bei Gültigkeit der Gesetze des thermodynamischen Gleichgewichtes; ist $Q < 1$, so ist die Strahlung geringer. In diesem Fall nimmt die Gleichung (10.2) die Gestalt

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\vartheta)}{d\tau_\nu} = (1 + \eta_\nu) I_\nu(\vartheta) - (1 - \varepsilon_\nu)\eta_\nu J_\nu - B_\nu - Q\eta_\nu\varepsilon_\nu B_\nu \qquad (14.21)$$

an.

Um der Größe Q eine anschauliche Bedeutung zu geben, betrachten wir die physikalische Seite der eben durchgeführten Rechnungen. Die Vergrößerung von r_{ν_0} dadurch, daß sich ε_ν von Null unterscheidet, wird durch die R e k o m b i n a t i o n auf das k-te Niveau, d. h. infolge des Einfangs von Elektronen auf dieses Niveau, bewirkt. Wir betrachten nun Prozesse vom Typ $1 \to k \to f$ und

$f \to k \to 1$. Im thermodynamischen Gleichgewicht kompensieren sich die beiden Prozesse. In den äußersten Schichten der Sonnenatmosphäre (Sternatmosphäre) ist die Strahlungsintensität in der Linie gering und bezüglich r_{ν_0} geschwächt. Daher gehen die Übergänge vom Typ $1 \to k$ und folglich auch $k \to f$ seltener vor sich als im thermodynamischen Gleichgewicht. Dagegen hat die Verminderung der Intensität in der Frequenz der Linie auf die Prozesse vom Typ $f \to k \to 1$ praktisch keinen Einfluß. Bei jedem Prozeß vom Typ $f \to k \to 1$ entsteht ein Quant in der Frequenz der Linie. Das Vorherrschen dieser Prozesse muß auch die zentrale Intensität der Absorptionslinien vergrößern.

Der betrachtete Fall ist im wesentlichen ein Beispiel für die *Fluoreszenz*, d. h. für einen Prozeß, bei dem sich Quanten mit größerer Energie in Quanten mit kleinerer Energie verwandeln. In dem vorliegenden Fall ist die Anzahl der Übergänge, die dem geschlossenen Zyklus $1 \to k \to f \to 1$ entsprechen, aus den angegebenen Gründen kleiner als die Zahl der dem Zyklus $1 \to f \to k \to 1$ entsprechenden Übergänge. Mit anderen Worten, die Prozesse der Umwandlung von Quanten höherer Energie $h\nu_{1f}$ in Quanten geringerer Energie $h\nu_{fk}$ und $h\nu_{1k}$ gehen viel häufiger vor sich als die umgekehrten Prozesse der aufeinanderfolgenden Absorption zweier Quanten $h\nu_{1k}$ und $h\nu_{kf}$ und die Reemission eines einzigen Quants $h\nu_{1f}$.

Von diesen Vorstellungen ausgehend, betrachten wir die Größe Q. Da praktisch jedes Elektron, das auf das k-te Niveau gelangt, sofort auf das Grundniveau zurückfällt (der Koeffizient C_{kf} ist beträchtlich kleiner als A_{k1}) und eine zusätzliche Emission in der Linienmitte hervorruft, ist die Intensität dieser Strahlung der Anzahl der Rekombinationen auf das k-te Niveau proportional. Im Gleichgewicht muß die Anzahl der in 1 cm³ und in 1 sec vor sich gehenden Rekombinationen gleich der Zahl der in demselben Volumen und während derselben Zeit vor sich gehenden Photoionisationen sein. Daher muß die aus irgendeinem Grunde erfolgte Zunahme der Zahl der Photoionisationen zu einer Zunahme der Zahl der Einfänge C_{fk} und daher zu einer Zunahme der zusätzlichen Übergänge A_{k1} führen. Andererseits ist die Anzahl der in 1 cm³ vor sich gehenden Photoionisationen im wesentlichen durch die Übergänge vom Typ $1 \to f$ bestimmt, weil – wie wir gesehen haben – die Anzahl der Atome im k-ten Anregungszustand gering ist. Folglich muß die Anzahl A_{k1} der Übergänge, die eine zusätzliche Strahlung erzeugen, dem Koeffizienten C_{1f} proportional sein. Wenn wir dies beachten, können wir für Q

$$Q = \frac{C_{1f}}{C_{1f}^{(t)}} \tag{14.22}$$

schreiben, wobei $C_{1f}^{(t)}$ die Anzahl der Photoionisationen, die dem Fall des thermodynamischen Gleichgewichtes entsprechen, und C_{1f} dieselbe Anzahl bei fehlendem thermodynamischen Gleichgewicht ist.

Eine strengere Untersuchung des vorliegenden Problems führt zu folgendem Ausdruck [18, S. 57]:

$$Q = \left(\frac{C_{1f}}{C_{1f}^{(t)}}\right) : \left(\frac{C_{kf}}{C_{kf}^{(t)}}\right). \tag{14.23}$$

Der Unterschied zwischen (14.22) und (14.23) ist nur in den Fällen beträchtlich, wenn der obere Term k ziemlich tief gelegen ist. Ein derartiger Fall liegt bei den Linien H und K von CaII vor, für die $\chi_{1,k} = 8{,}7$ eV ist.

Wenn wir jetzt annehmen, daß innerhalb der verhältnismäßig dünnen Schicht, in der die beobachtete zentrale Restintensität entsteht, die Größe Q und ferner (siehe weiter oben) die Größen η_ν, ε_ν und $B_\nu(T) \approx B_\nu(T_0)$ konstant sind, so kann man für die Lösung der Gleichung (14.21) die Methode des § 10 benutzen. Man erhält dann an Stelle von (10.5) die Gleichung

$$\frac{1}{4}\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu} = (1 + \varepsilon_\nu \eta_\nu)(J_\nu - \mu_\nu B_\nu), \tag{14.24}$$

mit

$$\mu_\nu = \frac{1 + \eta_\nu \varepsilon_\nu Q}{1 + \eta_\nu \varepsilon_\nu}, \tag{14.25}$$

während man die Gleichung (10.6) unverändert übernehmen kann. Ferner erhalten wir auf Grund der Gleichungen (10.6) und (10.24) mit Rücksicht darauf, daß $\mu_\nu B_\nu = \mu_\nu B_\nu(T_0) = \text{const}$ ist, an Stelle von (10.10) die Gleichung

$$\frac{d^2(J_\nu - \mu_\nu B_\nu)}{d\tau_\nu^2} = q_\nu^2 (J_\nu - \mu_\nu B_\nu) \tag{14.26}$$

und ihre Lösung

$$J_\nu = \mu_\nu B_\nu(T_0) + C_\nu e^{-q_\nu \tau_\nu}. \tag{14.27}$$

Nachdem wir die Konstante C_ν auf die gleiche Weise wie in § 10 bestimmt haben, erhalten wir schließlich für den Strom $H_\nu(0)$ in der Mitte einer starken Linie die Beziehung

$$H_\nu(0) = \frac{4}{3}\frac{1 + \eta_\nu \varepsilon_\nu Q}{1 + \eta_\nu \varepsilon_\nu}\,\frac{q_\nu B_\nu(T_0)}{1 + \eta_\nu + \frac{2}{3} q_\nu}. \tag{14.28}$$

Führen wir ferner durch die Beziehung (14.15) den Strom $H_\nu^0(0)$ ein, so erhalten wir für r_ν

$$r_\nu = \frac{1 + \eta_\nu \varepsilon_\nu Q}{1 + \eta_\nu \varepsilon_\nu}\,\frac{4}{3}\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{1 + \varepsilon_\nu \eta_\nu}}{\sqrt{1 + \eta_\nu} + \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{1 + \varepsilon_\nu \eta_\nu}}\,\frac{B_\nu(T_0)}{B_\nu(T_E)}. \tag{14.29}$$

Wenn wir jetzt beachten, daß für die Mitte einer starken Linie nicht nur $\eta_\nu \gg 1$, sondern auch $\eta_\nu \varepsilon_\nu \gg 1$ ist, wird der erste Faktor in (14.29) gleich Q, und wir erhalten an Stelle von (14.17) die Formel

$$r_\nu \approx 2{,}3\, Q \sqrt{\varepsilon_\nu}\, \frac{B_\nu(T_0)}{B_\nu(T_E)}. \tag{14.30}$$

Somit unterscheidet sich die Formel (14.30) von (14.17) durch den Faktor Q.

Wenn wir uns noch einmal der von uns durchgeführten Berechnung von r_{ν_0} zuwenden, erkennen wir, daß man zur Erklärung des beobachteten Wertes von r_{ν_0} im Falle der D-Linie Na I $Q \approx 2$ und Linie 4227 Å Ca I $Q \approx 4$ setzen müßte. Auf diese Weise kann man durch die Einführung von verhältnismäßig kleinen Werten von Q eine Übereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungen erzielen. Hierbei muß man nur voraussetzen [siehe Formel (14.22)], daß die Dichte der Strahlung, durch die die Atome Na I und Ca I vom ersten Niveau aus ionisiert werden, die Strahlungsdichte bei thermodynamischem Gleichgewicht um einiges übertrifft. Jedoch kann man die zentrale Restintensität der Linien H und K im Sonnenspektrum auf diese Weise nicht erklären. Die Anwendung der Gleichung (14.17) ergibt in diesem Fall für r_{ν_0} einen Wert von der Größenordnung 10^{-4} oder einen noch kleineren, d. h., der aus den Beobachtungen ermittelte Wert von r_{ν_0} ($r_{\nu_0} \approx 0{,}07$–$0{,}08$) übertrifft den theoretischen Wert für r_{ν_0} um mehr als das 700fache. Folglich dürfte Q in diesem Fall nicht kleiner als 700 sein, was überaus unwahrscheinlich ist. Die größte Schwierigkeit ist dabei die, daß sich für die Linien H und K die Größe $\chi_{1,k} = 8{,}7$ eV nur wenig von dem Ionisationspotential für Ca II – $\chi_1 = 11{,}8$ eV – unterscheidet. Daher können sich die beiden Klammern in (14.23) nicht sehr voneinander unterscheiden. Folglich ist für die Linie, bei denen $\chi_{r,k}$ groß ist, die betrachtete Theorie offenbar nicht stichhaltig. Wodurch sind dann aber die beobachteten Werte von r_ν in der Mitte der Linien H und K und in ähnlichen Linien zu erklären? Vor kurzem wurde hier auf eine neue Möglichkeit hingewiesen. W. W. Sobolew zeigte [17], daß die Prozesse der inkohärenten Streuung ebenfalls zu einer merklichen Zunahme von r_{ν_0} führen können. Es ist möglich, daß sich gerade auf diese Weise die anomal große Intensität in der Mitte vieler Absorptionslinien aus dem Sonnenspektrum erklären lassen. Außerdem erklären die Prozesse der inkohärenten Streuung möglicherweise auch die beobachteten Werte für r_{ν_0} der Linien D_1 und D_2 von Na I, der Linie 4227 Å von Ca I usw., ohne daß man den hypothetischen Faktor Q[1]) einzuführen braucht, wenn auch die Fluoreszenzprozesse (bei $Q = 1$) für gewisse Linien im allgemeinen eine wesentliche Rolle spielen werden. Wir weisen noch darauf hin, daß diese Prozesse nicht nur durch die Verringerung der Strahlungsdichte an einer einzigen Stelle des Übergangszyklus entstehen können (in dem betrachteten Fall waren die Übergänge $1 \to k$ eine solche Stelle). Wie im vierten Kapitel, in dem die planetarischen Nebel betrachtet werden, gezeigt wird, entsteht die Fluoreszenz in all den Fällen, in denen der in die Formel (8.4) eingehende Verdünnungsfaktor W kleiner als Eins ist. Dieser Fall ist insbesondere auch in den äußeren Schichten der Sonnen- (Stern-Atmosphäre) verwirklicht, weil dort bekanntlich $W \approx \frac{1}{2}$ ist.

Für das Studium der Fluoreszenzerscheinungen stellt man Stationaritätsgleichungen auf, von denen jede die Anzahl aller in 1 cm³ und in 1 sec vor sich

[1]) Tatsächlich sprechen die Beobachtungen und theoretische Berechnungen dafür, daß es im Bereich der Photoionisation von Na I und Ca I richtiger wäre, die erste Spalte der Tabelle zu benutzen und Q nicht größer als Eins anzunehmen.

gehenden Übergänge auf ein beliebiges vorgegebenes Niveau des betrachteten Atoms der Anzahl der in 1 cm³ und in 1 sec von diesem Niveau ausgehenden Übergänge gleichsetzt. Die Lösung dieser für verschiedene Niveaus angeschriebenen Gleichungen löst gleichzeitig die gestellte Aufgabe.

Die Wirksamkeit der Fluoreszenzprozesse wird sich beim Vorhandensein von Faktoren, die die Ionisation der Atome erhöhen, verstärken. Dies spielt offenbar für die Linien Hα, Hβ,... im Sonnenspektrum eine große Rolle [18, S. 75]. Bei der Durchführung einer quantitativen Analyse ist darauf zu achten, daß der Einfluß der Fluoreszenz in den meisten Fällen durch Auswahlregeln abgeschwächt wird.

Zum Abschluß sei noch folgendes erwähnt: Wir haben gesehen, daß praktisch in allen Fällen $\varepsilon_\nu = \varepsilon \ll 1$ ist. Dies bedeutet aber, daß wir, wenn wir uns nicht sehr weit von der Linienmitte entfernen, es nicht mehr mit $\varepsilon_\nu \eta_\nu \gg 1$, sondern mit der entgegengesetzten Ungleichung $\varepsilon_\nu \eta_\nu \ll 1$ zu tun haben. Folglich könnten wir in Übereinstimmung mit (10.20) und (10.9) für die Übergangsgebiete der Linien und für die Linienflügel den Einfluß von ε_ν vernachlässigen und $\varepsilon_\nu = 0$ setzen.

Obgleich wir in den Flügeln $\varepsilon_\nu \approx 0$ setzen können, entspricht ihre Entstehung bei den starken Linien eher dem Fall des thermodynamischen Gleichgewichtes als der Streuung. Wir werden in § 15 sehen, daß für die Mitte einer starken Linie faktisch in der gesamten Atmosphäre mit Ausnahme ihrer äußersten Bereiche $J_{\nu_0} \approx B_\nu$ ist, und dies bedeutet (siehe wieder § 15), daß die Anregung der Atome entsprechend den Gesetzen des thermodynamischen Gleichgewichtes vor sich geht. Die Summe $(1 - \varepsilon_\nu)\sigma_\nu J_\nu + \sigma_\nu \varepsilon_\nu B_\nu$ aus der Gleichung (9.29) ist gleich $\sigma_\nu B_\nu$, sowohl wenn die Gleichungen $J_\nu = B_\nu$ und $\varepsilon_\nu = 0$ gleichzeitig erfüllt sind, als auch dann, wenn nur die Gleichung $\varepsilon_\nu = 1$ erfüllt ist.

Nach (10.20) und (10.9) können wir in vielen Fällen auch für die schwachen Linien, für die η_ν selbst in der Mitte der Linie klein ist, $\varepsilon_\nu \approx 0$ setzen, wenn natürlich ε_ν nicht in der Nähe von Eins liegt, so daß $\varepsilon_\nu \eta_\nu < 1$ ist. Auf diese Folgerung haben wir uns schon in den vorangehenden Paragraphen berufen. Im allgemeinen muß man jedoch in allen ähnlichen Fällen vorsichtig zu Werke gehen. Insbesondere kann ε_ν für Linien mit kleiner Bindungsenergie $\chi_{r,k}$ und kleiner Übergangswahrscheinlichkeit A_{ki} nach (14.19) und Tabelle 7 näherungsweise gleich Eins werden. In besonderem Maße gilt dies für die heißen Sterne, bei denen die Dichte der ionisierenden Strahlung und damit auch die Koeffizienten C_{kf} groß sind.

Untersuchen wir kurz die Frage nach den zentralen Intensitäten der Absorptionslinien in den Spektren von Sternen eines der Sonne unähnlichen Typs. Beim Übergang von der Sonne zu heißeren Sternen wächst die Strahlungsdichte im fernen ultravioletten Spektralbereich schnell an. Dadurch vergrößert sich der Einfluß der Fluoreszenzprozesse besonders bei den heißen Sternen mit ausgedehnten Atmosphären, bei denen der Verdünnungsfaktor die Ungleichung $W \ll 1$ erfüllen kann. Unter gewissen Bedingungen führt die Fluoreszenz zum Auftreten von hellen Linien. Dieser Fall wird im vierten Kapitel gesondert behandelt.

Die Zunahme der Strahlungsdichte im Ultravioletten beim Übergang zu

heißen Sternen zieht das Anwachsen von C_{kf} und damit das Anwachsen von ε_ν nach sich. Daher kann ε_ν bei hinreichend heißen Sternen selbst für starke Linien mit großem A_{k_1} gleich Eins werden. In diesem Fall bestimmt sich r_{ν_0} nach Formel (14.14). Somit müssen die starken Linien der verschiedensten Elemente, die ungefähr in dem gleichen Spektralbereich liegen (für die erwähnten Sterne), annähernd den gleichen Wert für r_{ν_0} ergeben. Diese Behauptung ist durch Beobachtungen bestätigt worden [19, S. 67]. Aus der Intensität der erwähnten Linien in ihrer Mitte kann man die Oberflächentemperatur T_0 berechnen.

Abschließend bemerken wir, daß die Erhöhung der kinetischen Temperatur in den äußeren Schichten der Atmosphäre gewisser Sterntypen ein zusätzlicher Faktor für die Vergrößerung von r_{ν_0} sein kann [20, S. 114–115].

§ 15. Methoden zur Untersuchung der chemischen Zusammensetzung der Sterne und ihre Ergebnisse

1. Die Anwendung der elementaren Theorie der Wachstumskurven auf die Untersuchung der chemischen Zusammensetzung der Sterne. Die mittlere Elektronenkonzentration

Die Frage nach der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphären und der Himmelskörper überhaupt ist von großer kosmogonischer Bedeutung. Aus dem Vergleich der Zusammensetzung der verschiedenen kosmischen Gebilde können wir zahlreiche Schlußfolgerungen über die Entwicklung des uns umgebenden Weltalls ziehen. Im Hinblick hierauf ist der Frage nach der chemischen Zusammensetzung der Himmelskörper stets größte Beachtung geschenkt worden. Die Erforschung der chemischen Zusammensetzung gilt als eine der wichtigsten Aufgaben der Theorie der Sternatmosphären.

Wir weisen darauf hin, daß der Ableitung einer hinreichend genauen chemischen Zusammensetzung eine genäherte Festlegung einer gewissen chemischen „Ausgangszusammensetzung“ vorangeht, weil der physikalische Zustand der Materie in einer Sternatmosphäre selbst von der chemischen Zusammensetzung abhängt. Gleichzeitig beide Aufgaben – die Aufgabe des Aufbaus der Sternatmosphäre und die Aufgabe der Ermittlung der chemischen Zusammensetzung der Atmosphäre – zu lösen, ist außerordentlich schwierig. Daher werden wir das Verfahren der sukzessiven Approximation anwenden. Jeder Fortschritt in der Lösung der Aufgabe der chemischen Zusammensetzung der Atmosphäre verbessert unsere Kenntnisse über ihren physikalischen Aufbau und gibt wiederum die Möglichkeit, die Daten über die chemische Zusammensetzung zu verbessern.

Gegenwärtig beschreitet man bei der Erforschung der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphären zwei Wege. Der erste gründet sich auf die Anwendung der elementaren Theorie der Wachstumskurven und der zweite auf das Studium der Linienkonturen der verschiedenen Elemente, das nach den

in § 13 angestellten Überlegungen genauer ist. Die zweite Methode kann ebenfalls voraussetzen, daß man Wachstumskurven – jedoch auf genauerer Grundlage – ableitet.

Angesichts der in § 12 festgestellten Unvollkommenheit der gegenwärtigen Theorie der Wachstumskurven muß man die zweite Methode für beträchtlich genauer als die erste halten. Bisher hat jedoch die erste Methode aus zahlreichen Gründen eine größere Anwendung gefunden. Die zweite Methode wurde zunächst hauptsächlich bei der Bestimmung der chemischen Zusammensetzung der Sonne angewandt.

Wir haben schon in § 12 allgemeine Überlegungen angestellt, die mit der Bestimmung der chemischen Zusammensetzung aus den Wachstumskurven in Zusammenhang stehen. Aus den Beobachtungen findet man nämlich die Größen L der Gleichung (12.37) und aus der Gleichung (12.38) die Zahl N_r. Um die Zahl aller Atome eines vorgegebenen Elementes über 1 cm² zu ermitteln, muß man alle Ionisationsstufen berücksichtigen, d. h. die Summe $\sum_r N_r$ bestimmen. Dies kann man folgendermaßen ausführen: Wenn von den hauptsächlichen Ionisationsstufen des vorgegebenen Stoffes in dem betrachteten Spektralbereich Absorptionslinien vorhanden sind, erhält man $\sum_r N_r$ durch Addition der Größen N_r, die man unmittelbar aus der Wachstumskurve bestimmt hat.

Wenn dagegen irgendeine Ionisationsstufe r, in dem sich eine beträchtliche Anzahl von Atomen befindet, nicht durch beobachtete Linien vertreten ist, kann man die Zahl N_r mit Hilfe der SAHAschen Formel (5.11) aus der Zahl N_{r-1} oder N_{r+1} (je nachdem, welche bekannt ist) bestimmen. Es müssen dabei die Temperatur T und der Elektronendruck p_e bekannt sein.

Hierbei sind T und p_e gewisse Mittelwerte für die gesamte Atmosphäre, was natürlich sofort eine Unsicherheit hervorruft. Insbesondere ist es zur Zeit noch nicht geklärt, ob die effektive Temperatur T_e des Sternes in die SAHAsche Formel einzuführen ist oder ob man eine geeignete Temperatur gesondert bestimmen muß. Man kann diese insbesondere wie folgt ermitteln: Wenn wir für zwei beliebige Elemente aus der Wachstumskurve das Verhältnis der Zahlen N_r für zwei aufeinanderfolgende Ionisationsstufen bestimmt haben (z. B. $N_r : N_{r-1}$ und $N_{s+1} : N_s$), erhalten wir, nachdem wir die SAHAsche Formel für das eine und das andere Element aufgestellt haben, zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten T und p_e. Diese Methode führt jedoch häufig zu verschiedenen Werten T und p_e (wenn man nicht nur ein Elementepaar, sondern mehrere Paare benutzt). Daher sind die aus den verschiedenen Elementepaaren bestimmten Werte von T und p_e zu mitteln. Dies ist an sich keine befriedigende Methode und spiegelt nur die Unvollkommenheit der gegenwärtigen Theorie der Wachstumskurven wider.

Wenn wir in der SAHAschen Formel für T einen bestimmten Wert, z. B. T_e, einsetzen, können wir aus den Elementen, für die das Verhältnis der Anzahl der Atome in zwei aufeinanderfolgenden Ionisationsstufen bekannt ist, p_e bestimmen. Auch hier erhält man gewöhnlich für verschiedene Elemente verschie-

dene Werte von p_e (bisweilen erreicht die Differenz ein bis zwei Größenordnungen), so daß man wieder auf das Verfahren des Mittelns zurückgreifen muß. Dies kennzeichnet ebenfalls die Unvollkommenheit der benutzten Methode.

Neuerdings wird eine andere Methode zur Bestimmung von p_e benutzt. Es ist bekannt, daß z. B. die Linien der Balmer-Serie in den Sternspektren vor der theoretischen Seriengrenze (bei $\lambda = 3646$ Å) zusammenfließen. Somit vollzieht sich der Übergang von den Linien zum Kontinuum in den Spektren der A 0-Sterne etwa bei $\lambda = 3700$ Å, so daß das Kontinuum bei dieser Wellenlänge und nicht bei $\lambda = 3646$ Å beginnt.

Die Ursache für dieses verfrühte Zusammenfließen der Linien vor der Seriengrenze ist die Verbreiterung der Linien durch Druckeffekte. Aus entsprechenden Untersuchungen geht hervor, daß hierbei die Verbreiterung der höchsten Niveaus durch elektrische Felder (statistische Verbreiterung) die Hauptrolle spielt. Wir erinnern daran (siehe Tabelle 6), daß die Aufspaltung der Niveaus mit zunehmender Hauptquantenzahl anwächst, so daß von einer gewissen Zahl an die Linien zusammenfließen werden. Ein derartiges Zusammenfließen beginnt gewöhnlich bei den Linien der Serie, für die die Bindungsenergie der entsprechenden Niveaus gering ist. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für die Rückkehr eines Elektrons von diesen Niveaus auf das Ausgangsniveau praktisch gleich Null. Dagegen besteht eine weit größere Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Elektronen von diesen Niveaus aus abgetrennt, d. h. die Atome ionisiert werden. Diese Ionisation kann zweifacher Natur sein:

1. eine Ionisation durch Strahlung,
2. eine Ionisation durch interatomare elektrische Felder, die die Niveaus verbreitern (siehe § 8).

In beiden Fällen sind die Prozesse, durch die die Linien der Serie entstehen, auf die wahre Absorption zurückzuführen. Andererseits wird die Schwächung der Strahlung in den Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums ebenfalls durch die Prozesse der wahren Absorption bewirkt. Im Hinblick hierauf ist der Bereich, in dem die Absorptionslinien verschmelzen, in jeder Beziehung einem gewöhnlichen Abschnitt aus dem kontinuierlichen Spektrum jenseits der Seriengrenze äquivalent.

Aus den beiden angeführten Gründen spielt in der Regel die zweite Form der Ionisation die Hauptrolle. Daher bedarf es keiner weiteren Erklärung, daß das durch den Druckeffekt bewirkte Verschmelzen und Verschwinden der Linien in der Serie von der Konzentration der geladenen Teilchen in der Atmosphäre abhängt. Je größer die Anzahl dieser Teilchen in 1 cm³ ist, um so geringer wird die Anzahl der getrennten Linien in der vorgegebenen Serie sein. Daher ist die Anzahl der getrennten Linien in einer Serie ein Maß für die Elektronenkonzentration n_e und folglich auch für den Elektronendruck p_e.

Es sei m die Hauptquantenzahl der letzten getrennten Linie in einer Serie. Dann ist die Zahl n der geladenen Teilchen in 1 cm³ durch folgenden theoretischen Ausdruck gegeben:

$$\lg n = 23{,}26 - 7{,}5 \lg m . \tag{15.1}$$

Hierbei gibt die in die Formel (15.1) eingehende Zahl n nur die geladenen Teilchen an, die ein Verschmelzen der Linien in der Serie hervorrufen. Es zeigt sich, daß die Zahl n für Temperaturen, die kleiner als $10^5/m$ sind, sowohl Ionen als auch Elektronen umfaßt, so daß in (15.1) $n = 2\,n_e$ zu setzen ist. Bei höheren Temperaturen sind nur die Ionen zu berücksichtigen, und da ihre Anzahl gleich der Anzahl der Elektronen ist, hat man in diesem Fall in (15.1) $n = n_e$ zu setzen. In Wirklichkeit ist aber auch hier der Einfluß der Elektronen nicht verschwindend klein.[1]) Die im allgemeinen angewandte Methode zur Bestimmung von n_e ist ein Näherungsverfahren und gibt nur die Größenordnung der gesuchten Größen an. Aus diesem Grunde sind Fehler von 20–50% nicht als groß zu betrachten.

Laboratoriumsuntersuchungen bestätigen die Formel (15.1), wenn man eine kleine Korrektion vornimmt, nämlich das erste Glied der rechten Seite von (15.1) um 0,10 vergrößert.

Die Formel (15.1) ist nicht nur auf den Wasserstoff, sondern auch auf die Alkalimetalle anwendbar. In diesem Fall sind die effektiven Hauptquantenzahlen zu benutzen.

Wie wir soeben erwähnt haben, ist die Formel (15.1) ein Näherungsausdruck und gibt nur die Größenordnung an. Es gibt zahlreiche Faktoren, die den (fiktiven) Wert von n_e vergrößern. Die Hauptfaktoren sind erstens das ungenügende Auflösungsvermögen des Spektrographen und zweitens der DOPPLER-Effekt in Verbindung mit den thermischen Bewegungen, der Turbulenz, der Rotation usw. Weil der Absorptionskoeffizient an der Seriengrenze groß ist, bestimmen wir andererseits n_e für verhältnismäßig weit außen liegende Schichten der Sternatmosphäre. Daher sind die auf die beschriebene Weise gefundenen n_e um einen gewissen Betrag zu klein. Überhaupt eignet sich die betrachtete Methode besser für Emissionslinien.

Eine dritte Methode zur Bestimmung mittlerer Werte von p_e gründet sich auf die Durchrechnung der Modelle für die Sternphotosphären in Übereinstimmung mit den in § 7 dargestellten allgemeinen Methoden. Allerdings erhält man hierbei keine Mittelwerte für p_e, sondern die Abhängigkeit p_e von der Tiefe. Aus diesen Angaben können wir jedoch Mittelwerte von p_e bestimmen, wenn wir näherungsweise das effektive Niveau kennen, in dem die Absorptionslinien entstehen.

Als Beispiel bringen wir die Tabelle 8, die eine Zusammenstellung der ermittelten Werte von p_e für Sterne von verschiedenem Typ und mit verschiedener Leuchtkraft enthält. Für einige Sterne und speziell für die Sonne liegen mehrere Bestimmungen vor. Die Wiedergabe dieser unabhängig voneinander bestimmten Werte ist aus dem Grunde von Wichtigkeit, weil sie einen Vergleich der mit Hilfe verschiedener Methoden gewonnenen p_e gestattet.

Die wichtigste Gesetzmäßigkeit, die beim Studium der Tabelle auffällt, ist die Verringerung von p_e mit abnehmendem T_e, was natürlich auf die allgemeine Abnahme der Ionisation der Atome zurückzuführen ist.

---

[1]) Bei $T > 10^5/m$ führt das Vorhandensein von Elektronen zu einer Verstärkung der Stoßdämpfung.

Wir kehren zu der Frage nach der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphären zurück. Wenn wir nach irgendeiner Methode den Elektronendruck p_e bestimmt haben, können wir nach unseren obigen Ausführungen alle Ionisationsstufen des vorgegebenen Elementes berücksichtigen und $N = \sum_r N_r$ für das untersuchte Element ermitteln. Aus dem Vergleich der N-Werte für die verschiedenen Elemente findet man die relative chemische Zusammensetzung

Tabelle 8

Stern	Typ	p_e, bar	Stern	Typ	p_e, bar
α Ori	cM 2	$5{,}1 \cdot 10^{-7}$	70 OphA	dK 0	1,2
α Sco	cM 1	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$	Sonne	dG 3	18; 46; 17; 31
α Boo	gK 0	0,004 0,003	θ Cyg	F 5	12
π Cep	G 5	3,5	α CMi	dF 3	160; 86
α Aur	G 0	3,4; 0,05	α CMaj	dA 2	950; 120
γ Cyg	cF 8	0,5	γ Gem	dA 2	120
δ Cep	cF 5	1,2; 2,0	τ Sco	dB 0	1200
α Per	cF 4	7,4; 4,2	φ' Ori	B 0	630
α Car	gF 0	10	10 Lac	O 8,5	630

(Häufigkeit) der Elemente der Sonnen- bzw. Sternatmosphäre, d. h. die Größen a_s und α_s [siehe (5.1)–(5.4)].

Wenn die Oszillatorstärke und die durch die Formel (12.39) definierten theoretischen Intensitäten nicht bekannt sind, können wir die in § 12 eingeführten „Sonnenintensitäten" benutzen. Zu diesem Zweck wenden wir am einfachsten die Formel (12.40) an, von der wir schon bei der Bestimmung von $(T_\Delta)_{\text{St}}$ Gebrauch gemacht haben. Bestimmen wir nach den Ausführungen des § 12 die Differenz $\Delta = (\lg X_0)_{\text{St}} - (\lg X_0)_\odot$ für verschiedene Linien und geben wir die Abhängigkeit zwischen ε_i und Δ an, so finden wir

$$\Delta = \lg \frac{(N_r)_{\text{St}}\,(u_r)_\odot}{(N_r)_\odot\,(u_r)_{\text{St}}} - \lg \frac{(v_0)_{\text{St}}}{(v_0)_\odot} \qquad (15.1')$$

für den Punkt, wo $\varepsilon_i = 0$ ist.

Aus den abgeleiteten Wachstumskurven bestimmen wir $(v_0)_{\text{St}}$ und $(v_0)_\odot$ und ermitteln aus dem gewonnenen $\Delta(\varepsilon_i = 0)$ das Verhältnis $(N_r)_{\text{St}} : (N_r)_\odot$. Auf diese Weise kann man die chemische Zusammensetzung einer Sternatmosphäre im Verhältnis zur chemischen Zusammensetzung der Sonnenatmosphäre ermitteln. Natürlich sind auch in diesem Fall alle Ionisationsstufen zu berücksichtigen, d.h., man darf erst die endgültigen Summen $\sum_r N_r$ vergleichen.

Das eben angegebene Verfahren kann man auch auf den Vergleich der chemischen Zusammensetzung zweier Sterne von benachbartem Spektraltyp an-

wenden. Diesbezügliche Untersuchungen wurden von O. A. MELNIKOW in Pulkowo angestellt (siehe § 12, Abschnitt 5).

Wir weisen darauf hin, daß man bei der Ermittlung von N nicht unbedingt von den Formeln (12.37) und (12.38) auszugehen braucht. Wenn uns eine genügend große Anzahl von Multipletts für die Konstruktion einer graphischen Darstellung vom Typ der Abb. 34 zur Verfügung steht, können wir $N_{r,i}$ unmittelbar aus der Wachstumskurve bestimmen. Hierbei benutzen wir zur Überführung von $N_{r,i}$ in N_r die BOLTZMANNsche Formel (5.54).

Im Zusammenhang mit der betrachteten Methode zur Untersuchung der chemischen Zusammensetzung bemerken wir, daß sie offenbar die Richtigkeit des BOLTZMANNschen Gesetzes voraussetzt. Von der Richtigkeit dieses Gesetzes für nicht sehr große ε_i bis 5 eV kann man sich mit Hilfe einer der Abb. 34 analogen graphischen Darstellung überzeugen. Hierbei kann man die Temperatur T_A unmittelbar aus den Beobachtungen, und zwar aus der Neigung der Geraden in Abb. 34, bestimmen. Bei größeren ε_i als 4–5 eV ist die Möglichkeit der Anwendung des BOLTZMANNschen Gesetzes in Sternatmosphären bei weitem nicht evident. Aus diesem Grunde kann in dem Fall, daß die beobachteten Linien des betrachteten Elementes Übergängen mit sehr hohen Energieniveaus ($\varepsilon_i > 5$ eV) entsprechen, die Anwendung der dargestellten Methode zu Fehlern führen. Zu diesen Linien gehören insbesondere die Linien von H, He, C, N, O, Si, S und andere, vor allem aber die Linien der ionisierten Elemente. Endlich fehlen die Absorptionslinien von He im allgemeinen in den Spektren der Sterne mit niedriger Temperatur, einschließlich der Sonne. Alle diese Fälle müssen gesondert behandelt werden. So kann man z. B. in den Atmosphären der Sterne später Klassen, unter Einbeziehung der Sonne, die relative Häufigkeit von H, C, N und O aus dem Studium der Molekülbanden der Verbindungen CN, C_2, OH, NH und CH bestimmen. Ferner wurden in jüngster Zeit im Sonnenspektrum sehr schwache verbotene Sauerstofflinien entdeckt, die Übergängen mit niedrigen Energieniveaus des Sauerstoffatoms entsprechen. Folglich kann die Anwendung der BOLTZMANNschen Formel in diesem Fall keine großen Fehler verursachen. Später werden wir andere Methoden zur Bestimmung der Häufigkeit des Wasserstoffs kennenlernen. Die Häufigkeit des Heliums setzt man in den Atmosphären der Sterne mit niedriger Temperatur gewöhnlich gleich der Häufigkeit des Heliums in der Sonnenphotosphäre, in der man sie für die Chromosphäre und die Protuberanzen bestimmt. Hierbei nimmt man an, daß die chemische Zusammensetzung der Chromosphäre und der Protuberanzen die gleiche ist wie die Zusammensetzung der tieferen Schichten der Sonnenphotosphäre (siehe §§ 20 und 21).

2. Die Verteilung der Atome auf die Anregungszustände

Aus unseren Ausführungen folgt, daß die Hypothese über die BOLTZMANNsche Verteilung bei dem Problem der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphären eine große Rolle spielt. Daher müssen wir uns etwas näher mit ihr beschäftigen. Teilweise kann man sie mit Hilfe solcher graphischer Dar-

stellungen wie in Abb. 34 nachprüfen. Die Linearität der Abhängigkeit zwischen ε_i und $\lg \frac{N}{g_i}$ scheint für die Anwendbarkeit des BOLTZMANNSchen Gesetzes auf die Sternatmosphäre zu sprechen. Doch selbst in diesem Fall bestehen Unklarheiten. Die in § 12 behandelte merkliche Differenz zwischen den ermittelten Werten T_A und T_e hat bis heute noch keine Erklärung gefunden.

Welches sind die Voraussetzungen der Theorie in dem vorliegenden Fall? In erster Linie ist hier auf folgende gemeinsame Eigenschaft der Ionisations- und der Anregungsprozesse in den Sternatmosphären hinzuweisen. Beide Prozesse werden nämlich praktisch durch das Strahlungsfeld und nicht durch Stöße zwischen den Teilchen bestimmt. (Für die Anregungsprozesse kann man dies leicht mit Hilfe von analogen Rechnungen nachweisen, wie wir sie in § 8 für die Ionisationsprozesse durchgeführt haben.) Die Materiedichte in den Sternatmosphären ist zu gering, als daß die Anregung durch Stöße wirksam genug werden könnte. Dann ist aber die Hauptbedingung für die Richtigkeit der BOLTZMANNschen Formel, daß das Feld der anregenden Strahlung mit dem Strahlungsfeld im thermodynamischen Gleichgewicht identisch ist. Mit anderen Worten, in einem vorgegebenen Punkt muß J_ν der PLANCKschen Funktion $B_\nu(T)$ in diesem Punkt gleich sein. Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend für die Existenz der BOLTZMANNschen Verteilung, natürlich bei Abwesenheit äußerer störender Einflüsse (z. B. eines starken elektrischen Feldes).

Wir untersuchen, wie diese Bedingung in den Sternatmosphären erfüllt ist. Da wir nur die allgemeinen Prinzipien erkennen wollen, können wir das im Abschnitt 2 des § 10 betrachtete Modell, d. h. das Modell mit einer linearen Entwicklung der Funktion B_ν, benutzen.

Auf Grund von (10.11), (10.17) und (8.10) können wir

$$J_\nu = B_\nu + \frac{\frac{2}{3} b_\nu - B_\nu(T_0)(1+\eta_\nu)}{\frac{2}{3}\sqrt{3(1+\eta_\nu)(1+\varepsilon_\nu\eta_\nu)} + 1 + \eta_\nu} e^{-\sqrt{3(1+\eta_\nu)(1+\varepsilon_\nu\eta_\nu)}\,\tau_\nu} \quad (15.2)$$

schreiben.

Nach (3.6) ist die Anzahl der in 1 sec von n_i Atomen unter der Einwirkung eines Strahlungsfeldes J_ν vollzogenen Übergänge $n_{i\to k}$ gleich

$$n_{i\to k} = 4\pi n_i \int J_\nu \frac{\sigma_\nu}{h\nu} d\nu \approx \frac{4\pi}{h\nu} n_i \int J_\nu \sigma_\nu d\nu, \quad (15.3)$$

wobei die Integration über die ganze dem Übergang $i \to k$ entsprechende Linie zu erstrecken ist.

Wenn wir in (15.3) den Ausdruck (15.2) einführen und die Formel (11.39) für den selektiven Absorptionskoeffizienten benutzen, können wir die Abhängigkeit des Produktes $J_\nu\sigma_\nu$ von der Frequenz innerhalb des Spektralbereiches, den die Linie einnimmt, darstellen und damit entscheiden, welche Bereiche der Linie die Anregung des Atoms am stärksten beeinflussen. Entsprechende für

verschiedene ε_ν, $\varkappa_\nu$ usw. durchgeführte Rechnungen haben ergeben, daß die zentralen Bereiche der Linien den größten Einfluß besitzen, weil der Absorptionskoeffizient nach (11.39) in der Linienmitte ein scharfes Maximum besitzt (DOPPLER-Kern). Auf diese Weise brauchen wir beim Studium der Abweichungen der Größe J_ν von B_ν nur die unmittelbar in der Mitte gelegenen Teile der Absorptionslinien zu berücksichtigen.

Zur Bestimmung der Differenz $J_\nu - B_\nu$ betrachten wir eine hinreichend starke Linie, in deren Mitte $\eta_{\nu_0} \gg 1$ ist. Außerdem nehmen wir zunächst an (was oft erfüllt ist), daß $\varepsilon_\nu \ll 1$ und $\varepsilon_\nu \eta_{\nu_0} \ll 1$ ist. In diesem Fall schreibt sich die Gleichung (15.2) für die Linienmitte folgendermaßen (über b_ν siehe § 8):

$$J_{\nu_0} \approx B_\nu(T) - B_\nu(T_0)\, e^{-\sqrt{3\eta_{\nu_0}}\,\tau_\nu}\,. \tag{15.4}$$

Aus (15.4) folgt, daß an der äußersten Grenze der Atmosphäre, wo $\tau_\nu = 0$ und $T = T_0$, $J_{\nu_0} \approx 0$ ist. Dieses Resultat, mit dem wir schon im vorangehenden Paragraphen bekannt geworden sind, spricht dafür, daß die theoretische zentrale Restintensität der starken Linien für $\varepsilon_\nu \ll 1$ praktisch gleich Null ist. Somit entspricht die anregende Strahlung an der Grenze der Sternatmosphäre nicht der Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht. Wenn wir jedoch ein wenig in die Atmosphäre eindringen, etwa um $\tau_\nu \approx 0{,}1$, wird der Exponent in (15.4) beträchtlich größer als Eins. Wenn z. B. $\eta_{\nu_0} = 10^4$ ist, erhalten wir $\sqrt{3\eta_{\nu_0}}\,\tau_\nu \approx 17$ für $\tau_\nu = 0{,}1$, wobei $e^{-17} \approx 4 \cdot 10^{-8}$ ist. Selbst bei $\tau_\nu = 0{,}02$ ist $e^{-\sqrt{3\eta_{\nu_0}}\,\tau_\nu} \approx 0{,}03$. Mit anderen Worten, es ist zu erwarten, daß in der gesamten Sternatmosphäre die Näherung $J_{\nu_0} \approx B_\nu(T)$ gültig ist, wobei T die lokale Temperatur ist. Lassen wir nun die Voraussetzungen $\varepsilon_\nu \ll 1$ und $\varepsilon_\nu \eta_{\nu_0} \ll 1$ fallen, so tritt die Annäherung an den Gleichgewichtszustand noch früher ein, weil sich bei $\varepsilon_\nu \to 1$ die vorliegenden Bedingungen immer mehr den Bedingungen des thermodynamischen Gleichgewichtes annähern. Tatsächlich gilt im Falle $\varepsilon_\nu = 1$, doch wiederum bei $\eta_{\nu_0} \gg 1$ an Stelle von (15.4),

$$J_{\nu_0} \approx B_\nu(T) - \frac{B_\nu(T_0)}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}}\, e^{-\sqrt{3}\,\eta_{\nu_0}\tau_\nu}\,. \tag{15.5}$$

Insbesondere finden wir für die Grenze der Atmosphäre, wo $\tau_\nu = 0$ und $T = T_0$ ist, $J_{\nu_0} \approx \frac{1}{2} B_\nu(T_0)$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist dem Verdünnungsfaktor an der Grenze äquivalent.[1] Durch das Auftreten von η_{ν_0} vor τ_ν im Exponenten (an Stelle von $\sqrt{\eta_{\nu_0}}$) vollzieht sich der Übergang zum thermodynamischen Gleichgewicht noch schneller.

Auf diese Weise können wir für die starken Linien und in etwas geringerem Maße für die mittleren Linien erwarten, daß praktisch in der gesamten Stern-

---

[1]) Die geringe Abweichung des Ausdruckes $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ von 1 ist auf die Ungenauigkeit der bei der Ableitung von (15.2) benutzten Methode zurückzuführen.

atmosphäre die BOLTZMANNsche Formel – natürlich auf jedem Niveau mit der Temperatur, die diesem Niveau entspricht – anwendbar ist.

Bei schwachen Linien ist $\eta_{\nu_0} < 1$ oder $\eta_{\nu_0} \ll 1$, d.h., das Strahlungsfeld ist näherungsweise gleich demjenigen, wie es beim Fehlen von Absorptionslinien auftritt. Es liegt auf der Hand, daß unter diesen Bedingungen die Abweichung der Größe J_{ν_0} von $B_\nu(T)$ in der Hauptsache durch das Auftreten des Gradienten dB_ν/dT bestimmt wird.

Was die Beobachtungen anbelangt, so vermitteln sie uns die Vorstellung von einem gewissen für die gesamte Sternatmosphäre gültigen mittleren Anregungszustand. Daß man hierbei gewöhnlich (bis $\varepsilon_i < 5$ eV) eine lineare Abhängigkeit zwischen $\lg \frac{N_i}{g_i}$ und ε_i erhält, spricht dafür, daß sich in diesem Fall die Anregungsbedingungen nicht weit von den Bedingungen des thermodynamischen Gleichgewichtes entfernen. Dieser Umstand ist ohne Zweifel darauf zurückzuführen, daß in dem beobachteten Spektralbereich der Gradient $dB_\nu/d\tau_\nu$ in den Atmosphären der gewöhnlichen Sterne und der Sonne verhältnismäßig klein ist, wie auch aus den theoretischen Rechnungen folgt. Dagegen muß man bei großen ε_i äußerste Vorsicht walten lassen, weil diese ε_i den fernen ultravioletten Spektralbereichen entsprechen, in denen der Gradient $dB_\nu/d\tau_\nu$ in zahlreichen Fällen sehr groß ist. Endlich dürfen wir die bisher noch ungeklärte Tatsache nicht vergessen, daß sich aus den Beobachtungen $T_A < T_e$ ergibt, d. h., daß die mittlere Anregungstemperatur kleiner ausfällt als die effektive Temperatur. Insbesondere ergibt sich aus Berechnungen, daß die Anwendung der Formel (15.2) die fragliche Ungleichung nicht zu erklären vermag. Gewöhnlich erhält man entweder die Gleichung $T_A \approx T_e$ oder die Ungleichung $T_A > T_e$.

In der Regel liefern die Beobachtungen eine graphische Darstellung, die der in Abb. 34 dargestellten ähnlich ist. In zahlreichen Fällen ergeben sich jedoch Abweichungen von der Linearität. Insbesondere beobachtet man diese Abweichungen bei den kühlen roten Riesen vom Typ α Bootis. Es zeigt sich, daß in den Atmosphären dieser Sterne die Anzahl der Atome, die sich in hohen Quantenzuständen befinden, beträchtlich größer ist, als aus den Bedingungen des thermodynamischen Gleichgewichtes folgen würde. Somit liegt hier ein Verstoß gegen die BOLTZMANNsche Verteilung vor. Gewisse Linien von Fe I im infraroten Spektralbereich der Sonne, z. B. die Linien, deren unterer Term e^5D ist, deuten ebenfalls auf eine Abweichung von der BOLTZMANNschen Verteilung hin. Die Ursache aller dieser Abweichungen ist bis jetzt noch unbekannt.

3. Verbesserte Methoden zur Untersuchung der chemischen Zusammensetzung der Sterne. Die schwachen Linien

Die Methoden zur Untersuchung der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphäre, die sich auf die Anwendung der elementaren Theorie der Wachstumskurven stützen, sind mit einer großen Zahl von Mängeln behaftet, die hauptsächlich auf die schematisierenden Voraussetzungen der Theorie

zurückzuführen sind (siehe § 12). Die wichtigste von ihnen ist die, daß wir in der erwähnten Theorie das überaus unvollkommene Modell einer streuenden „umkehrenden Schicht" über einer „Photosphäre" benutzt haben, wobei wir die Dicke dieser Schicht für alle Linien als gleich annahmen. Dagegen ist diese „Dicke" und folglich auch die gefundene „Anzahl der absorbierenden Atome über der Photosphäre" mit der Wellenlänge veränderlich, da sich der kontinuierliche Absorptionskoeffizient mit der Wellenlänge ändert. Darüber hinaus zeigen direkte Untersuchungen, daß die erwähnte „Dicke der Photosphäre" für Linien mit verschiedenem Anregungs- und Ionisationspotential verschieden ist.

Die zweite Methode zur Untersuchung der chemischen Zusammensetzung geht auf das Modell zurück, das die Streuung und die wahre Absorption der Strahlung (die allgemeine und die selektive) berücksichtigt. Diesem Fall liegen die Strömungsgleichungen (9.29), (9.32) und (10.2) zugrunde.

Die allgemeinen Prinzipien der zweiten Methode zur Untersuchung der chemischen Zusammensetzung sind die folgenden: Wenn wir eine gewisse vorläufige chemische Zusammensetzung annehmen, die wir etwa durch Anwendung der ersten Methode erhalten, finden wir unter Benutzung der Methode des § 7 (für die Sterne) bzw. der Methode des § 17 (für die Sonne) für jeden Punkt der Sternatmosphäre die Werte p, p_e, ϱ, T, $\varkappa_\nu$, τ_ν usw. Hierauf leiten wir unter Verwendung der zu Beginn des § 13 dargestellten allgemeinen Methode einen Ausdruck für η_ν ab. Dabei muß η_ν eine Funktion [siehe (13.18)] der Häufigkeit a_s des vorgegebenen Elementes und der übrigen Parameter p, p_e, ϱ, T usw. sein.

Wir geben nun für a_s einige Werte vor, die in der Nähe des erwarteten liegen (wir sehen a_s in der gesamten Atmosphäre als konstant an), integrieren (siehe § 13) die entsprechende Strömungsgleichung und leiten für jeden der vorgegebenen Werte a_s die Kontur der betrachteten Linie ab. Aus dem Vergleich dieser theoretischen Konturen mit der aus der Beobachtung ermittelten Kontur der betrachteten Linie finden wir das gesuchte a_s. Hierbei kann man sowohl den Vergleich der Konturen selbst als auch der Gesamtabsorption durchführen. Zu diesem Zweck muß man vorher die Äquivalentbreite W_λ für die Gesamtheit der theoretischen Konturen ausrechnen.

Nachdem wir für alle Elemente die Häufigkeit, d. h. a_s, bestimmt haben, können wir von neuem den Aufbau der Photosphäre berechnen.

Für eine genauere Berechnung von a_s empfiehlt es sich, die Methoden der Wachstumskurven heranzuziehen. Dies kann man folgendermaßen bewerkstelligen: Wir betrachten die Gesamtheit aller Linien, die von einem beliebigen unteren Niveau i ausgehen; die Oszillatorstärken f_{ik} seien für alle Linien bekannt. Dann können wir nach Vorgabe eines beliebigen Wertes für a_s, der in der Nähe des erwarteten liegt, im Einklang mit unseren eben durchgeführten Überlegungen für jede betrachtete Linie eine Kontur ableiten und die Gesamtabsorption ausrechnen. Hieraus erhalten wir die theoretische Abhängigkeit zwischen f_{ik} und W_λ. In einem Diagramm tragen wir hierauf auf der Abszissenachse $\lg f_{ik}$ und auf der Ordinatenachse $\lg (W_\lambda/\lambda)$ für die zugehörigen Linien auf und zeichnen einen Abschnitt der theoretischen Wachstumskurve. In dieselbe graphische Darstellung tragen wir die Abhängigkeit zwischen denselben Werten von $\lg f_{ik}$ und $\lg W_\lambda/\lambda$ der entsprechenden Linien auf, die unmittelbar

aus den Beobachtungen gewonnen wurden. Wenn die angenommenen Werte a_s richtig wären, würden die beiden aufgetragenen Wachstumskurven zusammenfallen. Dies ist aber im allgemeinen nicht der Fall. Die theoretische Wachstumskurve erscheint gegen die aus den Beobachtungen gewonnene Wachstumskurve (in Richtung der Abszissenachse) etwas verschoben. Aus der bestmöglichen Übereinstimmung beider Kurven bestimmen wir dann die Korrektion $\Delta \lg a_s$. Fügen wir diese zu dem vorher angenommenen Wert $\lg a_s$ hinzu, so erhalten wir einen verbesserten Wert für a_s.

Im Hinblick auf unsere Ausführungen sind folgende Bemerkungen am Platze:

1. Da a_s die Häufigkeit eines vorgegebenen Elementes im Verhältnis zum Wasserstoff angibt, können wir, nachdem wir a_s für alle Elemente, deren Häufigkeit hinreichend groß ist, ermittelt haben, auch die prozentuale Häufigkeit des Wasserstoffs berechnen.

2. Wenn T_e und g unbekannt sind, müssen wir zur Berechnung des Aufbaues der Atmosphäre vorläufige Werte für sie ermitteln. T_e kann man unter Benutzung der Skala der effektiven Temperaturen (oder mit Hilfe der in § 16 dargestellten Methoden) bestimmen; g kann man entweder so, wie in § 13 angegeben (Vergleich der theoretischen und der beobachteten Konturen von $H\gamma$ und $H\delta$), oder unter Benutzung der auf irgendeine Weise bestimmten Masse (z. B. aus der Masse-Leuchtkraft-Beziehung) und des Radius ermitteln. (Dies läßt sich am sichersten für die Bedeckungsveränderlichen mit getrennten Spektren der Komponenten ausführen.)

Bei der zweiten Methode zur Untersuchung der chemischen Zusammensetzung ergeben sich zwei Möglichkeiten, die wir so unterscheiden: erstens die Verwendung starker und mittlerer Linien und zweitens schwacher und sehr schwacher Linien. Die Untersuchung der beiden Fälle zeigt, daß bei dem Problem der chemischen Zusammensetzung die Benutzung der schwachen und sehr schwachen Linien gegenüber den starken und mittleren Linien oft große Vorzüge aufzuweisen hat. Diese Vorzüge sind im wesentlichen die folgenden:

1. Im Gegensatz zu den starken Linien hängt die Intensität der schwachen Linien nicht von der bis jetzt nur ungenau bestimmten Dämpfungskonstante γ_c ab, die überdies noch mit der Tiefe in der Sternatmosphäre veränderlich ist.

2. Die zentralen Bereiche der starken Linien sind viel stärker von den verschiedenartigsten, schwer zu berücksichtigenden Einflüssen, die wir im vorangehenden Paragraphen betrachtet haben (Fluoreszenz, Inkohärenz), verzerrt als die schwachen Linien.

3. Die Ableitung einer hinreichend genauen Kontur stößt bei einer starken oder mittleren Linie gewöhnlich auf zahlreiche Schwierigkeiten. Dagegen kann man für die schwachen und sehr schwachen Linien die Lösung (10.43) benutzen, die genauer als die Lösung (10.20) ist.

4. Nur sehr wenige chemische Elemente besitzen in den der Beobachtung zugänglichen Bereichen des Sonnenspektrums und der Sternspektren starke Linien. Die Benutzung von Linien mittlerer Intensität ist unvorteilhaft, weil

diese Linien auf dem so geneigten Abschnitt der Wachstumskurve liegen, daß sich die Äquivalentbreite der Linien mit der Anzahl der absorbierenden Atome sehr schwach ändert. Daher kann schon ein kleiner Fehler in der gefundenen Äquivalentbreite einen sehr großen Fehler in N_r oder $N_{r,i}$ hervorrufen.

Unter diesen Umständen sind die schwachen Linien den starken vorzuziehen, wenn auch in vielen Fällen, insbesondere bei der Untersuchung von Spektren mit kleiner Dispersion, die starken und die mittleren Linien ein wichtiges Hilfsmittel zur chemischen Analyse der Sternatmosphären sind.

Die allgemeine Methode zur Bestimmung von a_s ist für die schwachen Linien und für die starken Linien praktisch gleich. Wir betrachten jedoch die Sonne, bei der die Möglichkeiten für das Studium der chemischen Zusammensetzung am günstigsten liegen (man kann Instrumente mit großer Dispersion anwenden), und untersuchen, auf welche Weise man von den schwachen Linien Gebrauch machen kann.[1])

Wir gehen von der Lösung (10.43) aus. Für die Sonne können wir die Abhängigkeit der Größe B_ν von τ_ν aus dem Gesetz der Randverdunkelung ermitteln, das wir aus den Beobachtungen abgeleitet haben. Damit kann man auch die Gewichtsfunktionen $G_1(\tau_\nu)$ und $G_2(\tau_\nu)$ bestimmen. Aus den Rechnungen ergibt sich, daß der Unterschied zwischen diesen Funktionen klein ist. Er ist im ultravioletten Spektralbereich am größten, wo er etwa 30% von $G_1(\tau_\nu)$ und $G_2(\tau_\nu)$ beträgt. Im roten Spektralbereich fallen dagegen beide Funktionen praktisch zusammen. Diese Eigenschaften der betrachteten Funktionen folgen auch aus der Untersuchung der Ausdrücke (10.44) und (10.45), wenn man berücksichtigt, daß im allgemeinen $Ei_1(x) > Ei_2(x)$ ist. Daher können wir in (10.43) an Stelle von $G_1(\tau_\nu)$ und $G_2(\tau_\nu)$ ihren Mittelwert einsetzen, den wir mit $\overline{G}(\tau_\nu)$ bezeichnen. Hierdurch werden im Endergebnis Fehler hervorgerufen, die im Mittel 20% nicht übersteigen; dies ist aber für den gegenwärtigen Stand der Erforschung der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphäre völlig zulässig.

Somit schreiben wir an Stelle von (10.43)

$$R_\nu \approx \int_0^\infty \frac{\varkappa_\nu^0 + \sigma_\nu^0}{\varkappa_\nu} \overline{G}(\tau_\nu)\, d\tau_\nu = \int_0^\infty \frac{\sigma_\nu}{\varkappa_\nu} \overline{G}(\tau_\nu)\, d\tau_\nu, \tag{15.6}$$

wobei wir im letzten Teil dieser Gleichung die Formel (9.31) berücksichtigt haben.

Für $\frac{\sigma_\nu}{\varkappa_\nu}$ führen wir in (15.6) den Ausdruck (13.18) ein. Hierbei können wir in Anbetracht dessen, daß in der Photosphäre der Sonne (zum mindesten bis 4000 Å) die kontinuierliche Absorption im wesentlichen durch die H^--Ionen bewirkt wird, das zweite Glied im Nenner von (13.18) vernachlässigen. Als

[1]) M. Minnaert, The theoretical intensities of faint Fraunhofer lines. Bulletin Astronomical Institutes of Netherlands **10**, 339 und 399, 1948.

Resultat erhalten wir

$$R_\nu = a_s \int_0^\infty \frac{s_\nu Z_{r,i}(p_e, T)}{k_\nu(\mathrm{H}^-)\, p_e} \overline{G}(\tau_\nu)\, d\tau_\nu. \tag{15.7}$$

Die Integration von (15.7) über die Frequenz ergibt unter Berücksichtigung von (12.12)

$$\frac{W_\lambda}{\lambda} = \frac{W_\nu}{\nu} = \frac{\int\limits_0^\infty R_\nu d\nu}{\nu} \approx \frac{a_s}{\nu_{ik}} \int_0^\infty \frac{\overline{G}(\tau_\nu) Z_{r,i}(p_e, T)}{k_\nu(\mathrm{H}^-)\, p_e} \left\{ \int_0^\infty s_\nu d\nu \right\} d\tau_\nu, \tag{15.8}$$

wobei sich das Integral über die Frequenz über die Grenzen einer sehr schmalen (schwachen) Absorptionslinie erstreckt.

An Stelle des in der geschweiften Klammer des Ausdruckes (15.8) stehenden Integrals können wir (11.5) benutzen, wobei wir mit Hilfe von (11.14) B_{ik} durch f_{ik} ersetzen. Als Ergebnis erhalten wir an Stelle von (15.8)

$$\frac{W_\lambda}{\lambda} \approx a_s \frac{\pi e^2 f_{ik}}{c m_e \nu_{ik}} \int_0^\infty \frac{\overline{G}(\tau_\nu) Z_{r,i}(p_e, T)}{k_\nu(\mathrm{H}^-)\, p_e} d\tau_\nu. \tag{15.9}$$

Die Funktionen $\overline{G}(\tau_\nu)$ und $T(\tau_\nu)$ leitet man gleichzeitig aus den Beobachtungen ab, welche die Abhängigkeit der Funktion $B_\nu(T)$ von τ_ν liefern. p_e als Funktion von τ_ν findet man aus der Theorie der Photosphären. Somit kann man das Integral auf der rechten Seite von (15.9) durch numerische Integration berechnen. Demnach erhalten wir unmittelbar die gesuchte Größe a_s, wenn wir aus den Beobachtungen W_λ bestimmen und f_{ik} kennen. Selbstverständlich muß man auch bei dieser Methode eine vorläufige chemische Zusammensetzung der Sonnenatmosphäre voraussetzen, weil man p_e aus der Ionisation des Wasserstoffs und der Metalle bestimmt, deren Häufigkeit wie früher näherungsweise bekannt sein muß. Wenn man jedoch a_s aus den Linien der neutralen Metalle bestimmt, kann man – wie wir sogleich sehen werden – dies umgehen.

Wir multiplizieren die Ionisationsgleichung (5.11) und die Gleichung (5.54) für $r = 0$. Dann erhalten wir unter Beachtung von (5.6)

$$\frac{n_{0,i}}{n_1} = p_e \frac{g_{0,i}}{u_1} \frac{h^3}{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}} e^{\frac{\chi_{0,i}}{kT}}, \tag{15.10}$$

wobei $\chi_{0,i}$ die Bindungsenergie des i-ten Niveaus ist. Die meisten Metallatome befinden sich in der Sonnenatmosphäre im einfach ionisierten Zustand, so daß $n_0 \ll n_1$. Daher können wir annehmen, daß die Gesamtzahl n der Atome eines beliebigen Elementes in 1 cm³ näherungsweise gleich der Anzahl der ionisierten Atome desselben Elementes in 1 cm³ ist. Folglich können wir an-

nehmen, daß $n = n_0 + n_1 + n_2 + \cdots \approx n_1$ ist. Aus diesem Grunde können wir für $Z_{0,i}(p_e, T)$ die Gleichung

$$Z_{0,i}(p_e, T) = \frac{n_{0,i}}{n} \approx \frac{n_{0,i}}{n_1} \tag{15.11}$$

schreiben; benutzen wir (15.10), so erhalten wir für $Z_{0,i}(p_e, T)$ den Ausdruck

$$Z_{0,i}(p_e, T) \approx p_e \frac{g_{0,i}}{u_1} \frac{h^3}{2\,(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}}\,(k\,T)^{\frac{5}{2}}} e^{\frac{\chi_{0,i}}{k\,T}}. \tag{15.12}$$

Führen wir jetzt diese Funktion in (15.9) ein, so erkennen wir, daß sich p_e herauskürzt, so daß der unter dem Integral stehende Ausdruck nur eine Funktion der Temperatur ist. Andererseits findet man die Abhängigkeit zwischen der Temperatur und τ_ν unmittelbar aus den Beobachtungen. Auf diese Weise wird das Integral auf der rechten Seite von (15.9) nur auf Grund von Beobachtungen berechnet. Folglich ergeben die schwachen Linien der neutralen Metalle unmittelbar die Häufigkeit des vorliegenden Metalles im Verhältnis zum Wasserstoff.

4. Die Ergebnisse der Untersuchungen

Mit Hilfe der dargestellten allgemeinen Methoden – natürlich in verschiedenen Modifikationen – sind eine große Anzahl von Arbeiten durchgeführt worden, die sich mit der Untersuchung der chemischen Zusammensetzung der Sonne und der Sterne befassen. Auf die Sonne sind verschiedene Methoden angewandt worden; dies ermöglicht es, die Richtigkeit und die Genauigkeit der gefundenen Resultate abzuschätzen. Ein Vergleich zeigt, daß in zahlreichen Fällen ziemlich große Differenzen in den a_s bestehen. Diese Differenzen sind hauptsächlich durch Unterschiede in den angenommenen Anregungstemperaturen und den Oszillatorstärken f_{ik} verursacht. Dennoch liegen heute in Anbetracht der Fülle des Materials für die Sonne und für einige Sterne ziemlich zuverlässige Daten über die a_s vor. Für diese Objekte beträgt der mögliche Fehler in lg a_s im Mittel 0,3—0,5, wenn er auch in einzelnen Fällen beträchtlich größere Werte annehmen kann. Dies gilt insbesondere für die Elemente, bei denen die untersuchten Linien von sehr hohen Niveaus ausgehen, d.h. von Niveaus, die große $\varepsilon_{r,i}$ besitzen. Zu diesen Elementen gehören – wie wir schon erwähnt haben – He, C, N, O, Si, S usw.

Die in Tabelle 1 (siehe S. 35) aufgeführten Werte von a_s für die Sonne wurden (außer He, C und N) von CLAAS[1]) ermittelt, der im wesentlichen die Methode der schwachen Linien benutzt hat. Die Häufigkeit des Heliums auf der Sonne wurde mit der Häufigkeit des Heliums in der Chromosphäre und in den Pro-

[1]) W. CLAAS, The composition of the solar atmosphere. Recherches astronomiques de l'Observatoire d'Utrecht XII, part 1, 1951.

tuberanzen identifiziert (siehe §§ 20,21). Die Häufigkeit von C und N wurde aus der Untersuchung der Molekülbanden gewonnen.

Um die Anzahl N_s der Atome der verschiedenen Elemente über 1 cm^2 in der Sonnenphotosphäre zu bestimmen, genügt es, die Anzahl N_H zu kennen, weil $N_s = a_s N_H$. Für N_H geben verschiedene Autoren etwas verschiedene Werte an, die innerhalb der Grenzen 10^{24} und $5 \cdot 10^{21}$ liegen. Für Näherungsrechnungen kann man $N_H = 2{,}5 \cdot 10^{24}$ Atome über 1 cm^2 setzen. Wir erinnern daran, daß N_s die Gesamtzahl der Atome über 1 cm^2 unter Berücksichtigung aller Ionisations- und Anregungszustände angibt.

Außer für die Sonne ist die Bestimmung der chemischen Zusammensetzung für Sterne der verschiedenen Typen vorgenommen worden. Die zuverlässigsten Angaben liegen für F-Sterne der Hauptreihe und der Riesen, für heiße B-Sterne vom Typ τ Scorpii (siehe Tabelle 1) und sogar für O-Sterne vor. Die relative chemische Zusammensetzung (die Größen a_s) der Atmosphäre aller dieser Objekte einschließlich der Sonne ist näherungsweise die gleiche.[1]) Darüber hinaus zeigt die Betrachtung der Tabelle 1, daß diese chemische Zusammensetzung derjenigen der planetarischen Nebel und des interstellaren Gases ähnlich ist. Diese Tatsache ist natürlich von großer kosmogonischer Bedeutung. Er darf von keiner kosmogonischen Theorie außer acht gelassen werden, die Anspruch erhebt, die möglichen Wege der Sternentwicklung zu erklären.

Nun behandeln wir die Frage nach möglichen Abweichungen von der „normalen" Zusammensetzung. Hierbei müssen wir mit äußerster Vorsicht zu Werke gehen, da es zahlreiche Faktoren gibt, die die Intensitätsverteilung der Absorptionslinien verzerren und zu falschen Werten von a_s führen können. Zu diesen Faktoren gehören:

1. Anomale Anregungs- und Ionisationsbedingungen für die Atome. Daß solche anomalen Bedingungen auftreten können, wird durch das Studium der äußeren Sonnenhülle nahegelegt (Chromosphäre, Korona und Protuberanzen).

2. Die Turbulenz in den Sternatmosphären. Sie wirkt verschieden auf starke und auf schwache Linien ein, so daß eine unzulängliche Berücksichtigung der Turbulenz ebenfalls zu falschen a_s führen kann.

3. Solche Faktoren wie ein allgemeines Magnetfeld können ebenfalls die Intensität der Linien ändern. Als Beispiel verweisen wir auf den Stern HD 125248, bei dem sich das beobachtete Magnetfeld in Phase mit den Intensitätsschwankungen der Linien des ionisierten Europiums zeitlich ändert. Die Ursache der synchronen Schwingungen dieser beiden anscheinend unabhängigen Größen ist darauf zurückzuführen, daß die Europiumlinien bei Vorhandensein eines starken Magnetfeldes in eine Vielzahl von ZEEMAN-Komponenten aufgespalten werden; durch das Ineinanderfließen dieser Komponenten entsteht eine breite und verhältnismäßig intensive Linie. Auf diese Weise vermag die Berücksichtigung eines allgemeinen Magnetfeldes offenbar eine ganze Reihe von beobachteten Anomalien besonders bei den seltenen Elementen zu erklären.

---

[1]) Es ist im Augenblick noch schwierig, von einer völligen Identität zu sprechen, da die vorliegenden Daten noch nicht genau genug sind.

Wir zählen die Fälle auf, in denen die Untersuchung der Absorptionslinien (und überhaupt das Aussehen des Spektrums) auf eine „anomale" chemische Zusammensetzung schließen läßt:

1. Die Aufspaltung der Spektralsequenz bei der Klasse K 2 in den Sauerstoffast (die Klassen K–M) und den Kohlenstoffast (Klasse N). Die Spektren der „Sauerstoffsterne" vom Typ M sind in der Hauptsache durch die Banden des Titanoxyds (TiO) gekennzeichnet. Für die N-Sterne sind die Banden der Kohlenstoffverbindungen, insbesondere die Swanbanden (C_2), die Cyanbanden CN und die Kohlenwasserstoffbanden CH, charakteristisch.

Hier haben wir es mit einem sichtlichen Unterschied in der chemischen Zusammensetzung zu tun. In den Atmosphären der M-Sterne ist der Sauerstoff viel häufiger als in den Atmosphären der N-Sterne. Dagegen ist in den Atmosphären der N-Sterne der Kohlenstoff in beträchtlich größerer Menge vorvorhanden als in den Atmosphären der M-Sterne.

In ihren umfangreichen Untersuchungen von Spektren der Kohlenstoffsterne entdeckten G. A. SCHAIN und W. F. HASE[1]) noch weitere überaus interessante Eigentümlichkeiten dieser Spektren. Insbesondere sind die Linien D_1 und D_2 in den Spektren gewisser Kohlenstoffsterne etwa zehnmal intensiver als in den Spektren der M-Sterne. Anscheinend ist diese Tatsache auf Unterschiede in der Temperatur und möglicherweise auf Unterschiede in der Häufigkeit von Na zurückzuführen. Was die übrigen Metalle, wie Fe, Cr, Mn usw., betrifft, so kann man aus den Intensitäten der entsprechenden Atomlinien schließen, daß sie in den Sternen vom Typ N und M etwa die gleiche Häufigkeit besitzen;

2. die Aufspaltung der WOLF-RAYET-Sterne in den Kohlenstoffast und den Stickstoffast. Die Punkte 1. und 2. werden im folgenden Paragraphen noch einmal behandelt;

3. die „Metallsterne". Diese Sterne bilden eine große Gruppe von Objekten mit widersprechenden spektralen Kriterien. Wenn wir z.B. die Wasserstofflinien oder die K-Linie von Ca II betrachten, könnte man einem solchen Stern den Spektraltyp A zuschreiben; richten wir uns aber nach den Intensitäten der meisten Linien der neutralen oder der ionisierten Metalle, so entspricht das Spektrum des Sternes etwa dem Typ F 5. Das Studium der Spektren dieser Sterne zeigt, daß die Häufigkeit a_s der Elemente Ca, Sc, Ti, Zr, V und Mg anomal gering ist. Sie ist bei einigen dieser Sterne um das Zehnfache kleiner als in den Atmosphären der gewöhnlichen Sterne;

4. die Gruppe der dem Stern ν Sagittae ähnlichen Sterne vom Typ cA, z.B. HD 30353 und HD 124448. Die wichtigste Eigenschaft der Spektren dieser Sterne sind die im Vergleich zu den Linien des Heliums und der Metalle anomal schwachen Wasserstofflinien. Dieser Umstand deutet ohne Zweifel auf den

---

[1]) W. F. HASE und G. A. SCHAIN, Untersuchungen von Spektren der Kohlenstoffsterne. Mitteilungen des Astrophysikalischen Observatoriums auf der Krim der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 2, S. 51, 1948 (В. Ф. Газе и Г. А. Шайн, Исследование спектра углеродных звезд. Известия Крымской астрофизической обсерватории АН СССР 2, стр. 51, 1948.)

niedrigen Wasserstoffgehalt der Atmosphären dieser Sterne hin, da man sich einen physikalischen Mechanismus, der das fast völlige Fehlen der BALMER-Serie (und des BALMER-Sprungs) bei normaler Stärke der Linien der übrigen Elemente erklären könnte, schwer vorstellen kann.

Unsere Ausführungen berechtigen uns zu der Annahme – und hierfür liegen gewichtige Gründe vor – daß bei den unter 1. 2. und 4. aufgeführten Sternen reale und dabei beträchtliche Abweichungen von der „normalen" chemischen Zusammensetzung auftreten. Bei den Metallsternen ist die Situation nicht sehr durchsichtig. Die Dinge liegen so, daß alle Metalle, die eine anomal geringe Häufigkeit aufzuweisen haben (Ca, Sc, Ti, Sr, V und Mg) sehr ähnliche Eigenschaften besitzen. Die Atome dieser Metalle haben nämlich zwei Außenelektronen. Gleichzeitig zeigen quantenmechanische Rechnungen für Ca II, daß der Absorptionskoeffizient anomal weit bis in den ultravioletten Spektralbereich hinein reicht. Daher werden selbst bei einem nur geringen Strahlungsüberschuß im ultravioletten Spektralbereich die Ca II-Atome anomal stark ionisiert. Im Hinblick auf die Ähnlichkeit der Atome der erwähnten Elemente mit den Kalziumatomen kann man annehmen, daß bei Strahlungsüberschuß im Ultravioletten eine anomal starke zweite Ionisation der erwähnten Elemente stattfindet, was zu der angegebenen Verringerung von a_s führt. Bei den Atomen der übrigen Metalle, z.B. Fe und Mn, die ebenfalls zwei Außenelektronen besitzen, ist das Potential der zweiten Ionisation verhältnismäßig groß, so daß hier der Einfluß eines Strahlungsüberschusses im Ultravioletten geringer ist.

Außerordentlich interessante Objekte in bezug auf ihre chemische Zusammensetzung sind die Kohlenstoffsterne vom Typ N. Durch die Forschungen des Akademiemitgliedes G. A. SCHAIN, der im Jahre 1950 mit dem Leninpreis ausgezeichnet wurde, und durch die Untersuchungen, die er gemeinsam mit W. F. HASE durchgeführt hat, sind unsere Kenntnisse über die Spektren der erwähnten Sterne außerordentlich bereichert.

Im Jahre 1940 zeigte G. A. SCHAIN[1]), daß in den Atmosphären der N-Sterne die Kohlenstoffisotope C^{12} und C^{13} auftreten. Diese Entdeckung wurde durch sorgfältige Untersuchungen der Molekülbanden in den Spektren der N-Sterne gemacht. Es ist außerordentlich schwierig, Isotope über Atomlinien zu entdecken. Bei den Molekülen erreicht dagegen die Verschiebung der Banden zweier beliebiger Isotope recht beträchtliche Ausmaße (bis zu einigen Å). Bei diesen Untersuchungen entdeckte G. A. SCHAIN in den Spektren der N-Sterne zahlreiche neue Swan-Banden – $C^{12}C^{12}$, $C^{13}C^{12}$, $C^{13}C^{13}$. Später wurden ebenfalls CN-Banden entdeckt, die den Isotopen C^{12} und C^{13} entsprechen.

Eine weitere außerordentlich wichtige von G. A. SCHAIN festgestellte Tatsache ist die im Verhältnis zu C^{12} große Häufigkeit des Isotops C^{13}. Diese

---

[1]) Mitteilungsblatt der Akademie d. Wissenschaften d. UdSSR **10**, S. 53, 1940; G. A. SCHAIN, The occurence of carbon isotopes in the spectra of N-type stars. Bulletin des Abastumanischen Observatoriums Nr. 6, 1942, und die folgenden Arbeiten gemeinsam mit W. F. HASE in den Mitteilungen des Astrophysikalischen Observatoriums auf der Krim. (Вестник АН СССР **10**, стр. 53, 1940; Бюллетень Абастуманской обсерватории, No. 6, 1942. В. Ф. Газе, Известия Крымской астрофизической обсерватории.)

Häufigkeit ändert sich von Stern zu Stern und schwankt zwischen 0,05 und 0,3—0,4. Auf diese Weise ist im letzten Fall die Anzahl der C^{13}-Atome um das Zwei- bis Dreifache kleiner als die der C^{12}-Atome, während das Verhältnis der Anzahl der C^{13}-Atome zu den C^{12}-Atomen auf der Erde etwa gleich 0,01 ist. Folglich ist das Isotop C^{13} auf der Erde äußerst selten. Für die Sonne ist ebenfalls eine sehr kleine relative Häufigkeit $C^{13} : C^{12}$ kennzeichnend, die auf jeden Fall kleiner als 1/30 ist.

Die Frage nach der Häufigkeit der Isotope C^{12} und C^{13} in den Sternatmosphären steht in direktem Zusammenhang mit der Frage nach den Energiequellen der Sterne. In dem bekannten Kohlenstoffzyklus spielen die Isotope C^{13} und C^{12} eine überaus wichtige Rolle (siehe Kapitel VII).

Zum Abschluß des vorliegenden Paragraphen weisen wir auf die Wichtigkeit hin, die chemische Zusammensetzung von Sterngruppen zu untersuchen, die verschiedene kinematische und geometrische Kennzeichen besitzen. Dies ist für das Studium der Sternentwicklung in der Galaxis von großer Bedeutung.

Von sehr großem Interesse ist der Vergleich der chemischen Zusammensetzung von Sternen, die zu verschiedenen Untersystemen mit beträchtlich voneinander abweichenden Geschwindigkeitsstreuungen gehören. Wir erinnern daran, daß die Geschwindigkeitsstreuung mit den räumlichen Charakteristiken des Untersystems zusammenhängt. Gewöhnlich haben die „flacheren" Untersysteme eine kleinere, die mehr „kugelförmigen" Untersysteme eine größere Geschwindigkeitsstreuung (siehe die Übersicht von P. P. Parenago [21, S. 69]).

Die Verschiedenheit der geometrisch-kinematischen Charakteristika für verschiedene Untersysteme rechtfertigt die Annahme, daß die Herkunft der zu den verschiedenen Untersystemen gehörigen Sterne verschieden ist [22], so daß man erwarten kann, daß auch die chemische Zusammensetzung der entsprechenden Sterne verschieden ist. Das gegenwärtig vorliegende Material bestätigt diese Vermutung.

Das Studium der Riesen vom Typ G und K zeigt, daß in den Spektren der Sterne, die eine verhältnismäßig große Geschwindigkeitsstreuung besitzen, die CN-Banden im Vergleich zu den CN-Banden in den Spektren der Sterne mit geringerer Geschwindigkeitsstreuung geschwächt sind. Die umgekehrte Gesetzmäßigkeit (eine Verstärkung der Banden in den Spektren der Sterne mit größerer Geschwindigkeitsstreuung) beobachtet man bei den CH-Banden.

Bei den Zwergen vom Typ F ist das Verhältnis der Äquivalentbreiten der zu CH und Fe I gehörigen Linien in den Spektren der Sterne, die eine verhältnismäßig große Geschwindigkeitsstreuung besitzen, ebenfalls vergrößert.

Diese Tatsachen (und noch gewisse andere) können durch die Annahme erklärt werden, daß in den Atmosphären der Sterne, die eine große Geschwindigkeitsstreuung besitzen, die prozentuale Häufigkeit der Metalle und in geringerem Maße der Metalloide – O, C und N – gegenüber der Häufigkeit der gleichen Elemente in den Atmosphären der Sterne mit kleinerer Geschwindigkeitsstreuung geringer ist.

Ähnliche Ergebnisse erhält man bei dem Vergleich der Atmosphären der Unterzwerge und der Sterne der Hauptreihe. Die Unterschiede in den Spek-

tren der Sterne beider Gruppen können nämlich durch eine geringere Häufigkeit an Ca, Fe (und möglicherweise an den anderen Metallen) in den Atmosphären der Unterzwerge, d.h. von Sternen, die zu einem kugelförmigen Untersystem gehören, erklärt werden.

Was den Wasserstoff anbelangt, so ist auf Grund der erwähnten Untersuchungen die prozentuale Häufigkeit in den Atmosphären der Sterne, die eine große Geschwindigkeitsstreuung besitzen, anscheinend praktisch genauso groß wie in den Atmosphären der Sterne mit kleiner Geschwindigkeitsstreuung.

§ 16. Die Deutung der Spektralsequenz. Der Effekt der absoluten Größe. Die Skala der effektiven Temperaturen

1. Vorbemerkungen

In § 15 haben wir gesehen, daß die chemische Zusammensetzung der Atmosphären der überwiegenden Mehrheit der zu den verschiedenen Spektraltypen gehörigen Sterne ungefähr gleich ist. Folglich werden die Verschiedenheiten in den Sternspektren innerhalb der Spektralsequenz keineswegs durch Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphäre verursacht. Seit der Aufstellung der Ionisationstheorie der Sternatmosphären (1920) hat sich die Ansicht durchgesetzt, daß der Hauptfaktor, der die Änderung des Charakters der Sternspektren längs der Spektralsequenz bewirkt, die Änderung der Temperatur ist. Unter diesem Gesichtspunkt wird das Aussehen des Spektrums (d.h. das Auftreten von bestimmten Spektrallinien, ihre relative Intensität usw.) eines beliebigen Sternes innerhalb der Spektralsequenz im wesentlichen nur durch die Temperatur bestimmt. Diese Vorstellung stimmt mit der Linearität der HARVARD-Spektralklassifikation überein, einer Klassifikation, die von nur einem Parameter abhängt und rein empirischen Charakter besitzt.

Vom physikalischen Standpunkt betrachtet, sind diese Ergebnisse unmittelbar einleuchtend, weil der Charakter des Sternspektrums bei einer vorgegebenen (und dabei ein und derselben) chemischen Zusammensetzung von den Ionisations- und Anregungsbedingungen in der Sternatmosphäre bestimmt wird. Diese ist aber im wesentlichen von der Temperatur des Sternes abhängig.

An dieser Stelle müssen wir jedoch die Einschränkung „im wesentlichen" hervorheben. In Wirklichkeit hängt nach der Formel (5.11) die Ionisation nicht nur von der Temperatur, sondern auch von dem Elektronendruck p_e ab, wenn auch natürlich in weit geringerem Maße. Daher ist das Aussehen der Spektren zweier Sterne mit gleicher Temperatur, doch mit verschiedener Leuchtkraft und folglich verschiedenem mittlerem p_e, etwas verschieden. Überhaupt werden wir weiter unten erkennen, daß sich die Spektren der zu dem gleichen Spektraltyp gehörigen Zwerge und Riesen durch zahlreiche Merkmale voneinander unterscheiden. Neben Verschiedenheiten im Ionisationsgrad treten Unterschiede auf, die durch den Druckeffekt bedingt sind. (Die Atmosphäre eines Riesen

zeigt eine größere Verdünnung als die Atmosphäre eines Zwerges.) In Hinblick hierauf muß eine genauere empirische Spektralklassifikation mindestens zweiparametrig sein, d. h., das Spektrum eines Sternes ist durch die Angabe von zwei Parametern zu charakterisieren. Als einen der Parameter kann man den Spektraltyp nehmen, der gegen eine Temperaturänderung überaus empfindlich ist, und als zweiten irgendeinen besonderen Index (oder mehrere Indizes), der gegenüber einer Änderung der absoluten Größe[1]) sehr empfindlich ist (wenn er auch von einem Temperatureinfluß nicht völlig frei ist). Die erste Aufgabe des Beobachters besteht darin, jedem Stern diese beiden Parameter x und y zuzuordnen. Die zweite Aufgabe ist die Aufdeckung des Charakters der Abhängigkeit dieser empirischen Parameter von T und g:

$$x = f_1(T,g),$$

$$y = f_2(T,g), \qquad (16.1')$$

und die Ermittlung der Größen T und g aus den vorgegebenen x und y.

Zum Abschluß unserer kurzen Einführung erinnern wir, daß die Linearität der HARVARD-Klassifikation, beginnend mit der Klasse K 2, scharf verletzt wird, da an dieser Stelle eine Aufteilung der Spektralsequenz in drei Äste eintritt: die Sterne K–M, die Sterne K–R–N und die S-Sterne.

Für die Spektren der Sterne K–M sind die Banden des Titanoxyds charakteristisch (die bei den Sternen K 5 schwach sind, doch bei der Klasse M 8 zu erheblicher Stärke anwachsen). Die Spektren der Sterne K–R–N werden durch die Kohlenstoff- und Zyanbanden charakterisiert, die sich von R 0 bis R 5 sowie von N 0 bis N 3 verstärken. Es ist kein einziger Stern bekannt, in dessen Spektrum gleichzeitig sowohl Titan- als auch Kohlenstoffbanden vorhanden sind. Für die Spektren der S-Sterne sind Zirkonoxydbanden charakteristisch.

Wie wir schon in § 15 erwähnt haben, liegen in diesen Fällen anscheinend reale Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung vor.

Wir untersuchen jetzt unter Zugrundelegung der Hauptergebnisse der Theorie der Sternatmosphären, wie sich der Charakter eines Spektrums bei einer Änderung der Temperatur und der Schwerebeschleunigung auf der Sternoberfläche ändert. Bei der Lösung dieser Aufgabe in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts entstand ein Spezialgebiet der theoretischen Astrophysik, die Ionisationstheorie der Sternatmosphären. Dieses Spezialgebiet entwickelte sich wegen der damaligen Unvollkommenheit unserer Kenntnisse über die Entstehung der Absorptionslinien lange Zeit faktisch unabhängig von der Theorie der Intensitäten der Absorptionslinien. Heutzutage kann man diese ihrem Wesen nach künstliche Trennung nicht länger aufrechterhalten. Um den Charakter eines Sternspektrums für verschiedene T_e und g bei einer vorgegebenen chemischen Zusammensetzung zu untersuchen, müssen wir für diese T_e und g die Konturen der Absorptionslinien ermitteln (siehe § 13). Hierauf sind die In-

---

[1]) Für die Hauptreihe ist die absolute Größe des Sternes bei vorgegebener Temperatur (über die Masse-Leuchtkraft-Beziehung) eindeutig mit der Schwerebeschleunigung g verbunden.

tensitätsänderungen der benutzten Linien in den Spektren der Sterne mit verschiedenem T_e und g zu bestimmen und diese theoretischen Resultate mit den Beobachtungsergebnissen zu vergleichen. Auf diese Weise läuft das Verfahren auf Rechnungen hinaus, die sich auf das Material des § 13 stützen. Allerdings sind diese Rechnungen natürlich überaus schematisch, weil sie nicht auf solche Faktoren wie die Turbulenz in den Sternatmosphären, die Rotation der Sterne, kleine Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung usw. Rücksicht nehmen. Diese Fragen gehen jedoch schon über den Bereich der zweiparametrigen Klassifikation hinaus.

Aus unseren Ausführungen folgt, daß wir uns bei der Deutung der wichtigsten charakteristischen Eigenschaften der Spektralsequenz an dieser Stelle auf die qualitative Behandlung der Frage beschränken können, da die quantitativen Berechnungen auf die schon in § 13 betrachtete Methode zurückgehen. Die Formeln und die Methode der alten „Ionisationstheorie der Sternatmosphären" sind dagegen heute fast bedeutungslos geworden.[1])

2. Die Änderung der Linienintensitäten bei wachsender Sterntemperatur

Wir untersuchen jetzt, wie bei einem bestimmten Wert von g die Intensitäten der verschiedenen Absorptionslinien sich bei dem Übergang von Sternen mit niedrigem T_e zu Sternen mit höherem T_e ändern. (Den Einfluß einer Änderung von g betrachten wir weiter unten.)

Im folgenden gehen wir davon aus, daß die Intensität einer beliebigen Linie in einem Sternspektrum um so größer ist, je größer die Anzahl der diese Linie hervorbringenden Atome ist (siehe § 12). Daher genügt es, für das Studium der qualitativen Intensitätsänderung einer beliebigen Linie in den Spektren der Sterne längs der Spektralsequenz die Änderung der Anzahl der absorbierenden Atome zu betrachten.

Die auffallendsten Eigenschaften für die Spektren der Sterne mit niedrigsten Temperaturen sind folgende:

1. Das Auftreten von Banden, die von Molekülverbindungen herrühren.

2. Das Auftreten von Absorptionslinien, die vom Grundniveau ausgehen, z. B. die Linie 4227 Å von Ca I. Tatsächlich ist die Anzahl der Atome, die sich bei niedriger Temperatur in angeregten Zuständen befinden, nach Formel (5.54) klein.

3. Die Linien der ionisierten Elemente sind in den Spektren dieser Sterne verhältnismäßig schwach.

---

[1]) Diese Theorie ging in ihren letzten Varianten von dem Begriff der sogenannten effektiven optischen Dicke aus, die für alle Absorptionslinien als gleich vorausgesetzt wurde. Neuerdings hat es sich jedoch herausgestellt, daß diese Dicke für die verschiedenen Linien in Abhängigkeit von dem Anregungspotential, dem Spektralbereich usw. von 0,2 bis 2 variiert.

Wir untersuchen jetzt, wie sich der Charakter des Spektrums ändert, wenn man von den betrachteten kühlen Sternen zu Sternen mit höherem T_e übergeht.

Eine Temperaturerhöhung bewirkt infolge der sich verstärkenden Dissoziationsprozesse ein Abnehmen der Anzahl der Moleküle und folglich eine Schwächung der Molekülbanden. Hierbei verschwinden in erster Linie die Banden, die von den leicht dissoziierenden Verbindungen (mit kleiner Dissoziationsenergie) herrühren. Das gleiche gilt auch für die Atomlinien, die von dem Grundniveau der neutralen Atome ausgehen. Ihre Zahl nimmt (zunächst langsam, dann aber schneller) mit zunehmender Ionisation ab.

Die Linien der neutralen Atome, die Übergängen von angeregten Niveaus aus entsprechen, zeigen ein anderes Verhalten. Mit wachsender Temperatur wächst die Zahl dieser Atome zunächst an [Formel (5.54)]. Daher wird auch die Intensität der entsprechenden Linien zunehmen. Diese Zunahme setzt sich aber nicht unbeschränkt fort. Mit weiterem Anwachsen der Temperatur nimmt die Gesamtzahl der neutralen Atome eines vorgegebenen Elementes ab, da sich die Ionisation kontinuierlich verstärkt. Aus diesem Grunde erreicht die Intensität der Linien, die Übergängen von angeregten Niveaus der neutralen Atome entsprechen, bei einer gewissen Temperatur ein Maximum. Bei weiterer Temperaturerhöhung werden die Linien schwächer, und von einer gewissen spektralen Unterklasse an verschwinden sie. (Eine Ausnahme bilden die Linien der Balmer-Serie, die man sogar in den Spektren der O-Sterne beobachten kann. Dies ist auf den überaus hohen prozentualen Wasserstoffgehalt der Sternatmosphären zurückzuführen.) Wie man leicht einsieht, verschwinden die Linien, die Übergängen vom Grundniveau aus entsprechen, in der Regel später (d.h. bei höherer Temperatur) als die Linien, die Übergängen von den angeregten Niveaus aus entsprechen.

Die Lage des Intensitätsmaximums der Linien hängt von dem Ionisationspotential des betrachteten Elementes und von dem Anregungspotential des Niveaus ab, von dem aus sich der Übergang vollzieht, der diese Linien hervorbringt. Je größer diese beiden Potentiale sind, um so höher muß die Temperatur sein, bei der diese Linien ihr Maximum erreichen. So wird z.B. das Intensitätsmaximum der Linien von He I in den Spektren der zu den Unterklassen B gehörigen Sterne beobachtet (die Linien des neutralen Heliums treten zum erstenmal in den Sternspektren der Unterklassen A 1 bis A 2 auf); dagegen besitzen die meisten Linien der verhältnismäßig leicht zu ionisierenden und anzuregenden neutralen Metallatome ihr Maximum in den Klassen M, K und G. Dies liefert insbesondere dafür eine Erklärung, daß in den Spektren der Sterne der erwähnten Klassen die Metallinien vorherrschen.[1]) Die Linien der schwer anzuregenden Elemente treten in den betrachteten Spektren nicht auf oder sind äußerst schwach. Eine Ausnahme bildet der Wasserstoff, bei dem schon das erste Anregungspotential sehr groß ist (für das zweite Niveau, von dem aus die Balmer-Serie beginnt, ist $\varepsilon_{0,2} = 10{,}16$ eV). Trotzdem sind die Balmer-Linien

[1]) Nicht nur der neutralen, sondern auch der ionisierten Metalle mit kleinerem Ionisationspotential.

selbst in den Spektren der Sterne G, K und M ziemlich intensiv; dies ist auf den außerordentlich hohen relativen Wasserstoffgehalt zurückzuführen (siehe § 15).

Das Auftreten eines Intensitätsmaximums bei den Linien der neutralen Elemente steht – wie wir soeben gesehen haben – mit den angeregten Niveaus in Zusammenhang. In bestimmten Fällen können aber auch die Linien, die durch Übergänge vom ersten Niveau aus erzeugt werden, ein Maximum aufweisen.

Wenn infolge des Temperaturanstiegs die Atome beim Zerfall der Molekülverbindungen, durch die sie gebunden sind, frei werden, wird aus diesem Grunde die Intensität der entsprechenden Atomlinien ebenfalls zunehmen. Eine hierauf folgende Ionisation der Atome wird ein Intensitätsmaximum der Linien und weiter eine Intensitätsabnahme zur Folge haben.

Wir betrachten jetzt die Linien der Ionen. Wenden wir uns zunächst den Linien zu, die durch Übergänge von dem Grundniveau eines ionisierten Atoms aus entstehen. Beim Übergang zu den Atmosphären immer heißerer Sterne vergrößert sich die Zahl der ionisierten Atome (auf Kosten der neutralen Atome). Daher wächst die Intensität der Linien der Ionen an, und es entstehen neue Linien, deren Intensität ebenfalls anwächst. Die Intensitätszunahme setzt sich aber nicht unbeschränkt fort. Bei einer weiteren Temperaturerhöhung führt die Verstärkung der zweiten Ionisation der Atome dazu, daß die Zahl der einfach ionisierten Atome nach Erreichung eines Maximums sich zu verkleinern beginnt. Daher muß die Intensität der Linien, die durch Übergänge vom Grundniveau der ionisierten Atome entstehen, ebenfalls ein gewisses Maximum in der Spektralsequenz besitzen. Dieses Maximum wird dort angenommen, wo die Linien, die den neutralen Atomen des betrachteten Elementes entsprechen, schon sehr schwach sind. Außerdem muß es sehr flach sein, d. h schwach ausgeprägt, weil die Zahl der einfach ionisierten Atome innerhalb eines sehr großen Temperaturbereiches die Zahl der gleichen Atome in den übrigen Ionisationszuständen bedeutend übertrifft.

Es ist selbstverständlich, daß die Linien der ionisierten Atome, die Übergängen von angeregten Niveaus entsprechen, ebenfalls ein Maximum besitzen müssen, doch natürlich bei einer höheren Temperatur, da auf die Anregung eine zusätzliche Energie verausgabt werden muß. Diese Maxima sind stärker ausgeprägt als die Maxima der Linien, die vom Grundniveau der Ionen aus entstehen.

Für die ionisierten Atome ist die Lage des Maximums ebenfalls von der Größe des Ionisations- und des Anregungspotentials abhängig. Je größer diese sind, um so höher ist die Temperatur, bei der man die entsprechenden Linien und das Maximum ihrer Intensitäten beobachtet.

Die durchgeführten Überlegungen sind auch in vollem Maße für die höheren Ionisationsstufen gültig.

Wenn wir uns demnach längs der Spektralsequenz von den kältesten Sternen (unter den uns bekannten) zu den heißesten Sternen fortbewegen, beobachten wir, daß die einen Linien (und ihre Maxima) durch andere, die ein größeres Ionisations- und Anregungspotential besitzen, kontinuierlich abgelöst werden. Entsprechend geht auch die allgemeine Änderung des Aussehens der Sternspektren von solchen Spektren, die durch eine Unzahl von Absorptionslinien

(und anfangs auch Banden) mit starken Überschneidungen der Linien unterteilt sind, in die verhältnismäßig linienarmen Spektren der frühen Klassen vor sich. Wir haben es beim Übergang von den kühlen Sternen zu den heißeren Sternen im Mittel mit immer höher ionisierten oder schwer zu ionisierenden (z.B. He I) Atomen zu tun. Doch liegen bei den Atomen mit großen χ_0, χ_1, χ_2 usw. die meisten starken Linien im fernen Ultraviolett, das fürs erste der Beobachtung nicht zugänglich ist. So trifft man in dem der Beobachtung zugänglichen Spektralbereich im allgemeinen verhältnismäßig selten auf Linien der zweifach und dreifach ionisierten Atome. Hierdurch erklärt sich die „Linienarmut“ in den Spektren der frühen Spektraltypen.

Es ist interessant, zu bemerken, daß man früher (bis in die zwanziger Jahre dieses Jahrhunderts) annahm, das Verschwinden der Metallinien und das Auftreten der Linien der Edelgase sei auf die Zerstörung der Metallatome und die Bildung von Atomen der Edelgase zurückzuführen. In Wirklichkeit erklärt sich dies durch die mehrfache Ionisation der Metallatome, wobei sich sämtliche Linien dieser Ionen praktisch im unzugänglichen ultravioletten Spektralbereich befinden. Die beobachteten Atomlinien der Edelgase gehen dabei von hohen Anregungsniveaus aus, so daß zur Entstehung einer hinreichend großen Anzahl von absorbierenden Atomen eine ziemlich hohe Temperatur erforderlich ist.

Sämtliche hier dargestellten Ergebnisse, d.h. das Auftreten der Maxima und der allgemeine Verlauf der Änderung des Spektrums bei Erhöhung von T_e, stimmen mit den Beobachtungen vollkommen überein [23, S. 292]. Was jedoch die quantitativen Schlußfolgerungen anbetrifft, so erzielte die frühere „Ionisationstheorie der Sternatmosphären“ hauptsächlich in der Aufstellung der Skala der „Ionisationstemperaturen“ gewisse Erfolge (siehe weiter unten). Diese Theorie besaß aber im wesentlichen nur elementaren Charakter und ging – entsprechend dem heutigen Standpunkt – von falschen Angaben über die Absorptionskoeffizienten aus. Die in den letzten Jahren durchgeführten Rechnungen, die sich schon auf die direkte Konstruktion der Konturen für die Absorptionslinien stützen, kann man mit einer gewissen Begründung nur bei den Sternen der frühen Spektraltypen anwenden, bei denen die Absorption durch den Wasserstoff bestimmt wird. Für die kühleren Sterne vom Typ F, G, K und M, bei denen die kontinuierliche Absorption durch die negativen Wasserstoffionen und ferner durch die Metalle und die Moleküle hervorgerufen wird, liegen noch keine Rechnungen vor, die den Verlauf der Intensität mit T_e angeben. Früheren Rechnungen lag die Vorstellung zugrunde, daß die Absorption in den Atmosphären der genannten Sterne durch die Metalle und den Wasserstoff verursacht würde.

Auch für die sehr heißen Sterne, bei denen die Absorption der Strahlung durch Wasserstoff, Helium und freie Elektronen bewirkt wird, sind noch keine ausreichend begründeten Rechnungen durchgeführt worden.

Die Untersuchung des Verhaltens der verschiedenen Linien längs der Spektralsequenz ist nicht nur für die Lösung der allgemeinen Aufgabe, eine Deutung für die Spektralsequenz zu finden, von Wichtigkeit. Sie findet in zahlreichen Fällen auch praktische Verwendung. Solch ein Fall ist die Aufstellung der Skala der Sterntemperaturen. Wir nehmen an, daß wir Sterne betrachten, die prak-

tisch ein und denselben Wert der Schwerbeschleunigung g, aber verschiedene T_e besitzen. Wir kombinieren die theoretischen Konturen, berechnen aus ihnen für eine beliebige Linie W_λ und ermitteln den Wert für T_e, bei dem die gegebene Linie ein Maximum für W_λ besitzt. Dies sei bei $T_e = (T_e)_m$ der Fall. Andererseits wählen wir Sterne aus, die zu verschiedenen Spektraltypen gehören, doch ungefähr den gleichen Wert von g besitzen, und bestimmen auf spektralphotometrischem Wege, bei welchem Spektraltyp W_λ für die betrachtete Linie ein Maximum annimmt. Dies sei etwa bei dem Spektraltyp F 5 der Fall. Folglich können wir annehmen, daß die effektive Temperatur des Spektraltyps F 5 gleich $(T_e)_m$ ist. Auf dieselbe Weise können wir T_e auch durch viele andere Linien bestimmen, die das Maximum von W_λ im allgemeinen bei anderen Spektraltypen annehmen. Auf diese Weise erhalten wir die Skala der sogenannten „Ionisationstemperaturen", d. h. eine Beziehung zwischen dem Spektraltyp und der Temperatur des Sternes, wobei die auf die beschriebene Weise gefundenen Temperaturen im Grunde genommen effektive Temperaturen sind, was unmittelbar aus der Methode, nach der sie bestimmt wurden, folgt.

Die Skala der effektiven Temperaturen müssen wir auch auf die Sterne mit verschiedenen Werten von g ausdehnen, weil – wie wir weiter unten sehen werden – der Einfluß dieses Parameters auf das ermittelte T_e in zahlreichen Fällen beträchtlich ist.

Die Aufstellung der Skala der „Ionisationstemperaturen" war eine der Hauptaufgaben der alten „Ionisationstheorie" der Sternatmosphären [10, Kapitel IV]. In Anbetracht der starken Vereinfachungen dieser Theorie sind jedoch die aus verschiedenen Linien für ein und denselben Spektraltyp bestimmten T_e häufig verschieden.

Gegenwärtig besitzt die Methode der Maxima nur noch bei den heißen Sternen vom Typ O und B eine gewisse Bedeutung; bei diesen Sternen begegnet die Aufstellung einer Temperaturskala zahlreichen Schwierigkeiten (siehe weiter unten). Natürlich muß man auch hier die alte „Ionisationstheorie" vollständig durch Berechnungen ersetzen, die sich auf die Integration der allgemeinen Strömungsgleichungen (9.29), (9.32) und (10.2) unter Berücksichtigung der Hauptergebnisse des § 13 stützen. Mit den Resultaten dieser Rechnungen machen wir uns etwas später vertraut.

3. Der Einfluß der Schwerebeschleunigung

Nachdem wir in großen Zügen den Einfluß der Temperatur des Sternes auf sein Spektrum betrachtet haben, wenden wir uns der Rolle der Schwerebeschleunigung g zu.

Eine Verschiedenheit der Werte von g hat bekanntlich einen Unterschied in den Elektronendrücken zur Folge: je kleiner g, um so kleiner p_e und umgekehrt. Andererseits ist nach der Formel (5.11) der Ionisationsgrad um so größer, je kleiner p_e ist. Wenn wir also zwei Sterne mit derselben effektiven Temperatur vor uns haben, wobei der eine ein Zwerg und der andere ein Riese ist, wird die

Ionisation der Atome in der Atmosphäre des Riesen stärker sein als in der Atmosphäre des Zwerges, d.h., der Riese besitzt ein früheres Spektrum als der Zwerg.

Wir betrachten z.B. zwei Gruppen von Sternen mit verschiedenem g, etwa g' und g'', wobei $g' > g''$ sei. Dann treten bei der Fortbewegung längs der Spektralsequenz in Richtung höherer Temperaturen alle Erscheinungen im Spektrum (das Verschwinden der Linien, ihre Maxima, das Auftreten von Linien der ionisierten Elemente usw.), die von der Ionisation abhängig sind, in der zweiten Sterngruppe bei niedrigerem T_e ein als in der ersten Gruppe. Dies kann man sich mit Hilfe der Formeln (5.11) und (5.54) leicht veranschaulichen. Wenn man nämlich die angegebenen Formeln benutzt, muß man den Bruchteil der ionisierten Atome eines beliebigen Elementes im Verhältnis zu sämtlichen Atomen desselben Elementes (in demselben Volumen) berechnen. Wenn uns r-fach ionisierte Atome, die sich im k-ten Anregungszustand befinden, interessieren, so ist der fragliche Bruchteil, den wir mit $y_{r,k}$ bezeichnen, gleich

$$y_{r,k} = \frac{n_{r,k}}{n} = \frac{n_{r,k}}{n_r}\frac{n_r}{n}, \tag{16.1}$$

mit

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + \cdots = \sum_r n_r, \tag{16.2}$$

wobei die Summation sich über sämtliche Ionisationszustände erstreckt.

Für den ersten Faktor auf der rechten Seite von (16.1) gilt nach Formel (5.54)

$$\frac{n_{r,k}}{n_r} = \frac{g_{r,k}}{u_r} e^{-\frac{\varepsilon_{r,k}}{kT}}. \tag{16.3}$$

Der zweite Faktor ist mit Hilfe der Ionisationsgleichung (5.11) zu berechnen. Wir schreiben diese für $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$ usw. auf und multiplizieren die hingeschriebenen Gleichungen miteinander. Wir erhalten

$$\frac{n_1}{n_0} p_e = K_0, \quad \frac{n_2}{n_0} p_e^2 = K_0 K_1, \quad \frac{n_3}{n_0} p_e^3 = K_0 K_1 K_2 \text{ usw.}, \tag{16.4}$$

wobei wir hier die Bezeichnung (5.17) benutzen.

In Verbindung mit (16.4) nimmt der Ausdruck (16.2) die Gestalt

$$n = S(T, p_e)\, n_0 \tag{16.5}$$

mit

$$S(T, p_e) = 1 + \frac{K_0}{p_e} + \frac{K_0 K_1}{p_e^2} + \frac{K_0 K_1 K_2}{p_e^3} + \cdots \tag{16.6}$$

an.

Unter Benutzung von (16.1), (16.3), (16.4) und (16.5) erhalten wir für $y_{0,k}, y_{1k}, \ldots, y_{r,k}$ usw. die folgenden Ausdrücke:

$$y_{0,k} = \frac{g_{0,k}}{u_0} \frac{e^{-\frac{\varepsilon_{0,k}}{kT}}}{S(T, p_e)}, \tag{16.7}$$

$$y_{1,k} = \frac{g_{1,k}}{u_1} \frac{K_0 e^{-\frac{\varepsilon_{1,k}}{kT}}}{S(T, p_e)\, p_e}, \tag{16.8}$$

$$y_{2,k} = \frac{g_{2,k}}{u_2} \frac{K_0 K_1 e^{-\frac{\varepsilon_{2,k}}{kT}}}{S(T, p_e)\, p_e^2} \tag{16.9}$$

usw.

Wie wir schon in § 5 gezeigt haben, sind die Niveaus der aufeinanderfolgenden Ionisationsstufen gewöhnlich so weit voneinander entfernt, daß (bei vorgegebenem p_e) nur r-fach und $(r + 1)$-fach ionisierte Atome in genügender Zahl vorhanden sind, d.h. z.B. n_0 und n_1 oder n_1 und n_2 usw.[1]) Aus diesem Grunde wird die Summe (16.6) im wesentlichen nur durch zwei Glieder bestimmt. Daher finden wir in diesem Fall für die neutralen Atome

$$y_{0,k} \approx \frac{g_{0,k}}{u_0} \frac{e^{-\frac{\varepsilon_{0,k}}{kT}}}{1 + \frac{K_0}{p_e}}. \tag{16.10}$$

Untersucht man die neutralen Atome im Grundzustand, so erhält (16.10) folgende Gestalt ($\varepsilon_{0,1} = 0$)

$$y_{0,1} \approx \frac{g_{0,1}}{u_0} \frac{1}{1 + \frac{K_0}{p_e}}, \tag{16.11}$$

wobei wir daran erinnern, daß die Zustandssumme u_0 von der Temperatur abhängt. Das gleiche gilt auch für u_1, u_2 usw. In einigen Fällen kann die Änderung von u_r mit T sogar die Lage des Maximums von $y_{r,k}$ etwas verschieben. Dies kann man z.B. bei den Linien erläutern, die den Übergängen vom Grundniveau eines einfach ionisierten Atoms aus entsprechen. Diese Linien können wir nur dann beobachten, wenn sie in dem der Beobachtung zugänglichen Bereich des Spektrums liegen, d.h., wenn das nächste angeregte Niveau eine

[1]) Aus den Untersuchungen der Absorptionslinien folgt, daß in den Sternatmosphären bisweilen Atome in drei aufeinanderfolgenden Ionisationsstufen in vergleichbaren Mengen vorhanden sein können. Dies ist darauf zurückzuführen, daß sowohl T als auch p_e innerhalb der Sternatmosphäre selbst veränderlich ist. In diesem Fall richten wir uns nicht nach dem Ionisationszustand in einem Elementarvolumen, sondern registrieren den gesamten Effekt, der durch die verschiedenen Schichten der Atmosphäre hervorgebracht wird.

genügend kleine Anregungsenergie besitzt. Gleichzeitig ist das zweite Ionisationspotential bei einem solchen Atom in der Regel verhältnismäßig hoch. Daher gehen die Ionen bei einer Temperaturerhöhung zunächst in den Anregungszustand und dann erst in den zweiten Ionisationszustand über. Die Abnahme der Zahl der einfach ionisierten Atome, die sich im Grundzustand befinden, wird nach dem Maximum nicht so sehr durch die abermalige Ionisation, sondern vielmehr durch die Anregung auf das nächste Niveau bewirkt.

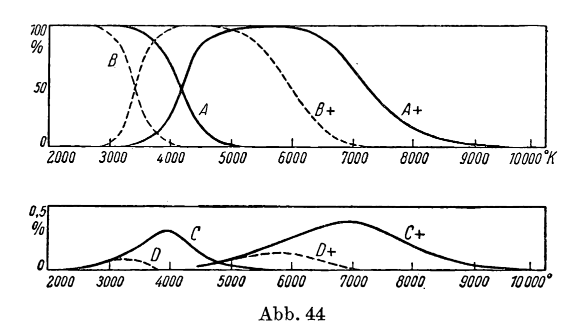


Abb. 44

Im allgemeinen überzeugt man sich von dem Einfluß der einzelnen Glieder in (16.6) durch ihre unmittelbare Berechnung, natürlich bei vorgegebenem p_e.

Die Anwendung der Gleichungen (16.7) und (16.8) auf das uns interessierende Problem des Einflusses von p_e auf den Verlauf der Größen $y_{r,k}$ ist in Abb. 44 dargestellt. Auf der Abszissenachse ist die Temperatur und auf der Ordinatenachse das in Prozenten ausgedrückte Verhältnis von $n_{r,k}$ zu n aufgetragen. Die Kurven A und B geben die Abhängigkeit der Größe y von der Temperatur für das Grundniveau des neutralen Kalziums an, von dem insbesondere die Resonanzlinie 4227 Å ausgeht. Die Kurve A ist für $p_e = 10$ bar nach der Formel (16.11) und die Kurve B für $p_e = 0{,}1$ bar berechnet. Die Kurven A_+ und B_+ stellen die Abhängigkeit der Größe y von der Temperatur für das Grundniveau des ionisierten Kalziums dar, von dem die Resonanzlinien H und K ausgehen. Die Kurve A_+ ist für $p_e = 10$ bar, die Kurve B_+ für $p_e = 0{,}1$ bar berechnet. Die Kurven A_+ und B_+ sind aus der Formel (16.11) abgeleitet, wobei $\varepsilon_{1,k} = 0$ ist, da das betrachtete Niveau das Grundniveau ist.

Die Kurve C ist für $p_e = 10$ bar berechnet und stellt die Abhängigkeit der Größe y von der Temperatur für das angeregte Niveau des neutralen Kalziums dar, von dem aus die Linie 6162 Å entsteht. Das Potential dieses Niveaus ist etwa gleich 1,9 eV. Die Kurve D ist für $p_e = 0{,}1$ bar berechnet. Beide Kurven sind aus der Formel (16.10) mit $\varepsilon_{0,k} \approx 1{,}9$ eV abgeleitet. Die Kurve C_+endlich stellt die Abhängigkeit der Größe y von der Temperatur für das angeregte Niveau des ionisierten Kalziums mit $\varepsilon_{1,k} \approx 3{,}2$ eV dar und ist für $p_e = 10$ bar berechnet. Von diesem Niveau geht die Linie 3737 Å aus. Die Kurve D_+ ist die

zugehörige Kurve mit $p_e = 0{,}1$ bar. Beide Kurven wurden aus der Formel (16.8) mit $\varepsilon_{1,k} = 3{,}2$ eV abgeleitet.

Die Kurven der Abb. 44 bestätigen vollkommen unsere oben aufgestellte Behauptung, daß beim Entlanggleiten längs der Spektralsequenz (in Richtung zunehmender T) alle Erscheinungen, die von der Ionisation abhängen, bei den Sternen mit kleinerem g und folglich kleinerem p_e bei niedrigerem T eintreten als bei den Sternen mit größerem g.

Wenn wir also zwei Sterne, einen Riesen und einen Zwerg, vom gleichen Spektraltyp vor uns haben, so besitzt der Riese eine niedrigere effektive Temperatur als der Zwerg. Ein und derselbe Spektraltyp bedeutet, grob gesprochen, einen gleichen Ionisationszustand der Atome. Daher ist für die Erreichung des vorgegebenen Ionisationszustandes der Atome in der Atmosphäre des Riesen mit kleinerem p_e eine geringere Temperatur erforderlich als in der Atmosphäre des Zwerges. Dies ist bei den Sternen, die kühler als die Sterne vom Typ F 5 sind, d.h. für die Sterne, bei denen die Aufspaltung in Zwerge und Riesen stärker ausgeprägt ist, deutlich zu beobachten. Quantitative Angaben über die Unterschiede in den T_e sind in Tabelle 11 aufgeführt.

4. Unterschiede in den Spektren der Zwerge und der Riesen. Der Effekt der absoluten Größe

Wir haben eben gezeigt, daß ein Unterschied in T_e durch einen Unterschied in p_e kompensiert werden kann, so daß ein Riese und ein Zwerg praktisch zu ein und demselben Spektraltyp gehören können. In Wirklichkeit ist diese Kompensation aber nicht vollkommen. Die Spektren der Zwerge und der Riesen sind sich gewissermaßen nur „im wesentlichen" ähnlich. Betrachtet man sie dagegen eingehender, so bestehen zahlreiche durchaus merkliche Unterschiede. Sie sind durch folgende Ursachen bedingt:

1. Wir schreiben die Ionisationsformel (5.11) in logarithmischer Form an:

$$\lg \frac{n_{r+1}}{n_r} = \lg \frac{u_{r+1}}{u_r} + \frac{5}{2} \lg T - \frac{5040}{T} \chi_r - \lg p_e + \lg \frac{2\,(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}}\, k^{\frac{5}{2}}}{h^3} \qquad (16.12)$$

wobei χ_r in Elektronenvolt ausgedrückt ist.

Aus (16.12) folgt, daß eine Vergrößerung oder Verkleinerung von p_e $\frac{n_{r+1}}{n_r}$ für alle Elemente in gleicher Weise verkleinert oder entsprechend vergrößert. Dagegen führt die Änderung von T zu einer Änderung von $\frac{n_{r+1}}{n_r}$, die für verschiedene Elemente verschieden ist. Für große χ_r ist die Änderung von $\frac{n_{r+1}}{n_r}$ bei vorgegebenem T größer als für kleine χ_r. Auf diese Weise ist die „Temperaturkompensation" (die Verkleinerung von T) beim Übergang von einem Zwergstern zu einem Riesenstern (vom gleichen Typ) für die leicht ionisierbaren

Atome zu schwach und für die schwer ionisierbaren Atome zu stark (χ_r tritt als Faktor bei dem wichtigsten Summanden $\frac{5040}{T}\chi_r$ auf). Daher ist zu erwarten, daß bei dem Übergang von den Zwergen zu den Riesen die Atome mit kleinem χ_r in den Atmosphären der Riesen stärker und die Atome mit großem χ_r schwächer als in den Atmosphären der Zwerge ionisiert sind. Bei den Elementen mit χ_r von mittleren Werten dürften die Unterschiede unwesentlich sein.

Dies muß sich in dem Verhalten der Absorptionslinien widerspiegeln, was man im allgemeinen auch beobachten kann. So sind z. B. die Linien von Ca I und Sr I bei den Zwergen stärker und bei den Riesen schwächer, während man bei den Linien von Ca II und Sr II das umgekehrte beobachtet (für Ca I ist $\chi_0 = 6{,}09$ eV; für Sr I ist $\chi_0 = 5{,}67$ eV; für Ca II ist $\chi_1 = 11{,}82$ eV; für Sr II $\chi_1 = 10{,}98$ eV).

2. Wir wissen (siehe § 13), daß die Kontur einer beliebigen Absorptionslinie und ebenfalls ihre Äquivalentbreite durch das Verhältnis η_ν bestimmt wird:

$$\eta_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\varkappa_\nu}. \tag{16.13}$$

Hierbei wird σ_ν neben anderen Faktoren durch die Druckeffekte bestimmt. Wenn daher die Temperaturkompensation für die Unterschiede im Ionisationsgrad für einen Riesen und einen Zwerg vom selben Typ tatsächlich vollkommen wäre[1]), müßte trotzdem ein gewisser Unterschied zwischen den Intensitäten der Absorptionslinien in ihren Spektren vorhanden sein.

Aus unseren Ausführungen können wir folgendes schließen: Betrachten wir Sterne vom gleichen Spektraltyp, doch mit verschiedenem g, und messen wir in den Spektren dieser Sterne die Äquivalentbreite W_λ einer beliebigen Linie, die gegenüber einer Änderung von p_e, also auch von g, ziemlich empfindlich ist, so ist ein bestimmter Zusammenhang zwischen g und W_λ zu erwarten. Dies wird durch entsprechende Beobachtungen vollkommen bestätigt. In der Praxis leitet man jedoch nicht den Zusammenhang zwischen W_λ und g, sondern zwischen W_λ (oder einer anderen charakteristischen Linienstärke, z. B. der nach Augenmaß geschätzten Intensität) und der absoluten Helligkeit des Sternes oder seiner bolometrischen Leuchtkraft L ab. Dieser Zusammenhang ist bekanntlich die Hauptmethode zur Bestimmung der spektroskopischen Parallaxen. Den Übergang von der Abhängigkeit zwischen W_λ und g zu der Abhängigkeit zwischen W_λ und L wird durch die Masse-Leuchtkraft-Beziehung ermöglicht (siehe weiter unten). Obwohl diese Beziehung nicht universell ist, ist sie nichtsdestoweniger für große Gruppen von Sternen im HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramm erfüllt. Für gewöhnlich wendet man in dem Bereich dieser Sterngruppen die Methode der spektroskopischen Parallaxen an. Das Wesen dieser Methode besteht bekanntlich in folgendem: Man wählt für eine feste Spektralklasse ein Paar be-

[1]) D. h. für alle Atome würde bei einem Riesen eine Verkleinerung von p_e durch eine Temperaturerniedrigung des Riesen gegenüber einem Zwerg kompensiert werden.

liebiger Linien aus, deren Intensitätsverhältnis sich merklich mit der absoluten Helligkeit des Sternes ändert, und bestimmt dieses Verhältnis für eine Reihe von Sternen mit bekannten[1]) und dabei verschiedenen absoluten Helligkeiten (doch vom gleichen Typ). Hierauf fertigt man eine graphische Darstellung an, auf deren Abszissenachse man die absoluten Helligkeiten in Größenklassen und auf deren Ordinatenachse man das angegebene Verhältnis aufträgt. Mit Hilfe dieser kalibrierten graphischen Darstellung können wir die unbekannte absolute Größe eines beliebigen Sternes (wiederum vom gleichen Typ) bestimmen, wenn wir in seinem Spektrum das Intensitätsverhältnis der betrachteten Linien messen. Zur Erreichung einer größeren Genauigkeit benutzt man nicht nur ein Linienpaar, sondern mehrere Paare.

Es liegt auf der Hand, daß sich der Satz von Linienpaaren, die zur Bestimmung der absoluten Größe notwendig sind, längs der Spektralsequenz ändert. Außerdem sind diese Linienpaare und die entsprechend kalibrierten graphischen Darstellungen (siehe oben) für Instrumente mit verschiedener Dispersion verschieden. Bei den frühen Sternen kann man die absolute Helligkeit einfach aus der Äquivalentbreite der Linien der Balmer-Serie bestimmen. Eine geeignete Methode haben wir schon in § 13 dargestellt. Ein Verzeichnis der Linien, die für die Methode der spektroskopischen Parallaxen geeignet sind, sowie eine ausführliche Darstellung der Methode ist in der Literatur zu finden [24, S. 241–250; 25, S. 49–53].

Es ist zu bemerken, daß die rein empirische Methode der spektroskopischen Parallaxen in praktischer Hinsicht außerordentlich fruchtbar war. Sie fußt – wie wir soeben erwähnt haben – auf der Annahme, daß alle Sterne des betrachteten und benachbarter Spektraltypen der „Masse-Leuchtkraft-Beziehung“ gehorchen:

$$L = \Phi(M) . \tag{16.14}$$

Dann finden wir auf Grund der Formeln (4.22) und (13.28), daß die Schwerebeschleunigung g eine Funktion der Leuchtkraft und der Temperatur T_e sein muß:

$$g = F(L, T_e) . \tag{16.15}$$

Andererseits hängt – wie wir oben gesehen haben – der Spektraltyp Sp von T_e und in geringerem Maße von g ab. Daher können wir schreiben:

$$Sp = f(g, T_e) . \tag{16.15'}$$

Wenn wir aus (16.15′) die Temperatur T_e als Funktion von Sp und g bestimmen und sie in (16.15) einsetzen, finden wir

$$g = \varphi(L, Sp) . \tag{16.15''}$$

Hieraus folgt, daß die Schwerebeschleunigung g bei vorgegebenem Sp eine Funktion von L ist und umgekehrt. Dies ist der Grund, weshalb W_λ bei vorgegebenem Sp hauptsächlich von L abhängen muß.

---

[1]) Die etwa aus trigonometrischen Parallaxen bestimmt wurden.

Die Abhängigkeit W_λ von g bei vorgegebenem T_e (oder bei vorgegebenem Sp) wird als *Effekt der absoluten Größe* bezeichnet.

Das Studium des Effektes der absoluten Größe war ein spezieller Gegenstand der „Ionisationstheorie". Heute muß man jedoch sämtliche Angaben dieser Theorie über die Abhängigkeit zwischen W_λ und g vollständig überprüfen. Die erwähnte Theorie war schematisiert und berücksichtigte nicht die durch die Stoßdämpfung hervorgerufene Linienverbreiterung. Die Wirksamkeit dieses Prozesses wird durch die Dichte der Materie bestimmt und muß folglich von g, d.h. bei konstantem T_e unmittelbar von der absoluten Größe abhängen!

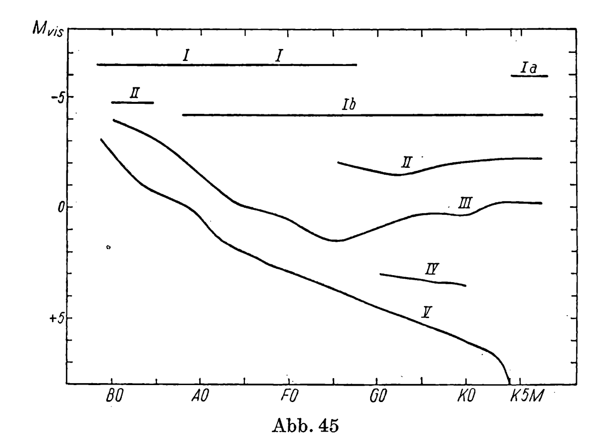


Abb. 45

Um den Effekt der absoluten Größe theoretisch untersuchen zu können, müssen wir so vorgehen, wie wir es oben besprochen haben. Für eine Reihe von Werten für T_e und g ist der Aufbau der Sternphotosphären zu berechnen, und auf Grund dieser Rechnungen sind die Konturen der uns interessierenden Absorptionslinien zu ermitteln. Wenn wir uns dann auf einen bestimmten Wert von T_e (oder Sp) festlegen, können wir die Abhängigkeit zwischen W_λ und g untersuchen.

Wir weisen darauf hin, daß man diese Rechnungen nicht auf die Sterne mit großer Leuchtkraft ausdehnen kann, da in den Atmosphären der Überriesen Rechnungen unter Zugrundelegung des „dynamischen" Wertes von g nicht ausgeführt werden können (siehe § 13). Außerdem übt in den Atmosphären der Überriesen die Linienverbreiterung durch Turbulenzeffekte einen verzerrenden Einfluß aus (§§ 12 und 13).

Im großen und ganzen ist der jetzige Stand der Theorie des Effektes der absoluten Größe völlig unbefriedigend. Hier liegt noch ein weites Arbeitsfeld. Einstweilen wird dieses Problem auf rein empirischem Wege gelöst.

Neben der rein quantitativen Methode der spektroskopischen Parallaxen kommen in jüngster Zeit sogenannte *Leuchtkraft-Klassen* in Gebrauch. Die Leuchtkraft-Klassen werden mit römischen Ziffern bezeichnet. Die Sterne der Klasse I sind Überriesen, während die Sterne der Klasse V in der Hauptsache die Sterne der Hauptreihe sind. In Abb. 45 ist eine entsprechende graphische Darstellung wiedergegeben, die eine vorläufige Kalibrierung der Leuchtkraft-Klassen angibt.[1]) Auf der Abszissenachse sind die Spektralklassen und auf der Ordinatenachse die absoluten Größen der Sterne aufgetragen.

Im Hinblick auf die Deutung der Spektralklassifikation ist zu bemerken, daß man diese natürlich weiterhin stetig vervollkommnen muß, um die verschiedenen zusätzlichen Faktoren, die ein Sternspektrum charakterisieren, zu berücksichtigen: die Turbulenz, die Abweichung von der „normalen" chemischen Zusammensetzung usw.

5. Die Skala der effektiven Temperaturen

Zum Abschluß gehen wir kurz auf die Skala der effektiven Sterntemperaturen ein [20, S. 155]. Hierunter wollen wir die aus der Beobachtung abgeleitete Beziehung zwischen dem Spektraltyp des Sternes und seiner effektiven Temperatur verstehen. Es ist klar, daß im Hinblick auf die oben durchgeführten Überlegungen diese Beziehung für Sterne mit verschiedener Leuchtkraft verschieden ist.

Uns interessiert nur die effektive Temperatur, weil wir gesehen haben, daß gerade die effektive Temperatur des Sternes der eigentliche Temperaturparameter ist. Mit Hilfe der Relation (4.22) bestimmt sie die gesamte, d. h. die bolometrische Leuchtkraft L des Sternes und mit Hilfe der Relation (4.21) den Strahlungsstrom πH, der zusammen mit der Schwerebeschleunigung g und der chemischen Zusammensetzung den thermischen Zustand der Sternatmosphäre und das Spektrum bestimmt. Die übrigen Abarten der Sterntemperaturen sind Parameter, die gewöhnlich eine nur beschränkte Rolle spielen.

Auf direktestem Wege kann man T_e mit Hilfe der Formel

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \tag{16.16}$$

bestimmen, die eine Beziehung zwischen L, R und T_e darstellt.

Hierbei stoßen wir jedoch auf eine Schwierigkeit (die bis zur Durchführung von geeigneten Untersuchungen unüberwindlich ist), die darin besteht, daß die Erdatmosphäre den ultravioletten Spektralbereich der Sternstrahlung mit Wellenlängen $\lambda < 3000$ Å wegschneidet. Bei Sternen mit genügend großem T_e kann aber der Anteil der Energie, der von der Erdatmosphäre nicht hindurchgelassen wird, den Energieanteil, der bis zum Beobachter gelangt, beträchtlich

---

[1]) Siehe z. B. MORGAN, KEENAN, KELLMAN. An atlas of stellar spectra. The University of Chicago press.

übersteigen. Nur bei den Sternen, die kühler als die Sonne sind, und bei der Sonne selbst ist der Einfluß der von der Erdatmosphäre „weggeschnittenen" Spektralbereiche von geringer Bedeutung. Daher müssen die Methoden zur Bestimmung von T_e für die Sterne der verschiedenen Spektraltypen auf diese oder jene Weise abgeändert werden, wobei man bisweilen auf indirekte Methoden zurückgreifen muß.

Für die sehr heißen Sterne (die heißer sind als die Sterne vom Typ B 2) sind die sichersten Methoden zur Bestimmung von T_e im Augenblick diejenigen, die von der Untersuchung der Absorptionslinien (oder Emissionslinien) Gebrauch

Tabelle 9

Element	Ionisations-potential	Anregungs-potential	T		Spektrum	
			$\lg g = 4{,}4$	$\lg g = 2{,}4$		
Si II	16,3	9,3	12900°	11200°	A 0	
C II	24,3	18,0	21000	16800		B 3
N II	29,5	18,4	21000	18700	B 2	B 1–2
Si III	33,3	18,9	22000	19400	B 1–2	B 1–2
He I	24,5	20,9	18000	14400	B 2–3	
O II	34,8	23,3	24000	21000	B 1	B 1
Si IV	44,9	23,9	31500	27000	O 9	O 9
N III	47,4	27,3	35000	31500	O 7–8	O 9
C III	47,7	29,4	30600	28000	O 9?	O 9–B 0
O III	54,9	33,7	37400	33600	O 9–B 0	O 8
N IV	77,3	39,7	39000	33600		
He II	54,2	50,8	44000	39000		
C IV	64,2	55,5	50000	44000		

machen. Der Vergleich der theoretischen Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum dieser Sterne mit der aus den Beobachtungen gewonnenen Verteilung führt zu weitaus unsicheren Resultaten, weil die relative Energieverteilung im Spektrum bei hohen Temperaturen schwach von der Temperatur abhängt.

Die zuverlässigste Methode zur Bestimmung von T_e für heiße Sterne aus den Absorptionslinien ist die in diesem Paragraphen betrachtete Methode der „Maxima" der Ionisationstheorie. Die auf diese Weise gewonnenen T_e sind in Tab. 9 aufgeführt. Das Anregungspotential bezieht sich auf das untere Niveau derjenigen Linie, deren Maximum aus den Beobachtungen bestimmt wurde [Tab. 9[1]]. Die Spektren in den beiden letzten Spalten wurden den Angaben verschiedener Beobachter entnommen.

[1]) Für die Aufstellung der Tabelle wurden Rechnungen von PANNEKOEK benutzt. Siehe A. PANNEKOEK, The stellar temperature scale. Astrophysical Journal 84, 481, 1936.

Bei den Sternen der Typen B 2–A 0 kann man drei Methoden verwenden:

1. Die eben angeführte Methode der Maxima.
2. Den Vergleich der theoretischen Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Sterne mit den Beobachtungen.
3. Die Benutzung der bolometrischen Korrektionen.

Wenden wir uns der zweiten Methode zu.

Der Vergleich der theoretischen Kurven mit den aus den Beobachtungen ermittelten Kurven muß zur Erreichung der größten Genauigkeit in einem möglichst großen Wellenlängenintervall durchgeführt werden, unter Einbeziehung des Sprunges an der Grenze der Balmer-Serie und des Bereiches von $\lambda = 3000$ Å bis zu dieser Grenze ($\lambda = 3646$ Å). Wenn wir der beobachteten Energieverteilung im Spektrum eines Sterns von vorgegebenem Typ auf die bestmögliche Weise eine theoretische Kurve anpassen, die für eine gewisse Temperatur T'_e abgeleitet worden ist, können wir annehmen, daß diese Temperatur auch den betrachteten Spektraltyp charakterisiert. Diese Methode ist zuverlässig genug, weil man vom Standpunkt der Beobachtungen die beobachtete Energieverteilung jenseits der Grenze der Balmer-Serie, diesseits der Seriengrenze und die Größe des Sprunges D an der Seriengrenze [(siehe Formel (6.28)] als unabhängige Charakteristika des Spektrums betrachten kann.

Wir wenden uns der dritten Methode zu. Auf Grund der ermittelten theoretischen Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Sterne können wir für die Sterne der verschiedenen Typen die theoretische bolometrische Korrektion ausrechnen:

$$\Delta M_{\text{bol}} = M_{\text{bol}} - M_{\text{vis}}. \tag{16.17}$$

Dann können wir bei Kenntnis der visuellen Größe M_{vis} des Sternes (oder der photovisuellen) nach der unmittelbar einleuchtenden Formel

$$2{,}5 \lg \frac{L}{L_\odot} = (M_{\text{bol}})_\odot - M_{\text{bol}} \tag{16.18}$$

auch L bestimmen. (Von den Größen $L_\odot$ und $(M_{\text{bol}})_\odot$ wird später die Rede sein.) Auf diese Weise reduziert sich die Aufgabe auf die Bestimmung des Sternradius, worauf man nach (16.16) mit den bekannten Größen L und R die Größe T_e bestimmen kann.

Dabei kann man R in zwei Fällen direkt bestimmen:

1. Wenn der Stern die Komponente einer Bedeckungsveränderlichen ist und man die Spektren beider Komponenten trennen kann (andernfalls könnte man nicht feststellen, zu welchem Spektraltyp der Stern gehört, auf den sich dieser oder jener Wert von T_e bezieht). Außerdem muß die Parallaxe des Systems bekannt sein. Im vorliegenden Fall ermittelt man R aus der Bahnbestimmung.

2. Wenn die Entfernung des Sterns bekannt ist, kann man interferometrische Messungen durchführen, die den Winkeldurchmesser des Sternes ergeben. Für die Sterne früher Klassen liegen derartige Messungen wegen der verhältnis-

mäßig kleinen Dimensionen der betrachteten Sterne im Augenblick noch nicht vor.

Die dritte Methode zur Bestimmung der effektiven Temperaturen ist im Grunde genommen eine Verbesserung der nach der zweiten Methode gewonnenen Temperaturen, weil man bei ihr eine schon bekannte theoretische Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Sterne benutzen muß.

Eine Skala der effektiven Temperaturen für heißere Sterne als die Sterne A 0 [20, S. 155], die von KUIPER unter Zugrundelegung der dargestellten Methoden abgeleitet wurde, ist in Tabelle 10 aufgeführt.

Tabelle 10

Spektrum	lg T_e	Δm_b	Spektrum	lg T_e	Δm_b
O 8	4,60	— 3,8	B 3	4,27	— 2,03
O 9	4,50	— 3,24	B 4	4,23	— 1,82
B 0	4,40	— 2,70	B 5	4,19	— 1,60
B 1	4,39	— 2,48	B 6	4,16	— 1,44
B 2	4,31	— 2,24	B 8	4,09	— 1,07
			A 0	4,03	— 0,76

Völlig unbestimmt ist die Frage nach der Temperaturskala für die Sterne von sehr frühem Typ. Eine von KUIPER durchgeführte Extrapolation ergab für diese Sterne sehr hohe effektive Temperaturen. Für den Typ 05 ergab sich T_e zu 80000°, für den Typ 06 zu 63000° und für den Typ 07 zu 50000°. Es liegen aber zahlreiche neue Untersuchungen vor, aus denen hervorgeht, daß diese Temperaturen viel zu hoch sind. Anscheinend besitzen die Sterne vom Typ 05 eine effektive Temperatur, die nicht größer als 45000–50000° ist. Hierbei geht die Änderung von T_e mit der Änderung des Spektraltyps für die O-Sterne und die frühen Unterklassen des Typs B langsamer vor sich, als in Tabelle 10 angegeben wird. Dieses Problem erfordert noch sehr sorgfältige Untersuchungen.

Eine Skala der bolometrischen Korrektionen für die Sterne B2–A0 wurde von E. MUSTEL unter Zugrundelegung theoretischer Kurven von der Art der Abbildung 17 abgeleitet. Für die heißeren Sterne sind die bolometrischen Korrektionen auf Grund einer vereinfachten Theorie des Strahlungsgleichgewichtes berechnet worden (Rechnungen von PANNEKOEK).

Für die Sterne vom Typ A–F ist die Anwendung der für die Sterne vom Typ A0–B2 angegebenen Methoden erschwert, weil in ihren Atmosphären die Absorption der Strahlung durch den Wasserstoff und die H^--Ionen gemeinsam bewirkt wird. Zuverlässige theoretische Berechnungen des Strahlungsstromes πH_λ liegen aber im Augenblick für die Sterne dieses Typs noch nicht vor. Daher müssen wir uns hier mit Interpolationsmethoden begnügen, da für die Sterne, die heißer als die A0-Sterne und kühler als die Sterne vom Typ G0–F8 sind,

die Beziehung zwischen der effektiven Temperatur und dem Spektraltyp zuverlässig genug bekannt ist. Aus diesem Grunde wenden wir uns sofort den Sternen zu, die kühler als die Sterne vom Typ F8–G0 sind.

Hier wird die Situation dadurch außerordentlich vereinfacht, daß in den Spektren der Sterne F8–G0 der Energieanteil, der in den unzugänglichen Bereich mit $\lambda < 3000$ Å fällt, klein und für die Sterne vom Typ K und M verschwindend klein ist. Für die betrachtete Sterngruppe kann man L mit Hilfe radiometrischer Messungen ermitteln, die Δm_b liefern. Bei bekanntem Δm_b können wir auch L bestimmen. Ein System der Größen Δm_b wurde nach dieser Methode zum erstenmal von P. P. PARENAGO[1]) und darauf von KUIPER aufgestellt. Der Sternradius R kann auf die gleiche Weise bestimmt werden, wie es oben dargestellt wurde. Insbesondere liegen für einige rote Riesen interferometrische Bestimmungen vor.

Bei den Zwergen sind Bedeckungsveränderliche, deren Spektren getrennt werden können, zu benutzen. Es versteht sich von selbst, daß die sicherste Temperaturbestimmung bei der Sonne – einem Zwerg vom Typ d G3 – vorliegt. Die effektive Temperatur der Sonne, die man aus der Solarkonstante ermittelt hat, ist gleich 5710°, $(M_{\text{bol}})_{\odot} = +4{,}^{\text{m}}7$ und $L = 2 \cdot 10^{33}$ erg/sec. Das System der auf die beschriebene Weise bestimmten effektiven Temperaturen der zu den Typen G, K und M gehörigen Sterne ist in Tabelle 11 aufgeführt. Die Temperaturen für die Sterne vom Typ A5, F0 und F5 wurden – wie wir

Tabelle 11

Spektrum	T_e	Spektrum	T_e	Spektrum	T_e	Spektrum	T_e
A 0	10700°	dG 0	6000°	gG 0	5200°	gM 2	3200°
A 5	8530	dG 2	5710	gG 5	4620	gM 4	2930
F 0	7500	dG 5	5360	gK 0	4230	gM 6	2750
F 5	6470	dK 0	4910	gK 5	3580	gM 8_e	2590
—	—	dK 2	4650	gM 0	3400	—	—
—	—	dK 5_+	3900	—	—	—	—
—	—	dM 2	3200	—	—	—	—

oben erwähnt haben – durch Interpolation gewonnen, wobei die aus den Intensitäten der Absorptionslinien gewonnenen Anhaltspunkte berücksichtigt wurden.

Aus Tabelle 11 kann man den Unterschied in T_e für einen Zwerg und einen Riesen von gleichem Spektraltyp ablesen.

In Tabelle 12 ist die auf die angegebene Weise ermittelte Skala der bolometrischen Korrektionen für die Sterne der verschiedenen Spektraltypen auf-

[1]) P. P. PARENAGO, Untersuchung der Masse-Leuchtkraft-Beziehung. Astronomisches Journal **14**, Nr. 1, 33, 1937 (П. П. Паренаго, Исследование зависимости светимость–масса. Астрономический журнал **14**, No. 1, 33, 1937).

geführt. In dieser Tabelle bedeutet M die absolute visuelle Größe des Sternes; ein hinter diesem Wert angeführter Doppelpunkt (:) weist auf die Unsicherheit in dem gefundenen Resultat hin. Die in Klammern stehenden Ausdrücke wurden durch Extrapolation gewonnen.

Tabelle 12

Spektrum	Hauptast	$M = 0{,}0$	$M = -4{,}0$	Spektrum	Hauptast	$M = 0{,}0$	$M = -4{,}0$
F 2	– 0,04	– 0,04	– 0,04	K 4	– 0,55	– 1,11	– 1,56
F 5	– 0,04	– 0,08	– 0,12	K 5	– 0,85	– 1,35	– 1,86:
F 8	– 0,05	– 0,17	– 0,28	K 6	– 1,14	—	—
G 0	– 0,06	– 0,25	– 0,42	M 0	– 1,43	– 1,55	– 2,2
G 2	– 0,07	– 0,31	– 0,52	M 1	– 1,70	– 1,72	– 2,6
G 5	– 0,10	– 0,39	– 0,65:	M 2	– 2,03	– 1,95	– 3,0:
G 8	– 0,10	– 0,47	– 0,80:	M 3	– (2,35)	– 2,26	– 3,6:
K 0	– 0,11	– 0,54	– 0,93:	M 4	– (2,7)	– 2,72	—
K 2	– 0,15	– 0,72	– 1,20	M 5	– (3,1:)	– 3,4:	—
K 3	– 0,31	– 0,89	– 1,35				

Die aufgeführten Tabellen zeigen nur vorläufige Ergebnisse. Die größte Unsicherheit besitzen die Temperaturen der sehr heißen Sterne und der Sterne vom Typ A und F. Für viele Aufgaben der Praxis ist die Genauigkeit der aufgeführten Tabellen jedoch völlig ausreichend.

Die Skala der effektiven Temperaturen und der bolometrischen Korrektionen kann man insbesondere auch dafür benutzen, um in dem „Spektrum-Leuchtkraft"-Diagramm die Linien gleicher Radien und, wenn die Sternmassen bekannt sind, die Linien gleicher Massen und gleicher Dichten zu ziehen.

Ein derartiges Diagramm, das von P. P. Parenago angefertigt wurde, ist in Abb. 46 dargestellt. Es ist sowohl für die praktischen Aufgaben der Stellarastronomie als auch für orientierende Berechnungen bei verschiedenen astrophysikalischen Problemen vorzüglich geeignet. Auf der Ordinatenachse sind die absoluten bolometrischen Helligkeiten der Sterne und auf der Abszissenachse lg T_e und die Spektralklassen aufgetragen. Die groben vertikalen Striche auf dem Diagramm bezeichnen Sterngruppen und Sternfolgen. Ihre Höhe gibt die ungefähre Streuung in M an. In dem Diagramm sind die Gruppen und die Folgen folgendermaßen aufgetragen: $A - B$ = Hauptreihe, $C - D$ = Riesen, $E - F$ = Überriesen, $G - H$ = Cepheiden, $I - K$ = Unterriesen, L = weiße Zwerge, $M - N$ = die von P. P. Parenago entdeckte Folge der Unterzwerge, $O - P$ = die weißblaue Folge, deren Kontinuität von B. A. Woronzow-Weljaminow festgestellt wurde.

Die Linien in dem Diagramm sind Linien gleicher Radien, gleicher Massen und gleicher Dichte. Sie sind folgendermaßen markiert worden: Die ausgezo-

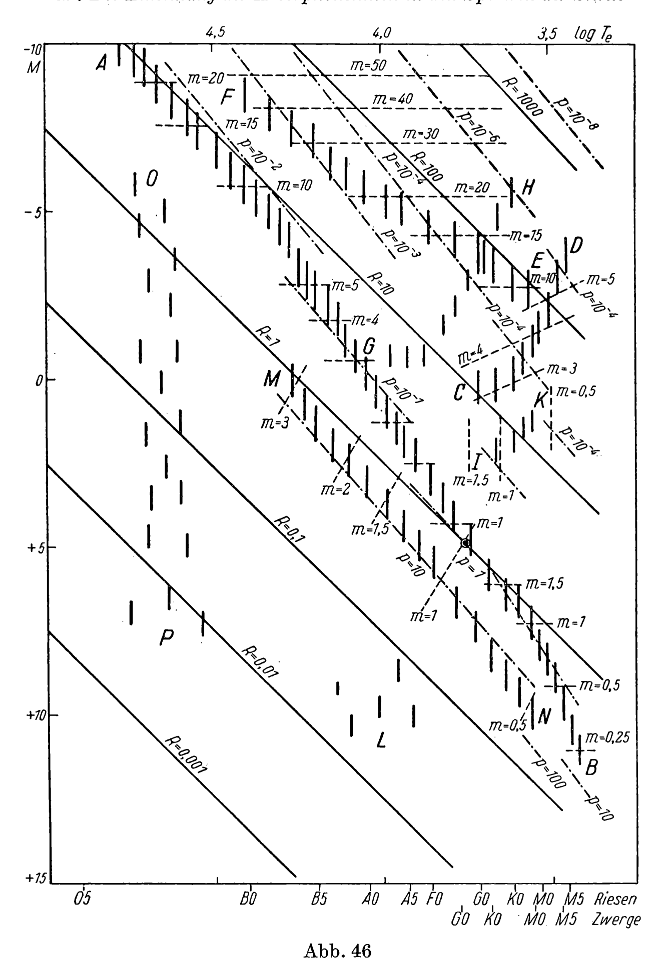


Abb. 46

genen Linien sind die Linien gleicher Radien, die nach der Formel

$$\lg R = 8{,}50 - 0{,}2\, M_{\mathrm{bol}} - 2 \lg T_e \qquad (16.19)$$

berechnet wurden.

Diese Formel [24, S. 231–234] wurde aus der Formel (16.16) abgeleitet [unter Beachtung, daß die absolute bolometrische Helligkeit der Sonne $(M_{\mathrm{bol}})_{\odot} = +\,4{,}^{\mathrm{m}}7$ ist].

Die gestrichelten Linien sind die Linien gleicher Masse. Sie wurden von P. P. PARENAGO auf Grund eigener und gemeinsam mit A. G. MASSEWITSCH durchgeführter Untersuchungen abgeleitet.

Wir zitieren entsprechende empirische Formeln für den Zusammenhang zwischen L_{bol} und der Sternmasse M.

Für die Sterne des oberen Abschnittes der Hauptreihe, die heißer als die Sonne sind:

$$M = 0{,}89\, L_{\text{bol}}{}^{0,25}. \tag{16.20}$$

Für die übrigen Sterne der Hauptreihe:

$$M = 2{,}4\, L_{\text{bol}}{}^{0,44}. \tag{16.21}$$

Für die Unterzwerge:

$$M = L_{\text{bol}}^{\frac{1}{4}} R^{-\frac{1}{3}}. \tag{16.22}$$

Für die Unterriesen:

$$M = 1{,}8\, \frac{\sqrt{L_{\text{bol}}}}{R}. \tag{16.23}$$

Für die Riesen:

$$M = 1{,}1\, L_{\text{bol}}{}^{0,4} R^{-0,25}. \tag{16.24}$$

Für die Überriesen:

$$M = 1{,}5\, L_{\text{bol}}{}^{0,27}. \tag{16.25}$$

Die Werte L_{bol} und M sind in Einheiten von $(L_{\text{bol}})_{\odot}$ und M_0 gemessen.

Die strichpunktierten Linien des Diagramms stellen die Linien gleicher Dichte dar, die aus den bekannten Massen und Radien nach der Formel

$$\lg \varrho = \lg M + 0{,}6\, M_{\text{bol}} + 6 \lg T_e - 25{,}50 \tag{16.26}$$

ermittelt wurden; diese wurde aus der Formel $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho$ und der Formel (16.19) abgeleitet. Hierbei ist natürlich von den mittleren Dichten die Rede.

In diesem Paragraphen haben wir eine zweiparametrige Spektralklassifikation betrachtet. In Wirklichkeit liegen die Dinge weit schwieriger. Außer durch die effektive Temperatur und die Schwerebeschleunigung auf der Sternoberfläche wird der Charakter des Sternspektrums noch durch andere Faktoren bestimmt, z.B. die Rotation des Sternes, die Turbulenz der Gase, aus denen die Atmosphäre zusammengesetzt ist, usw. Außerdem können Abweichungen der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphäre von der „normalen" Zusammensetzung von großem Einfluß sein. Endlich erfordern die Spektren der verschiedenen Sternfolgen und Gruppen, wie die Folge der Unterzwerge, die Gruppe der „Metallsterne" usw., eine gesonderte Behandlung.

KAPITEL III

Physik der Sonnenatmosphäre

§ 17. Der Aufbau der Sonnenphotosphäre. Die Granulation. Die Konvektion

1. Der Aufbau der Sonnenphotosphäre

Den Bau der Sonnenphotosphäre könnten wir theoretisch nach den gleichen Methoden bestimmen, wie wir sie in § 7 auf das Studium der Atmosphären der A0-Sterne angewandt haben. Wie wir jedoch in § 6 gezeigt haben, ist die für die Sonnenphotosphäre entwickelte Theorie des Strahlungsgleichgewichtes zu korrigieren. Der mittlere Absorptionskoeffizient, den man dadurch bestimmt, daß man die Beobachtungen und die Theorie in Übereinstimmung bringt, ist um das 1,4fache größer als der theoretische Absorptionskoeffizient. Daher ist es am zweckmäßigsten, die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes nicht auf die Sonne anzuwenden, sondern die Temperaturverteilung in ihrer Atmosphäre unmittelbar aus den Beobachtungen abzuleiten. Zu diesem Zweck kann man das am Schluß des § 7 angegebene Verfahren verwenden. Hiernach ist die Energieverteilung auf der Sonnenscheibe in einer beliebigen Wellenlänge so genau wie möglich (besonders am Rande der Sonnenscheibe) zu ermitteln. Aus dieser kann man dann bei Anwendung der Formel (7.31) das Gesetz für die Änderung der Funktion B_λ mit der optischen Tiefe τ_λ für dieselbe Wellenlänge ableiten.

Wir untersuchen jetzt, wie wir bei Kenntnis des Zusammenhanges zwischen B_λ und τ_λ und somit des Zusammenhanges zwischen T und τ_λ für eine beliebige Wellenlänge λ die Verteilung der anderen physikalischen Größen, z.B. des Gesamtgasdruckes p, des Elektronendruckes p_e, der Dichte ϱ usw., als Funktion der Tiefe bestimmen können:

Wir geben die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichtes an, wobei wir mit Rücksicht auf unsere Ausführungen in § 7 den Einfluß des Strahlungsdruckes vernachlässigen können:

$$dp = g\varrho dh. \tag{17.1}$$

In dem Spektralbereich von $\lambda = 4000$ Å bis $\lambda = 10000$–15000 Å, in dem man gewöhnlich B_λ als Funktion von τ_λ bestimmt, wird die Absorption der Strahlung hauptsächlich durch die negativen Wasserstoffionen bestimmt. In diesem Fall wird der auf 1 g der Materie in der Photosphäre bezogene Absorptionskoeffizient durch die Gleichung (13.13) angegeben, wobei man k_λ (H^-) der

graphischen Darstellung der Abb. 15 entnehmen kann. Außerdem können wir nach den Ausführungen des § 13 in der gesamten Sonnenatmosphäre $(n_0)_H \approx n_H$ setzen.

Daher können wir

$$d\tau_\lambda = \varkappa_\lambda(H^-)\varrho\,dh = n_H k_\lambda(H^-)\,p_e\,dh \tag{17.2}$$

schreiben.

Die Division von (17.1) durch $n_H k_\lambda(H^-)\,p_e\,dh$ ergibt unter Beachtung von (13.9)

$$\frac{dp}{d\tau_\lambda} = \frac{g m_H b}{k_\lambda(H^-)\,p_e}, \tag{17.3}$$

wobei b die geschweifte Klammer aus (13.9) und etwa gleich 1,8 — 1,9 ist. Es ist zu bemerken, daß $k_\lambda(H^-)$ nur eine Funktion der Temperatur und der Wellenlänge (Frequenz) ist.

Wir multiplizieren (17.3) mit $2\,p$ und erhalten

$$\frac{dp^2}{d\tau_\lambda} = \frac{2 g b m_H}{k_\lambda(H^-)\,\frac{p_e}{p}}. \tag{17.4}$$

Wir leiten jetzt einen Ausdruck für den Quotienten

$$\frac{p_e}{p} = \frac{n_e k T}{n k T} = \frac{n_e}{n} \tag{17.5}$$

her, wobei n_e die Zahl der freien Elektronen in 1 cm^3 und n die Gesamtzahl der Teilchen in 1 cm^3 ist.

Für n_e können wir

$$n_e = n_H x_H + \sum n_s x_s = n_H(x_H + \sum a_s x_s) \tag{17.6}$$

schreiben, wobei a_s die Häufigkeit eines Elementes im Verhältnis zum Wasserstoff ist [Formel (5.1)]. Die Summation erstreckt sich genau genommen über sämtliche Elemente. In der Praxis kann man sich jedoch auf die Metalle beschränken und braucht nur diejenigen zu berücksichtigen, bei denen die Größe $a_s x_s$ verhältnismäßig groß ist. Dies sind besonders die Metalle mit großen relativen Häufigkeiten a_s und verhältnismäßig niedrigem Ionisationspotential (Mg, Na, Ca, Al, Si und Fe). Die Ionisation der anderen Elemente (He, O, C, N usw.) liefert in der Sonnenatmosphäre nur sehr wenig freie Elektronen. Die zweite Ionisation können wir hier ebenfalls vernachlässigen.

Die Gesamtzahl aller Teilchen in 1 cm^3 der Sonnenphotosphäre setzt sich aus Atomen und Elektronen zusammen. Von den Atomen braucht man nur die des Wasserstoffs und des Heliums zu berücksichtigen, weil nach Tabelle 1 die Anzahl der anderen Atome beträchtlich kleiner ist. Die Zahl der Elektronen in 1 cm^3 kann man nach der Formel (17.6) bestimmen. Hierbei ist klar, daß $n_e \ll n_H + n_{He}$ ist, weil in der Sonnenphotosphäre $x_H \ll 1$ ist und die Zahl der Elektronen in 1 cm^3, die von der Ionisation der Metalle herrühren, nicht größer sein kann als die Zahl der Metallatome selbst, die ihrerseits beträchtlich gerin-

Tabelle 13

		Für $\lambda = 5010$ Å			
h km[1])	τ_λ	$\frac{5040}{T}$	T	a (H$^-$)	$\lg p_e$
	0,00	1,143	4410	$14{,}1 \cdot 10^{-26}$	
— 223	0,005	1,090	4623	11,7	$\bar{1}$,71
— 188	0,01	1,053	4786	10,0	$\bar{1}$,91
— 152	0,02	1,029	4898	9,1	0,10
— 132	0,03	1,011	4985	8,5	0,22
— 104	0,05	0,984	5122	7,6	0,38
— 94	0,06	0,963	5234	7,0	0,48
— 79	0,08	0,946	5328	6,5	0,59
— 69	0,10	0,935	5390	6,2	0,66
— 67	0,11	0,929	5425	6,1	0,70
— 61	0,12	0,927	5437	6,0	0,72
— 57	0,13	0,927	5437	6,0	0,73
— 52	0,14	0,929	5425	6,1	0,74
— 49	0,15	0,937	5379	6,2	0,71
— 22	0,24	0,920	5478	5,8	0,85
— 8	0,31	0,896	5625	5,3	1,01
+ 4	0,40	0,874	5765	4,8	1,16
+ 14	0,48	0,855	5895	4,4	1,28
+ 26	0,65	0,821	6138	3,7	1,53
+ 33	0,81	0,796	6332	3,3	1,71
+ 39	0,98	0,775	6503	3,0	1,87
+ 44	1,13	0,758	6649	2,8	2,00
+ 47	1,29	0,742	6792	2,6	2,12
+ 50	1,46	0,728	6923	2,4	2,23
+ 52	1,60	0,716	7039	2,2	2,32
+ 56	2,00	0,690	7304	2,0	2,52
+ 61	2,5	0,683	7380	1,9	2,58

[1]) $h = 0$ für die Schicht, in der $T = 5713°$, $h > 0$ in Richtung zum Sonnenmittelpunkt, und $h < 0$ in Richtung zur Oberfläche.

		Für den mittleren Absorptionskoeffizienten			
$\lg p$	$\lg n_H$	$\bar{\tau}$	$T\,(h)$	$\lg p_e$	$\lg p$
4,11	16,24	0,00	4670	$\bar{1}$,84	4,18
4,27	16,38	0,02	4690	$\bar{1}$,98	4,35
4,44	16,53	0,04	4740	0,16	4,52
4,53	16,61	0,05	4780	0,26	4,61
4,65	16,72	0,09	4860	0,38	4,75
4,69	16,75	0,10	4900	0,44	4,79
4,75	16,81	0,14	4970	0,50	4,86
4,79	16,84	0,16	5025	0,58	4,90
4,80	16,85	0,18	5045	0,60	4,91
4,82	16,87	0,20	5085	0,64	4,94
4,84	16,89	0,22	5115	0,67	4,96
4,86	16,91	0,23	5160	0,70	4,98
4,87	16,92	0,25	5180	0,72	4,99
4,98	17,02	0,40	5410	0,94	5,11
5,04	17,06	0,55	5600	1,10	5,16
5,08	17,09	0,70	5770	1,28	5,21
5,12	17,12	0,90	5970	1,48	5,25
5,16	17,15	1,34	6350	1,84	5,29
5,18	17,16	(1,55)	(6550)	(2,0)	(5,32)[2]
5,20	17,17				
5,22	17,18				
5,23	17,18				
5,24	17,18				
5,25	17,18				
5,26	17,18				
5,27	17,19				

[2]) Die Angaben in Klammern sind extrapoliert.

ger ist als die der Wasserstoffatome. Daher können wir schreiben:

$$n \approx n_{\mathrm{H}} + n_{\mathrm{He}} = n_{\mathrm{H}}\{1 + a_s(\mathrm{He})\} \approx 1{,}2 n_{\mathrm{H}}, \tag{17.7}$$

wobei wir nach Tabelle 1 a_s (He) $\approx 0{,}2$ gesetzt haben.

Den Ausdruck (17.5) können wir jetzt folgendermaßen umformen:

$$\frac{p_e}{p} = \frac{n_e}{n} = \frac{x_{\mathrm{H}} + \sum a_s x_s}{1{,}2} = \varphi(p_e, T), \tag{17.8}$$

weil x_{H} und x_s nur Funktionen von p_e und T sind und nach der Ionisationsformel (5.16) berechnet werden können.[1]) Es ist klar, daß man zur Berechnung von $\varphi(p_e, T)$ die Größen a_s, z.B. aus Tabelle 1, vorgeben muß.

Die Gleichung (17.4) löst man gemeinsam mit (17.8) nach dem Iterationsverfahren.

Die Integration beginnt an der Grenze der Photosphäre, wo $\tau_\lambda = 0$ ist. Für diesen Wert von τ_λ haben wir

$$T = T_0, \quad p_e = (p_e)_0. \tag{17.9}$$

Ohne daß die aus der Integration von (17.4) gewonnenen Größen p und p_e an Genauigkeit einbüßen, können wir annehmen, daß $(p_e)_0 = 0$ ist, wenn auch p_e an der Grenze der Photosphäre eigentlich von Null verschieden ist und den Wert p_e in der untersten Schicht der Chromosphäre etwas übertrifft (siehe § 21).

Als Resultat der Integration von (17.4) unter Berücksichtigung von (17.8) erhalten wir eine Beziehung zwischen T, p und p_e, wobei der Zusammenhang zwischen T und τ_λ schon aus den Beobachtungen bekannt ist.

Untersuchen wir jetzt, wie man den Verlauf der anderen Größen in der Sonnenphotosphäre findet.

Wir wenden uns der Gesamtdichte ϱ der Materie zu. Nach (17.7) haben wir $p = nkT \approx 1{,}2\, n_{\mathrm{H}} k T$. Andererseits ist n_{H} durch die Beziehung (13.9) mit der Dichte ϱ verknüpft. Folglich können wir ϱ bei Kenntnis von p und T bestimmen. Endlich vollzieht sich der Übergang zu der linearen Tiefe durch (17.1):

$$h - h_0 = \frac{1}{g}\int \frac{dp}{\varrho}, \tag{17.10}$$

wobei h_0 eine Integrationskonstante ist. Die Integration von (17.10) führt man numerisch durch; den Zusammenhang zwischen p und ϱ haben wir schon ermittelt.

Die auf den Seiten 274–275 aufgeführte Tabelle 13 wurde von W. S. Berditschewskaja unter Zugrundelegung von Angaben von Bruggencate, Gollnow und Jäger[2]) zusammengestellt. Diese Angaben (die Beziehung zwischen

---

[1]) Einige Autoren führen einen mittleren Ionisationsgrad x_{M} der Metalle ein, der im Grunde gleich der Summe $\Sigma\, a_s\, x_s$ ist.

[2]) P. Ten Bruggencate, H. Gollnow und F. Jäger, Über einen Versuch, die wahre Intensitätsverteilung am äußersten Sonnenrand zu ermitteln. Z. für Astrophys. **27**, 223, 1950.

B_λ und τ_λ) wurden aus einer Untersuchung der verfinsterten Sonnenscheibe während einer partiellen Finsternis gewonnen. Die Wellenlänge beträgt 5010 Å.

Wir weisen darauf hin, daß die gegenwärtig vorliegenden Angaben über das Gesetz der Änderung der Strahlungsintensität auf der Sonnenscheibe von verschiedenen Fehlern behaftet sind und sich etwas voneinander unterscheiden (hier sind noch weitere, sehr sorgfältige Beobachtungen, besonders am Sonnenrand, erforderlich). Trotz der im Augenblick noch vorliegenden unvollkommenen Angaben besitzt die betrachtete Methode gegenüber den Methoden, die sich auf die Verwendung der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes stützen, wesentliche Vorzüge.

Das Problem des Aufbaus der Sonnenphotosphäre könnten wir auch nach der gleichen Methode lösen, wie wir sie in § 7 für einen A0-Stern durchgeführt haben. Dabei muß man ein theoretisches Gesetz für die Temperaturverteilung in der Sonnenphotosphäre benutzen. Dieses Gesetz können wir in Übereinstimmung mit unseren Ausführungen über die Sonnenphotosphäre in § 6 der Gleichung (4.26) entnehmen, wobei wir natürlich einen mittleren kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten einführen müssen [Formel (6.30)]. In den vier letzten Spalten der Tabelle 13 sind die Ergebnisse dieser Rechnungen aufgeführt.[1]) Naturgemäß kann man bei der Untersuchung großer optischer Tiefen, aus denen gar keine Strahlung mehr zu uns gelangt, nicht ohne diese Rechnungen auskommen, da man sonst keine Beziehung zwischen B_λ und τ_λ ableiten könnte.

2. Die Konvektionsprozesse in der Sonnenphotosphäre. Die Granulation

Das von uns betrachtete Modell der Sonnenphotosphäre ist natürlich etwas schematisiert. Es ist im wesentlichen das einer rein statischen Photosphäre. Das Auftreten der Granulation in der Sonnenphotosphäre deutet aber auf eine Bewegung des Gases hin, wenn sich auch die Sonnenphotosphäre im Mittel im Gleichgewichtszustand befindet. Wir erinnern, daß man *als Granulation* die „Körnigkeit" der beobachtbaren Sonnenoberfläche bezeichnet. Die einzelnen hellen „Körner" auf dem dunkleren Hintergrund nennt man *Granula.* Der mittlere Durchmesser der Granula ist nach Untersuchungen von A. Hanski (Pulkowo) von der Größenordnung 1″–2″. Dies entspricht einer Länge von 700–1400 km auf der Sonnenoberfläche.

Die Beobachtungen zeigen, daß die Struktur der Granulation auf der Sonnenoberfläche – das Granulationsnetz – verhältnismäßig raschen Änderungen unterworfen ist. Die mittlere Lebensdauer eines Granulums der Photosphäre ist von der Größenordnung drei Minuten.

Das allgemeine Aussehen der Granulationserscheinungen und die Art und Weise des Auftretens und des Verschwindens der Granula legen den Gedanken nahe, daß wir hier ein Aufsteigen und Absinken von Gasmassen be-

[1]) Die Angaben in diesen Spalten wurden von W. S. Berditschewskaja auf der Grundlage eines Modells der Sonnenphotosphäre von Münch berechnet. (G. Münch, Model solar atmospheres, Astrophysical Journal **106**, 217, 1947.)

obachten. Die in jüngster Zeit durchgeführten spektroskopischen Beobachtungen bestätigen diese Vermutung. Als mittlere Radialgeschwindigkeit v_0 der Granula, die im Sinne der Formel (11.26) verstanden wird, erhält man einen Wert von ungefähr 0,4 km/sec[1]). Dieser Wert ist beträchtlich kleiner als die aus der Wachstumskurve der Sonne ermittelten Turbulenzgeschwindigkeiten, die ungefähr 1,5 km/sec betragen. Es ist durchaus möglich, daß diese Differenz auf einen Unterschied in den Durchmessern der Turbulenzelemente zurückzuführen ist. Die Sachlage ist jedoch zur Zeit noch nicht geklärt, weil die Natur der aus der Wachstumskurve ermittelten „Turbulenzgeschwindigkeiten" von der Natur der Geschwindigkeiten, die die Granulationsströmungen besitzen, verschieden sein kann. Außerdem sind noch weitere sehr sorgfältige beobachtungsmäßige Untersuchungen der Geschwindigkeiten selbst erforderlich. (Bei der Messung der Geschwindigkeit der Granulationsströmungen ist der Einfluß des Streulichtes usw. zu berücksichtigen.)

Trotz dieser noch bestehenden Unklarheiten müssen wir mit dem Vorhandensein von aufsteigenden und absinkenden Strömen in der Photosphäre, d.h. mit einer inneren Instabilität der Photosphäre, rechnen. Außerdem müssen wir beachten, daß die Eigenschaften der Granulation (die Größe der Granula, der Helligkeitskontrast usw.) von der heliographischen Breite auf der Sonnenoberfläche und von der elfjährigen Periode der Änderung der Sonnenaktivität nicht abhängen.

Wir haben schon erwähnt, daß das oben betrachtete Modell der Sonnenphotosphäre (Tabelle 13) das Modell einer rein statischen Photosphäre ist. Die durchgeführten Rechnungen zeigen jedoch – besonders wenn man sie bis zu großen Werten von τ_λ fortführt –, daß sich die unteren Schichten der Sonnenphotosphäre überhaupt nicht im Zustande eines stabilen Gleichgewichtes befinden können. In ihnen müssen innere Konvektionsströme auftreten, die man mit ausreichender Begründung mit den Granulationserscheinungen identifizieren kann. (Wie aus den Rechnungen hervorgeht, müssen diese Strömungen Turbulenzcharakter besitzen.)

Wir gehen davon aus, daß sich die Sonnenatmosphäre (zum mindesten in ihren äußeren Schichten) im Strahlungsgleichgewicht befindet, und untersuchen, in welchen Fällen die konvektiven Ströme in einer derartigen Atmosphäre stabil sein können und wann nicht.

Ein Gaselement in der Photosphäre erhalte aus irgendeinem Grunde einen nach außen gerichteten Impuls. Dann beginnt es aufzusteigen und sich auszudehnen. Seine Temperatur verändert sich hierbei kontinuierlich. Wir machen jetzt folgende Annahmen:

1. Der Ausdehnungsprozeß gehe adiabatisch vor sich,

2. die Zähigkeitskräfte, die das betrachtete Element bremsen, kann man vernachlässigen. Dann ist dafür, daß dieses Element in seiner Bewegung nicht innehält, notwendig, daß der adiabatische Temperaturgradient (die

---

[1]) Siehe R. Richardson and M. Schwarzschild, On the turbulent velocities of solar granules. Astrophysical Journal **111**, 351, 1950.

Temperaturänderung mit der Tiefe für ein sich adiabatisch ausdehnendes und aufsteigendes Element) kleiner ist als der dem Strahlungsgleichgewicht entsprechende Gradient. Dies ist aus Abb. 47 leicht ersichtlich. Die Bewegung des Elementes nach oben entspricht der Bewegung längs der Linie Oa in der graphischen Darstellung. Auf dem gesamten Wege ist die Temperatur des Elementes höher als die der umgebenden Sonnenphotosphäre, und folglich bewegt sich das Element ununterbrochen weiter. Somit werden Konvektionsströme, die in der Photosphäre entstehen, existieren, wenn die Ungleichung

$$\left|\frac{dT}{dh}\right|_{\text{adiab}} < \left|\frac{dT}{dh}\right|_{\text{Str}} \tag{17.11}$$

erfüllt ist. Wenn dagegen die entgegengesetzte Ungleichung erfüllt ist (siehe die gestrichelte Kurve in Abb. 47), wird die Bewegung des Elementes sofort abgebremst, weil es kühler und dichter als das umgebende Medium ist.

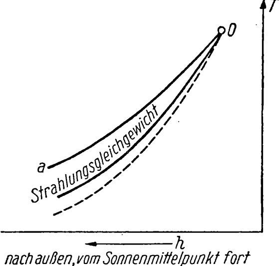


Abb. 47

Auf diese Weise hat im Falle der Gültigkeit der Ungleichung (17.11) jede kleine Änderung der lokalen Temperatur die Entstehung eines Systems von aufsteigenden und absinkenden Strömen zur Folge, die – wie sich aus Abb. 47 ergibt – bestrebt sind, den Temperaturgradienten des Mediums zu ändern.

Beim Studium der Konvektion, die im Falle der Gültigkeit der Ungleichung (17.11) auftritt, werden wir nur so schwache Ströme betrachten, die das allgemeine Gleichgewicht der Atmosphäre nicht stören. Mit anderen Worten, wir nehmen an, daß bei der Bewegung des Elementes nach oben oder nach unten der von diesem Element auf die umgebende Photosphäre ausgeübte Druck gleich dem Druck ist, der von der Umgebung auf das Element erzeugt wird. Den Zustand, in dem sich das Medium befindet, wenn die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, nennt man *konvektives Gleichgewicht* [26, S. 123, 124].

Im Hinblick auf die Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes können wir die Formel des hydrostatischen Gleichgewichtes (17.1) anwenden, die unter Benutzung der Zustandsgleichung der Gase,

$$p = \frac{R}{\mu} \varrho T, \tag{17.12}$$

die Gestalt

$$\frac{dp}{dh} = \frac{g\mu}{RT} p \tag{17.13}$$

annimmt. Wir multiplizieren beide Seiten von (17.13) mit $\frac{dT}{p}$ und erhalten

$$\frac{dT}{dh} = \frac{g\mu}{R} \frac{d \ln T}{d \ln p}. \tag{17.14}$$

Wenden wir diese Gleichung auf das Strahlungsgleichgewicht und auf das konvektive Gleichgewicht an, so erhalten wir an Stelle von (17.11)

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{adiab}} < \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{Str}}. \tag{17.15}$$

Um nachzuprüfen, ob die Ungleichung (17.15) in der Sonnenphotosphäre erfüllt ist, muß man beide Seiten dieser Ungleichung gesondert berechnen.

Wenden wir uns der linken Seite der Ungleichung zu. Für einen adiabatischen Prozeß ist bekanntlich $p^{1-\gamma} T^{\gamma} = \text{const}$ und folglich

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{adiab}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \tag{17.16}$$

wobei $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ das Verhältnis der spezifischen Wärme eines Gases bei konstantem Druck zu der bei konstantem Volumen ist.

Für ein einatomiges Gas ist $\gamma = \frac{5}{3}$ und folglich

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{adiab}} = 0{,}40. \tag{17.16'}$$

Der Vergleich dieser Zahl mit den aus Tabelle 13 ermittelten Größen $\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{Str}}$ gestattet folgende Schlüsse: Bis zu dem Niveau mit der optischen Tiefe $\tau_\lambda \approx 0{,}5$ (bei $\lambda = 5010$ Å) ist die Ungleichung $\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{Str}} < 0{,}4$, und für $\tau_\lambda > 0{,}5$ die entgegengesetzte Ungleichung, d.h. die Ungleichung (17.15), erfüllt. Somit befindet sich unterhalb des Niveaus mit $\tau_\lambda \approx 0{,}5$ in der Sonnenphotosphäre ein Gebiet mit instabiler Konvektion.

Um eine Vorstellung von der unteren Grenze der Konvektionszone zu bekommen, müssen wir noch einen wichtigen Umstand berücksichtigen, nämlich die sich mit dem Aufstieg oder mit dem Absinken der Gasmasse ändernde Ionisation der Atome. Infolge der Ionisation erhalten die abgetrennten Elektronen die kinetische Energie $\frac{3}{2} k T$. Gleichzeitig nähert sich das Gas, dessen Ionisationsgrad sich ändert, in seinem Verhalten einem mehratomigen Gas. Dadurch wird für ein derartiges Gas das effektive γ, das sich wie früher aus der Relation (17.16) bestimmt, kleiner als 5/3.

Das wichtigste Gas in dieser Hinsicht ist der Wasserstoff. Unsöld hat gezeigt, daß in der Zone der Sternatmosphären, in der der Wasserstoff teilweise ionisiert ist, das effektive γ so klein ist, daß auf jeden Fall eine Strömung entstehen muß. Die Berücksichtigung dieses Umstandes vergrößert in starkem Maße den Einfluß und die Dicke der Konvektionszone in der Sonnenphotosphäre.

Um die diesbezüglichen Rechnungen durchführen zu können, muß man $\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{adiab}}$ unter Berücksichtigung der Ionisation des Wasserstoffs ermitteln [2, S. 410, 411]. Bei der Anwendung dieses Ausdruckes, der natürlich vom Druck und von der Temperatur abhängt, muß man jedoch gewisse Voraussetzungen über den Bau der Konvektionszone selbst machen. Die Annahme scheint begründet, daß die Entstehung der Konvektionsströme das Strahlungsgleichgewicht nicht merklich stört, so daß dieses auch in der Konvektionszone vorhanden ist. Selbst beim Auftreten von Konvektionsströmen geht der Energietransport hauptsächlich durch Strahlung vor sich, was auf die größere Schnelligkeit des Austausches durch Strahlung zurückzuführen ist. In diesem Fall können wir bei der Ermittlung von $\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{adiab}}$ diejenigen p und T benutzen, die wir beim Strahlungsgleichgewicht, wie z. B. in Tab. 13, abgeleitet haben. In dem vorliegenden Fall erhält man für die lineare Dicke der Konvektionszone einen Wert von der Größenordnung 700 km.

Bedauerlicherweise ist das Problem des physikalischen Zustandes der Materie in der Konvektionszone außerordentlich kompliziert. So ist es z. B. völlig unklar, ob man die Formeln des thermodynamischen Gleichgewichtes und insbesondere die Ionisationsformel auf die Materie der Konvektionszone anwenden darf. Hiervon kann man sich auf Grund der folgenden Überlegungen überzeugen. Wenn eine beliebige Gasmasse, die sich in der Konvektionszone bewegt, nach unten sinkt, besitzt der Ionisationsgrad dieser Masse beständig die Tendenz, sich entsprechend dem thermischen Zustand zu ändern, wie er gerade auf dem Niveau herrscht, auf dem sich die Masse zu dem betrachteten Zeitpunkt befindet. Es liegt jedoch auf der Hand, daß die Fähigkeit der Gasmasse, den Ionisationsgrad anzunehmen, der dem „augenblicklichen" Niveau in der Atmosphäre entspricht, von der Geschwindigkeit dieser Masse abhängt. Wenn sich die Masse z. B. sehr schnell bewegt, ist sie nicht imstande, den Ionisationsgrad schnell genug zu ändern, selbst wenn sie in eine große Tiefe gelangt, in der die Temperatur schon ziemlich hoch ist. Allerdings sind die realen Strömungsgeschwindigkeiten in der Konvektionszone klein und betragen etwa 1 km/sec. Wenn jedoch lediglich Photoionisationsprozesse (ohne Stöße) auftreten, stellt sich in der Ionisation (für den Wasserstoff) zwischen dem Medium und der sich bewegenden Gasmasse selbst bei dieser Geschwindigkeit kein Gleichgewicht ein. Die Berücksichtigung der Stoßionisation ändert dieses Resultat etwas ab. Trotzdem muß offenbar ein bestimmter Unterschied im Ionisationszustand der nach unten und der nach oben gerichteten Ströme vorhanden sein. Hierbei befördern die nach oben gehenden Ströme den ionisierten Wasserstoff in die oberen Gebiete der Konvektionszone, wo ihre Rekombination die Ursache für das Auftreten eines Überschusses von hochfrequenter Strahlung in den äußeren Schichten sein kann. Wenn die Dinge so liegen, hat dieser Umstand eine Ausdehnung der instabilen Zone, nämlich ein Anheben ihrer oberen Grenze, zur Folge.

Aus unseren obigen Darlegungen folgt, daß wir die Ursache der Granulationserscheinungen in der Existenz einer instabilen Zone in der Photosphäre mit

$\tau_\lambda > 0{,}5$ zu suchen haben. Mit diesen Vorstellungen stimmt auch der äußerliche Eindruck des Granulationsnetzes überein. Wenn eine ebene Flüssigkeits- oder Gasschicht, in der sich der Wärmetransport durch Konvektion vollzieht, von unten erwärmt und gut gegen Erschütterungen geschützt wird, bildet sich in ihr ein richtiggehendes System von sechseckigen Wirbeln aus, dessen Aussehen an die Granulation erinnert, wobei die Materie in der Achse einer jeden Zelle aufsteigt und längs ihrer äußeren Begrenzung abwärtsfließt (sogenannte BÉNARDsche Zellen). Die Abstände zwischen den Achsen benachbarter Konvektionszellen sind stets um etwa das 3,3fache größer als die Schichtdicke. Wenn wir demnach annehmen, daß die Dicke der Konvektionsschicht von der Größenordnung 700 km ist, muß die Entfernung zwischen den Granula größenordnungsmäßig 2300 km betragen, was der Wirklichkeit recht nahe kommt.

Da ferner die in der Konvektionszone aufsteigenden Gasmassen heißer als die benachbarte Materie sind, gibt der oben mitgeteilte empirische Befund auch für die Beobachtungstatsache eine Erklärung, daß sich die Granulation aus hellen Bereichen (die Mitte der Wirbel) zusammensetzt, die durch dunkle Zwischenräume getrennt sind.

Endlich ist es im Hinblick darauf, daß die Dicke der Konvektionszone im Vergleich zum Sonnenradius klein ist, verständlich, daß die Granulation nicht von der heliographischen Breite und der Phase des elfjährigen Zyklus abhängt.

Bei diesen allgemeinen Betrachtungen darf man nicht vergessen, daß eine Konvektionszone nicht nur in der Photosphäre der Sonne, sondern auch in der Photosphäre der Sterne auftreten kann. Sie wird zweifellos in allen den Fällen entstehen, wenn der Übergang von der Zone des neutralen Wasserstoffs zur Zone des ionisierten Wasserstoffs sich in den Schichten der Photosphäre vollzieht.

Die Tiefe der Übergangszone wird sich beim Übergang von den heißen zu den kühleren Sternen vergrößern. Bei den A-Sternen mit normaler Leuchtkraft reicht die Konvektionszone z. B. bis zu den äußersten Schichten der Photosphäre [27]. In einigen Fällen haben wir es sogar mit einer Dichteinversion zu tun, so daß die Dichte in einem gewissen Bereich nach unten abnimmt. Es ist klar, daß in diesen Fällen die Instabilität noch stärker ausgeprägt ist.

§ 18. Elektrodynamik der Sonnenatmosphäre

1. Vorbemerkungen

Durch die schnelle Entwicklung und die großen Erfolge, die die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes aufzuweisen hat, steht sie in der theoretischen Astrophysik verdientermaßen an erster Stelle. Viele Beobachtungstatsachen konnte man mehr oder weniger genau erklären, indem man von der Voraussetzung ausging, daß sich die Atmosphäre im Zustande eines lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes befindet. Dort, wo Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht festgestellt wurden, zog man die Hypothese über eine anomal große Intensität der Sonnenstrahlung im ultravioletten Spektralbereich heran.

Später erzielte auch die Theorie der Entstehung der Absorptionslinien bedeutende Erfolge (siehe Kapitel II).

In dem Maße jedoch, wie sich die Beobachtungsmethoden vervollkommneten durch die Einführung der Spektroheliographen, der Spektrohelioskope, der Koronabeobachtungen außerhalb von Finsternissen und besonders der Zeitraffer-Filmaufnahmen von Protuberanzen mit Farbfiltern von schmalem Durchlässigkeitsbereich, die die Linie H α herausfilterten, stellte es sich nach und nach heraus, daß die Bewegungen der Protuberanzen und zahlreiche andere für die Sonnenaktivität charakteristische Erscheinungen nicht nur durch die Strahlung allein verursacht werden. Die Berücksichtigung anderer bekannter Kräfte chemischen oder hydrodynamischen Ursprungs lieferte ebenfalls nicht die erhofften Ergebnisse.

Lediglich die elektromagnetischen Kräfte vermögen – wenn auch nur zum Teil – den Charakter der Bahnen zu erklären, die an die Kraftlinien eines elektrischen oder magnetischen Feldes erinnern.

Aus diesem Grunde wurde in den letzten Jahren der Elektrodynamik der Sonnenatmosphäre, die sich seitdem schnell entwickelt, große Beachtung geschenkt.

In jüngster Zeit sind zahlreiche Theorien aufgestellt worden, die viele Erscheinungen der Sonnenaktivität durch elektromagnetische Kräfte erklären. Die Entwicklung der Elektrodynamik der Sonnenatmosphäre ist jedoch noch nicht abgeschlossen und ein großer Teil ihrer Ergebnisse noch nicht als endgültig anzusehen.

Wir gehen auf die Beschreibung dieser Theorien hier nicht ein, sondern betrachten nur die physikalischen Grundlagen der Elektrodynamik der Sonnenatmosphäre und einige unmittelbare Anwendungen.

Bekanntlich greift an einem Ion der Ladung e, das sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in einem elektrischen Feld der Feldstärke $\mathfrak{E}$ und einem Magnetfeld der Feldstärke $\mathfrak{H}$ bewegt, die Kraft

$$\mathfrak{f} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}\right) \tag{18.1}$$

an. Hierbei beschränken wir uns auf den nichtrelativistischen Fall, d.h., wir nehmen an, daß $v \ll c$ und $E \ll H$ ist (in Einheiten des absoluten Maßsystems).

Wenn $\mathfrak{E} = 0$ ist, ist $\mathfrak{f} \perp \mathfrak{v}$, und der absolute Betrag der Geschwindigkeit ändert sich nicht. In einem konstanten homogenen Magnetfeld setzt sich die Bewegung des Ions aus einem gleichförmigen Umlauf auf einer Kreisbahn mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in einer senkrechten Ebene zu $\mathfrak{H}$ und einer gleichförmigen Bewegung längs $\mathfrak{H}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_H$ zusammen. Man kann leicht ausrechnen, daß der Radius der Kreisbahn gleich $R = \frac{c m_i v_\perp}{eH}$ und die Kreisfrequenz der Rotation gleich $\omega_i = \frac{e H}{m_i c}$ ist, wobei m_i die Masse des Ions ist.

Ist $\mathfrak{E} \parallel \mathfrak{H}$, ändert sich $\mathfrak{v}_\perp$ nicht, und $\mathfrak{v}_H$ wächst, als ob kein Magnetfeld vorhanden wäre.

Weil $\mathfrak{v}_H$ nicht von dem Vorhandensein des Magnetfeldes abhängt und leicht gesondert berechnet werden kann, werden wir im folgenden nur $\mathfrak{v}_\perp$ betrachten, d.h., wir setzen voraus, daß $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{E}$ senkrecht zu $\mathfrak{H}$ gerichtet sind. Die Bewegungsgleichung des Ions hat in diesem Fall folgende Gestalt:

$$m_i \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = e\mathfrak{E} + \frac{e}{c}\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}. \tag{18.2}$$

Wir führen ein neues Koordinatensystem ein, das sich gegen das ursprüngliche mit der Geschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = \frac{c}{H^2}\mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \tag{18.3}$$

bewegt. Dann ist $\mathfrak{v} = \mathfrak{u} + \mathfrak{w}$, wenn $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit des Ions in dem neuen Koordinatensystem ist. Setzen wir diesen Wert in (18.2) ein und benutzen wir die Gleichung $\frac{e}{c}\mathfrak{u} \times \mathfrak{H} = -e\mathfrak{E}$, so finden wir, daß in dem neuen Koordinatensystem auf das Ion kein elektrisches Feld einwirkt ($\mathfrak{E}$ fällt heraus), so daß sich das Ion auf einer Kreisbahn mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ bewegt. Dies bedeutet, daß sich das Ion in dem alten System auf einer Zykloide bewegt und seine mittlere Geschwindigkeit $\mathfrak{u} \perp \mathfrak{E}$ ist; folglich leistet das Ion bei seiner Bewegung im Mittel keine Arbeit.

Eine solche Bewegung wird als *Drift* bezeichnet. Wir weisen darauf hin, daß die Ladung und die Masse des Teilchens in den Ausdruck (18.3) für die Driftgeschwindigkeit nicht eingeht. Daher werden sich die Elektronen und die verschiedenen Ionen im Mittel mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen ($\mathfrak{u}$ ist bei den Elektronen und Ionen gleich, $\mathfrak{w}$ ist verschieden). Wenn man an die Stelle des einen Ions in das gleiche Feld eine große Anzahl von Ionen und Elektronen bringt, die ein makroskopisches neutrales Plasma mit einer solchen Verdünnung bilden, daß ein Ion während der freien Flugdauer eine große Zahl von Umläufen ausführen kann, so bewegt sich das Plasma mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, und es fließt kein Strom. Wenn an Stelle der elektrischen Feldstärke eine beliebige andere Kraft, z.B. die Schwerkraft oder ein Druckgradient, auf das Plasma einwirkt, sind die Driftgeschwindigkeiten der Elektronen und der Ionen nicht gleich und nach verschiedenen Seiten gerichtet, wie man leicht zeigen kann, wenn man in (18.2) und (18.3) $e\mathfrak{E}$ durch die Kraft $\mathfrak{f}$ ersetzt.

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, daß die elektrischen und die magnetischen Felder homogen sind. In inhomogenen Feldern sind die Bewegungen komplizierter; sie sind von S. A. Boguslawski ausführlich untersucht worden [28]. In der Sonnenatmosphäre kann man das Feld jedoch als praktisch homogen ansehen. Ein Proton, das sich mit der mittleren thermischen Geschwindigkeit $v = 10^6$ cm/sec^{-1} in einem Feld $H \geqslant 10^{-2}$ Oersted bewegt, beschreibt eine Kreisbahn mit dem Radius

$$R \leqslant \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24} \cdot 10^6}{4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-2}} = 10^4\,\text{cm}. \tag{18.3'}$$

Der Radius der von einem Elektron beschriebenen Kreisbahn ist noch kleiner.

In Entfernungen dieser Größenordnung kann sich das Magnetfeld auf der Sonne nicht merklich ändern. Daher kann man das Feld innerhalb der Windung als homogen ansehen. Auf eine Inhomogenität des Feldes braucht man nur bei den Bewegungen von Teilchen mit großer Energie in einem sehr schwachen Felde Rücksicht zu nehmen; wie z. B. bei der Theorie der Polarlichter.

2. Die Leitfähigkeit der Sonnenatmosphäre in einem Magnetfeld

Wir betrachten jetzt die Bewegung von Ladungen in einem realen Plasma, in dem die Teilchen aufeinander Wechselwirkungen ausüben.

Hierbei nehmen wir an, daß sich das Ion in den Intervallen zwischen den Zusammenstößen nach (18.2) frei bewegt und daß es im Augenblick des Zusammenstoßes seine Geschwindigkeit ändert, wobei alle Geschwindigkeitsrichtungen nach dem Zusammenstoß gleichwahrscheinlich sind. Daher ist in diesem Augenblick die Geschwindigkeit im Mittel gleich Null.

Zur Vereinfachung nehmen wir zunächst an, daß die mittlere freie Flugdauer τ_1 der vorliegenden Ionensorte von der Geschwindigkeit nicht abhängt.

Wir setzen außerdem voraus, daß die Bewegungen der Elektronen und der Ionen unabhängig voneinander vor sich gehen. Alle diese Bedingungen sind beispielsweise in einem sehr schwach ionisierten Gas erfüllt, in dem die Elektronen und Ionen hauptsächlich mit neutralen Atomen zusammenstoßen, die einen mittleren Stoßquerschnitt (für den elastischen Stoß) von $\sigma_0 \approx 10^{-15}\,\mathrm{cm}^2$ besitzen. Zusammenstöße zwischen Elektronen und Ionen beeinflussen selten die Bewegungen. Wir betrachten die Bewegung einer Sorte von Ionen mit der Masse m_1 und der Ladung e_1. Wenn kein Magnetfeld vorhanden ist, ist die Beschleunigung des Ions im Felde $\mathfrak{E}$ gleich $\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{e_1 \mathfrak{E}}{m_1} = \mathfrak{F}_1$ und die mittlere Geschwindigkeit in Richtung des Feldes gleich

$$\bar{\mathfrak{v}}_1 \approx \frac{e_1 \mathfrak{E}}{m_1} \tau_1 = \mathfrak{F}_1 \tau_1 . \tag{18.4}$$

Dies ergibt eine Stromdichte

$$\mathfrak{j}_1 = n_1 e_1 \bar{\mathfrak{v}}_1 = \frac{n_1 e_1^2 \tau_1}{m_1} \mathfrak{E} . \tag{18.5}$$

Die Stromdichte ist proportional der Feldstärke; der Proportionalitätsfaktor wird als *Leitfähigkeit* λ bezeichnet. Da $m_e \ll m_i$ ist, ist die Ionenleitfähigkeit beträchtlich kleiner als die der Elektronen, und die Leitfähigkeit λ_0 des Plasmas ohne Magnetfeld ist praktisch gleich der Elektronenleitfähigkeit

$$\lambda_0 = \lambda_e = \frac{n_e e^2 \tau_e}{m} ; \tag{18.6}$$

τ_e ist durch den effektiven Querschnitt σ_0, die Konzentration der neutralen Atome n_0 und die mittlere thermische Geschwindigkeit $\bar{v}_e$ der Elektronen

folgendermaßen bestimmt:

$$\tau_e = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{n_0 \sigma_0 \bar{v}_e}. \tag{18.7}$$

Analog berechnet sich τ_i.

Es sei jetzt $\mathfrak{H} \neq 0$. Wir verwenden ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen z-Achse in die Richtung von $\mathfrak{H}$ zeigt und dessen y-Achse parallel $\mathfrak{E}$ ist. Die Lösung der Gleichung (18.2) ergibt für $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ – die Komponenten der Ionengeschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ in Richtung der x- und y-Achsen zur Zeit t – folgende Funktionen der Zeit und der Geschwindigkeit im Augenblick $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \left(\mathfrak{u}' - \frac{\mathfrak{F}_1}{\omega_1}\right)\cos\omega_1 t + \mathfrak{v}'\sin\omega_1 t + \frac{\mathfrak{F}_1}{\omega_1}, \\ \mathfrak{v} &= \mathfrak{v}'\cos\omega_1 t - \left(\mathfrak{u}' - \frac{\mathfrak{F}'}{\omega_1}\right)\sin\omega_1 t. \end{aligned}\right\} \tag{18.8}$$

Hier sind $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$ – die Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}_1'$ – die Geschwindigkeiten zur Zeit $t = 0$. Das letzte Glied auf der rechten Seite der ersten Gleichung gibt die Driftgeschwindigkeit an. Die Integration von (18.8) gestattet es, die Abhängigkeit der Koordinaten des Ions von der Zeit und von den Anfangskoordinaten x' und y' zu ermitteln:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + \frac{1}{\omega_1}\left\{\left(u' - \frac{F_1}{\omega_1}\right)\sin\omega_1 t + v'(1 - \cos\omega_1 t) + F_1 t\right\}, \\ y &= y' + \frac{1}{\omega_1}\left\{v'\sin\omega_1 t - \left(u' - \frac{F_1}{\omega_1}\right)(1 - \cos\omega_1 t)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{18.9}$$

Unsere Aufgabe besteht darin, die mittlere Diffusionsgeschwindigkeit für die vorliegende Ionensorte zu bestimmen. Wir nehmen an, daß die Ionendichte ϱ_1 und T nur von y abhängen.

Wir betrachten Ionen, die in der Zeit von t' bis $t' + dt'$ die Fläche dS in der Ebene $y = 0$ durchsetzen und Geschwindigkeiten zwischen $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_1 + d\mathfrak{v}_1$ besitzen (Abb. 48). Zur Zeit t' befanden sich diese Ionen in einem Zylinder mit der Grundfläche dS und der Höhe $v\,dt'$. (Wenn sie in der Zeit von t bis t' keinen Zusammenstoß erleiden, haben ihre Geschwindigkeiten zur Zeit t zwischen $\mathfrak{v}_1'$ und $\mathfrak{v}_1' + d\mathfrak{v}_1'$ gelegen.)

Die Zusammensetzung der Moleküle, die in der Zeit $t' - t$ die Fläche dS durchsetzen, wird durch Zusammenstöße geändert. Die Zahl der Stöße, die die Ionen einer gegebenen Sorte in 1 cm³ in 1 sec erleiden, ist gleich $\frac{n_1}{\tau_1}$. Es sei $\chi_1(\mathfrak{v}_1', y)\,d\mathfrak{v}'$ der Bruchteil der Stöße, durch die sich Moleküle mit Geschwindigkeiten zwischen $\mathfrak{v}_1'$ und $\mathfrak{v}_1' + d\mathfrak{v}_1'$ bilden, wobei die Geschwindigkeit nicht nur nach ihrem Betrag, sondern auch nach ihrer Richtung gegeben ist. Wenn sich das Gas im stabilen Gleichgewicht befindet, ist χ_1 durch die MAXWELLsche Funktion bestimmt.

Im allgemeinen unterscheidet sich χ_1 nur unbeträchtlich von ihr, wenn der Betrag der Driftgeschwindigkeit gegenüber der thermischen Geschwindigkeit klein ist (was bei den gewöhnlich anzutreffenden Werten der elektrischen Felder erfüllt ist). Die Anzahl der Stöße, die den Ionen Geschwindigkeiten zwischen $\mathfrak{v}_1'$ und $\mathfrak{v}_1' + d\mathfrak{v}_1'$ erteilen, ist in dem Zylinder mit dem Volumen $v\,dt'\,dS$ in der Zeit von t bis $t + dt$ gleich

$$\chi_1(\mathfrak{v}_1', y')\, dv_1'\, v\, dS\, dt'\, n_1 \frac{dt}{\tau_1}. \tag{18.9'}$$

Der Bruchteil $e^{-\frac{t'-t}{\tau_1}}$ dieser Teilchen gelangt ohne Stoß bis dS. Somit ist die Zahl der Teilchen, die dS im Laufe dt' mit Geschwindigkeiten zwischen $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_1 + d\mathfrak{v}_1$ durchsetzen, gleich

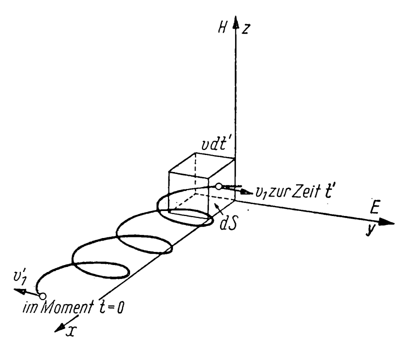


Abb. 48

$$n_1 v\, d\mathfrak{v}_1'\, dS\, dt' \int\limits_{-\infty}^{t'} \chi_1(\mathfrak{v}_1', y')\, e^{-\frac{t'-t}{\tau_1}} \frac{dt}{\tau_1}. \tag{18.9''}$$

Um die Zahl der Ionen zu erhalten, die mit allen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ durch dS hindurchtreten, müssen wir den erhaltenen Ausdruck über alle $\mathfrak{v}_1'$ integrieren. Die Vertauschung der Integrationsveränderlichen ist möglich, weil zwischen $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_1'$ der durch (18.8) definierte eindeutige Zusammenhang besteht. Hierbei hat der Zylinder, in dem die Zusammenstöße vor sich gehen, für jeden Wert von $\mathfrak{v}_1'$ eine verschiedene Grundfläche und ein verschiedenes Volumen.

Wenn wir die Reihenfolge der Integrationen über die beiden unabhängigen Veränderlichen vertauschen und $t' - t$ durch die Zeit t, die von dem Augenblick des Stoßes bis zum Hindurchtritt durch dS verflossen ist, ersetzen, finden wir für die Zahl der Ionen der gegebenen Sorte, die dS während der Zeit dt' nach einer Richtung durchsetzen, den Ausdruck

$$dN = dS\, dt'\, n_1 \int\limits_0^{\infty} \left\{ \int \chi_1(\mathfrak{v}_1', y')\, v\, d\mathfrak{v}_1' \right\} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{dt}{\tau_1}. \tag{18.10}$$

Dieser Größe kann man auch die Gestalt $dN = n_1(0)\, \bar{v}_1\, dS\, dt'$ geben, wobei $\bar{v}_1$ die mittlere Diffusionsgeschwindigkeit in Richtung der y-Achse ist.

Wenn wir die rechten Seiten gleichsetzen und $\chi_1(\mathfrak{v}_1', y')$ nach Potenzen von y' entwickeln, finden wir

$$n_1(0)\, \bar{v}_1 = \int\limits_0^{\infty} \left\{ \int \left[n_1 \chi_1(\mathfrak{v}_1', 0) + y' \frac{\partial n_1 \chi_1(\mathfrak{v}_1', 0)}{\partial y} \right] v\, d\mathfrak{v}_1' \right\} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{dt}{\tau_1} \tag{18.11}$$

mit der in der Diffusionstheorie üblichen Vernachlässigung höherer Potenzen von y'.

Mit Hilfe der Gleichungen (18.8) und (18.9) können wir v und y' durch u' v', x, y und t ausdrücken. Die Koordinaten x und y der Fläche dS setzen wir zur Vereinfachung unserer Ableitung gleich Null. Die Glieder mit F_1^2 vernachlässigen wir, weil $m_1 F_1$ kleiner als die durch Gleichung (18.1) definierten Kräfte ist, wenn die Driftgeschwindigkeit kleiner als die thermische Geschwindigkeit ist. Außerdem lassen wir die ungeraden Potenzen von u' und v' fort, weil sich die Geschwindigkeitsverteilung unmittelbar nach dem Stoß wenig von der bei Gleichgewicht, d.h. von einer nahezu isotropen Verteilung, unterscheidet und diese Glieder bei der Integration über alle Geschwindigkeitswerte gegen Null streben.

Als Ergebnis finden wir

$$n_1(0)\,\bar{v}_1 = \int_0^\infty \Big\{F_1 \int n_1\chi_1(\mathfrak{v}_1', 0)\,d\mathfrak{v}_1' - \frac{\partial}{\partial y}\int n_1\chi_1(\mathfrak{v}_1', 0)\,[\mathfrak{v}'^2 \cos\omega_1 t + u'^2(1-\cos\omega_1 t)]\,d\mathfrak{v}_1'\Big\} \sin\omega_1 t\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{dt}{\omega_1\tau_1}. \tag{18.12}$$

Da sich die Integration über alle $\mathfrak{v}_1'$ erstreckt, können wir

$$\int n_1\chi_1(\mathfrak{v}_1', 0)\,d\mathfrak{v}_1' = n_1 \tag{18.12'}$$

schreiben.

Außerdem ist wegen der Isotropie der Geschwindigkeitsverteilung nach dem Stoß der über alle Teilchen gemittelte Wert von u'^2 gleich v'^2. Daher gilt

$$n_1\int \chi_1(\mathfrak{v}_1', 0)\,m_1 u'^2 d\mathfrak{v}_1' = n_1\int \chi_1(\mathfrak{v}_1', 0)\,m_1 v'^2 d\mathfrak{v}_1' = p_1, \tag{18.12''}$$

wobei p_1 der Partialdruck der gegebenen Ionensorte in der Ebene $y = 0$ ist.

Setzen wir die erhaltene Gleichung in (18.12) ein, so finden wir unter Beachtung der Gleichheit der Mittelwerte v'^2 und u'^2, wobei $n_1(0)\,m_1 = \varrho_1$ ist:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= \left(F_1 - \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)\int_0^\infty \sin\omega_1 t\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{dt}{\omega_1\tau_1} \\ &= \left(F_1 - \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)\frac{\tau_1}{1+\omega_1^2\tau_1^2}.\end{aligned} \tag{18.13}$$

Bei $H = 0$ ($\omega_1 = 0$) müßte die mittlere Diffusionsgeschwindigkeit gleich

$$\bar{v}_1 = \tau_1\left(F_1 - \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y}\right) \tag{18.13'}$$

sein. Folglich verringert das Vorhandensein eines Magnetfeldes die Diffusionsgeschwindigkeit um das $(1+\omega_1^2\tau_1^2)$-fache.

Außer der Längsdiffusion in Richtung F_1 tritt im Magnetfeld eine zu ihr senkrechte Querdiffusion in Richtung der x-Achse auf. Mit Hilfe einer der vorangehenden ähnlichen Methode erhalten wir

$$n_1(0)\,\bar{u}_1 = \int_0^\infty \left\{ \int \left[n_1 \chi_1(\mathfrak{v}_1', 0) + y' \frac{\partial n_1 \chi_1(\mathfrak{v}_1', 0)}{\partial y} \right] u\, d\mathfrak{v}_1' \right\} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{dt}{\tau_1}. \qquad (18.14)$$

Ersetzen wir y' und u mit Hilfe von (18.8) und (18.9) und machen die gleichen Annahmen, so finden wir

$$\bar{u}_1 = \left(F_1 - \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y}\right) \int_0^\infty (1 - \cos\omega_1 t_1)\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} \frac{dt}{\omega_1 \tau_1}$$

$$= \left(F_1 - \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y}\right) \frac{\omega_1 \tau_1^2}{1 + \omega_1^2 \tau_1^2}. \qquad (18.15)$$

Wir sehen, daß die mittlere Geschwindigkeit der Querdiffusion um das $\omega_1 \tau_1$-fache größer ist als die mittlere der Längsdiffusion.

Analoge Ausdrücke erhält man für die anderen Ionenarten oder Elektronen. Die Stromdichte ist gleich der Summe der Stromdichten, die von der Bewegung der Elektronen und der Ionen herrühren. Für die Ionenkomponente der Stromdichte erhalten wir, wenn wir für F_1 seinen Wert einsetzen, den Ausdruck

$$\mathfrak{j}_i = n_i e \bar{\mathfrak{v}}_i = \frac{n_i e^2}{m_i} \frac{\tau_i}{1 + \omega_i^2 \tau_i^2} \left(\mathfrak{E} - \frac{1}{n_i e}\frac{dp_i}{d\mathfrak{r}}\right)$$

$$+ \frac{n_i e^2}{m_i} \frac{\omega_i \tau_i^2}{1 + \omega_i^2 \tau_i^2} \cdot \frac{1}{H} \left(\mathfrak{E} - \frac{1}{n_i e}\frac{dp_i}{d\mathfrak{r}}\right) \times \mathfrak{H}. \qquad (18.16)$$

Man kann eine Längs- und eine Querleitfähigkeit λ_i^{I} und λ_i^{II} für die Ionen und ebenso für die Elektronen einführen. Wenn $\omega_i \tau_i \gg 1$, ist der gesamte Querstrom – wie man leicht nachrechnen kann – gleich Null, und die Ionen-Längsleitfähigkeit ist um das $\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$-fache größer als die der Elektronen. Ohne Magnetfeld gilt die umgekehrte Relation. Wir weisen darauf hin, daß wir unsere Berechnungen in einem Koordinatensystem durchgeführt haben, das durch den Schwerpunkt des Gases geht, weil wir die Geschwindigkeitsverteilung nach dem Stoß als isotrop angenommen haben.

3. Die Wechselwirkung der Elektronen und der Ionen

In einigen Schichten der Sonnenatmosphäre nimmt die Ionisation beträchtliche Werte an, so daß man gegenseitige Stöße der Ionen und Elektronen nicht vernachlässigen darf. Um diesen Fall ausführlicher zu behandeln, müssen wir

vorerst den Mechanismus der Wechselwirkung der Ionen und Elektronen untereinander untersuchen.

Ein Ion mit der Masse m_1 und der Ladung Ze befinde sich in Ruhe. An ihm vorbei möge sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und dem Stoßparameter p (kürzeste Entfernung vom ruhenden Ion zur Geraden, auf der sich das zweite Ion bewegen würde, wenn keine Wechselwirkung der Ionen stattfände) ein weiteres Ion mit der Masse m_2 und der Ladung e bewegen.

Im Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt beider Teilchen ruht, bewegt sich das erste Ion (das „ruhende") mit der Geschwindigkeit $-\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathfrak{v}$ und das zweite („stoßende") Ion mit der Geschwindigkeit $\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathfrak{v}$. Aus der Mechanik ist bekannt, daß sich in diesem Koordinatensystem beide Ionen auf einer Hyperbel bewegen, in deren äußerem (wenn sich die Teilchen abstoßen) oder innerem (wenn sich die Teilchen anziehen) Brennpunkt sich der Schwerpunkt des Systems dieser Teilchen befindet. Der Betrag der Geschwindigkeit eines jeden Ions lange Zeit vor dem Zusammenstoß und ebenso lange nach dem Zusammenstoß (asymptotische Geschwindigkeit) ist gleich, es ändert sich jedoch infolge der Wechselwirkung die Richtung der Geschwindigkeit um den Winkel 2ψ.

Nach dem Stoß ist die Geschwindigkeitskomponente des gestoßenen Ions in Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit gleich

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} v \cos 2\psi \tag{18.17}$$

und die zu ihr senkrechte Komponente

$$v_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2} v \sin 2\psi\,. \tag{18.18}$$

In dem ursprünglichen, gegenüber dem gestoßenen Ion m_1 ruhenden Koordinatensystem sind die gleichen Geschwindigkeitskomponenten bzw. gleich

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_2}{m_1+m_2} v - \frac{m_2}{m_1+m_2} v \cos 2\psi = \frac{m_2}{m_1+m_2} v\,(1 - \cos 2\psi)\,,\\ v_2' &= \frac{m_2}{m_1+m_2} v \sin 2\psi\,. \end{aligned}\right\} \tag{18.19}$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung des Ions ergibt für den halben Winkel ψ zwischen den Asymptoten den Ausdruck

$$\operatorname{cgt}\psi = \pm \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \cdot \frac{v^2 p}{Z e^2} = \pm \frac{p}{a}\,, \tag{18.20}$$

mit

$$a = \frac{Z e^2}{v^2} \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,. \tag{18.21}$$

Dabei ist a der Abstand, bei dem sich die Bewegungsrichtung der Teilchen um $\frac{\pi}{2}$ ändert.

Wir ersetzen in (18.19) ψ und finden

$$v_1' = 2\frac{m_2 v}{m_1 + m_2}\cos^2\psi = \frac{2\,m_2 v}{m^{\mathrm{I}} + m_2}\cdot\frac{1}{1+\frac{p^2}{a^2}}$$

$$= \frac{2\,Z^2 e^4}{v^3}\cdot\frac{m_1 + m_2}{m_1^2 m_2}\cdot\frac{1}{p_2 + a_2}. \qquad (18.22)$$

Abb. 49

Wenn die Zahl der Ionen m_2 in 1 cm³ gleich n ist und sie sich alle mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegen, so fliegen an dem Ion m_1 während 1 sec $dn = nv \cdot 2\pi\, p\, dp$ Ionen m_2 in einem Abstand zwischen p und $p + dp$ vorbei. Jedes dieser Ionen erteilt dem Ion m_1 eine Geschwindigkeit mit den Komponenten v_1' und v_2'. Die von den verschiedenen Ionen herrührenden v_2' kompensieren sich gegenseitig. Die allgemeine Geschwindigkeitsänderung beträgt

$$dv = n\cdot 2\pi\frac{2\,Z^2 e^4}{v^2}\cdot\frac{m_1 + m_2}{m_1^2 m_2}\,\frac{p\,dp}{p^2 + a_2}. \qquad (18.23)$$

Um die Beschleunigung des Ions, d.h. die gesamte Geschwindigkeitsänderung in 1 sec, zu erhalten, ist dv über alle möglichen Werte von p zu integrieren.

Für $p \to \infty$ divergiert das Integral jedoch. Daher müssen wir p eine Schranke setzen. Die obere Grenze der p-Werte bezeichnen wir mit D. Dann ist die an m_1 angreifende Kraft gleich

$$m_1 \frac{dv}{dt} = \frac{2\pi Z^2 e^4}{v_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot n \ln\left(1 + \frac{D^2}{a^2}\right), \tag{18.24}$$

wobei, wie erwähnt,

$$a = Z \frac{e^2 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2 v^2} \tag{18.24'}$$

ist.

Das von uns behandelte Problem ist äquivalent dem Problem der Bremsung eines Ions m_1, das sich in einem Plasma mit einer beträchtlich größeren als der thermischen Geschwindigkeit der Ionen (die wir als ruhend angenommen haben) bewegt. Wenn sich ein Ion (oder ein Elektron) der Masse m_1 mit einer Geschwindigkeit bewegt, die größer ist als die der Elektronen, aus denen sich das Plasma zusammensetzt (m_2 in den Formeln (18.17) – (18.24) ist die Elektronenmasse), so wird die Bremsung hauptsächlich von den Elektronen ausgeübt, deren Bremskraft größer ist, und die Bremskraft der Ionen kann man vernachlässigen. Der Wert D wird in den Arbeiten der verschiedenen Autoren verschieden angenommen. Bisweilen setzt man ihn gleich dem sogenannten DEBYE-Radius $D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi n e^2}}$, d. h. gleich derjenigen Entfernung, in der das Feld des Ions durch die elektrostatische Polarisation des Plasmas abgeschirmt wird. Häufiger setzt man D jedoch gleich der halben mittleren Entfernung zwischen den Ionen $\frac{1}{2} n^{-\frac{1}{3}}$, um zu erreichen, daß sich in dem Wirkungsbereich nicht gleichzeitig mehrere Teilchen befinden; denn wir haben bei der Ableitung von (18.24) angenommen, daß die Zusammenstöße paarweise erfolgen.

Die Theorie für viele Teilchen berücksichtigt auch andere Wechselwirkungen als nur die paarweisen. Alle diese Modifikationen haben aber einen sehr geringen Einfluß auf den Wert der Bremskraft, weil D unter dem Logarithmus steht. Wir setzen $D = \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{3}}$. Unter gewöhnlichen Bedingungen ist $D \gg a$ und die Bremskraft gleich

$$m_1 \frac{dv}{dt} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{v^2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} n \ln\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v_2}{2 Z e^2 n^{\frac{1}{3}}}\right). \tag{18.25}$$

Wenn das Ion eine thermische Geschwindigkeit besitzt, ist die Kraft, die die Bewegung in einer vorgegebenen Richtung bremst, von der gleichen Größenordnung. Die Energie des Ions ändert sich im Mittel nicht, weil es nicht nur Energie abgibt, sondern auch von anderen Ionen Energie empfängt. Die Bremskraft, die auf ein Elektron des Plasmas durch die übrigen Elektronen ausgeübt

wird, ist gleich

$$m_e \frac{dv}{dt} \approx \frac{8\pi e^4 n_e}{3kT} \ln \frac{3kT}{4e^2 n_e^{\frac{1}{3}}} = \frac{8\pi e^4 n_e}{3kT} L, \tag{18.26}$$

wobei $L = \ln \frac{3kT}{4e^2 n_e^{\frac{1}{3}}}$. In den verschiedenen Schichten der Sonnenatmosphäre variiert L von 10 bis 20. Hieraus folgt für die mittlere freie Weglänge

$$l = \frac{v}{\frac{dv}{dr}} = \frac{v^2}{\frac{dv}{dt}} \approx \frac{(kT)^2}{3e^4 n_e L} \tag{18.27}$$

und für den effektiven Querschnitt

$$\sigma \approx \frac{1}{l n_e} = \frac{e^4 L}{(kT)^2}. \tag{18.28}$$

Man erkennt, daß l und σ nicht von der Masse des Ions abhängen.

Es ist zu bemerken, daß wir den Stoßparameter aus der Bedingung der Gleichheit der potentiellen und der kinetischen Energie $\frac{e^2}{p} = \frac{3}{2} kT$ hätten bestimmen können, wenn wir nur starke Wechselwirkungen, die das Teilchen um einen Winkel größer als 90° ablenken, betrachtet hätten. Hieraus folgt für den Querschnitt einer engen Begegnung $\sigma' = \pi p^2 = \frac{4\pi e^4}{9(kT)^2}$.

Auf diese Weise vergrößert die Berücksichtigung der fernen Wechselwirkungen den effektiven Querschnitt um das $2L$-fache.

Die von uns betrachtete Wechselwirkung von Elektronen mit Elektronen und von Ionen mit Ionen liefert eine Funktion für die Geschwindigkeitsverteilung der Ionen und der Elektronen getrennt. Diese Wechselwirkung ändert aber nicht die mittlere Geschwindigkeit des Elektronen- oder Ionengases als Ganzes, d.h., sie hat keinen Einfluß auf die Größe der Gesamtleitfähigkeit des Plasmas.

Diese bestimmt sich aus der Wechselwirkung der Elektronen mit den Ionen, d.h. aus der Flugdauer eines Elektrons, die durch die von den Ionen ausgeübte Bremsung beschränkt wird, und umgekehrt. Unter Benutzung der Formel (18.25) kann man ausrechnen, daß das von den Ionen bestimmte l_e gleich l ist. Mit Hilfe eines etwas komplizierten Verfahrens kann man das gleiche für l_i beweisen. Dann ist die mittlere freie Flugdauer

$$\tau_e = \frac{l_e}{\bar{v}_e} = \frac{(kT)^2 \sqrt{m_e}}{e^4 n_e L \sqrt{3kT}} = \frac{(kT)^{\frac{3}{2}} m_e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}\, e^4 n_i L} \quad \text{und} \quad \tau_i = \frac{(kT)^{\frac{3}{2}} m_i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}\, e^4 n_e L}, \tag{18.29}$$

wobei die Flugdauer eines Einzelteilchens jetzt proportional der dritten Potenz seiner Geschwindigkeit ist. Außerdem taucht eine weitere Schwierigkeit auf –

man darf den Impulsaustausch zwischen den Elektronen und den Ionen nicht vernachlässigen. Für die Bestimmung der Stromdichte dürfen wir nicht mehr die elementare Theorie benutzen, sondern müssen von einer kinetischen Gleichung ausgehen. Die entsprechenden Rechnungen sind äußerst kompliziert. Daher werden wir nicht näher auf sie eingehen, sondern nur die Endergebnisse anführen.

Die Diffusionsgeschwindigkeiten der einzelnen Komponenten werden durch die Gleichung nicht angegeben. Um sie zu ermitteln, muß man unabhängig die Bewegung des Gases als Ganzes bestimmen. In der ersten Näherung wird nur die relative Diffusionsgeschwindigkeit unter dem Einfluß der senkrecht zu dem Magnetfeld wirkenden Kräfte berechnet; sie beträgt

$$\bar{\mathfrak{v}}_i - \bar{\mathfrak{v}}_e = \frac{\tau\left(\mathfrak{F}_i - \frac{1}{\varrho_i}\frac{dp_i}{d\mathfrak{r}} - \mathfrak{F}_e + \frac{1}{\varrho_e}\frac{dp_e}{d\mathfrak{r}}\right)}{1+\omega^2\tau^2} + \frac{\omega\tau^2 H^{-1}\left(\mathfrak{F}_i - \frac{1}{\varrho_i}\frac{dp_i}{d\mathfrak{r}} - \mathfrak{F}_e + \frac{1}{\varrho_e}\frac{dp_e}{d\mathfrak{r}}\right)\times\mathfrak{H}}{1+\omega^2\tau^2}, \tag{18.30}$$

mit

$$\tau = \frac{\tau_i\varrho_e + \tau_e\varrho_i}{\varrho_e+\varrho_i} \approx \tau_e, \quad \omega = \frac{\omega_i\varrho_e + \omega_e\varrho_i}{\varrho_e+\varrho_i} \approx \omega_e = -\frac{eH}{mc}. \tag{18.30'}$$

Auf den ersten Blick scheinen sich die Ausdrücke (18.13) und (18.15) und der Ausdruck (18.30) ähnlich zu sein. Es besteht zwischen ihnen jedoch ein wichtiger Unterschied. Im ersten Fall hängt die Diffusionsgeschwindigkeit eines jeden Gases nur von den Kräften, die auf das gegebene Gas einwirken, und von ω und τ für dieses Gas ab, im zweiten Fall dagegen von den auf alle Gase einwirkenden Kräften und von den gewichteten Mittelwerten von ω und τ.

Für die Stromdichte ergibt sich im zweiten Fall, wenn wir die kleinen Glieder weglassen,

$$j = \frac{n_e e^2}{m}\left\{\frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{en_e}\frac{dp_e}{d\mathfrak{r}}\right) + \frac{\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\cdot\frac{1}{H}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{en_e}\frac{dp_e}{d\mathfrak{r}}\right)\times\mathfrak{H}\right\}$$

$$= \lambda^{\mathrm{I}}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{en_e}\frac{dp_e}{d\mathfrak{r}}\right) + \lambda^{\mathrm{II}}H^{-1}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{en_e}\frac{dp_e}{d\mathfrak{r}}\right)\times\mathfrak{H}, \tag{18.31}$$

wobei $\lambda^{\mathrm{I}} = \frac{\lambda_0}{1+\omega^2\tau^2}$ und $\lambda^{\mathrm{II}} = \frac{\lambda_0\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$ die Längs- und die Querleitfähigkeit sind.

Wenn $\omega\tau \gg 1$ ist, was in der Chromosphäre schon bei $H \geqq 10^{-2}$ und in der Korona bei $H \gg 10^{-5}$ erfüllt ist, gilt $\lambda^{\mathrm{I}} \ll \lambda^{\mathrm{II}} \ll \lambda_0$.

Es bleibt noch zu klären, welche Formel für die Stromdichte in der Sonnenatmosphäre anzuwenden ist.

Bei $T = 5000°$ ist $\sigma \approx 10^{-12}$, während ein neutrales Atom den Querschnitt $\sigma_0 \approx 10^{-15}$ besitzt. Wenn demnach die Zahl der Ionen größer als ein Tausendstel der neutralen Atome ist, wird die Formel (18.31) benutzt. Die Formel (18.16) darf man nur für die Sonnenflecke und möglicherweise für die dünnen Schichten der Photosphäre anwenden, wo die Ionisation minimal ist.

Die Formel (18.31) findet in fast allen Theorien, die die elektromagnetischen Erscheinungen in der Sonnenatmosphäre behandeln, starke Verwendung.

4. Die elektrischen Felder auf der Sonne

Wenn im Plasma ein Druckgradient auftritt, ruft er unabhängig vom Vorhandensein eines elektrischen Feldes einen Strom hervor (18.31). Dieser Strom hat die Bildung einer Raumladung zur Folge, deren Feld die weitere Verteilung der Ladungen verhindert.

Die Feldstärke, bei der der Strom zu fließen aufhört, ist nach (18.31) gleich

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{e n_e} \operatorname{grad} p_e . \tag{18.32}$$

Wie aus dem erhaltenen Ausdruck ersichtlich ist, besitzt dieses Feld ein Potential, wenn zwischen p_e und n_e ein eindeutiger Zusammenhang besteht. Die von ihm gebildete Ladung ist sehr klein. Man rechnet leicht nach, daß die Zahl der nichtkompensierten Elementarladungen um viele Größenordnungen kleiner ist als die Zahl der Ionen in demselben Volumen. Die Dichteabnahme in der Atmosphäre mit der Höhe ruft in der Photosphäre ein Feld $E_0 \approx 5 \cdot 10^{-11}$ CGS-Einheiten $\approx 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ V/cm hervor.

Wenn sich eine aus ionisiertem Wasserstoff zusammengesetzte isotherme Atmosphäre im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, kann man die Gleichgewichtsbedingung für die Elektronen und die Ionen getrennt in folgender Gestalt aufschreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_e}{d\mathfrak{r}} &= n_e m_e \mathfrak{g} + n_e e \mathfrak{E}, \\ \frac{dp_i}{d\mathfrak{r}} &= n_i m_i \mathfrak{g} - n_i e \mathfrak{E}, \end{aligned}\right\} \tag{18.33}$$

wobei $n_e = n_i$, $p_e = p_i$ ist und der Vektor der Feldstärke nach oben zeigt.

Aus den Gleichungen (18.33) finden wir

$$\frac{dp_e}{d\mathfrak{r}} = \frac{1}{2} m_H n_e \mathfrak{g}; \quad \mathfrak{E} = -\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{2} m_H \mathfrak{g} = -\frac{1}{e n_e} \frac{dp_e}{d\mathfrak{r}} . \tag{18.34}$$

Wir erkennen, daß das Feld an einem Proton mit der Kraft $e\,\mathfrak{E}$, die gleich seinem halben Gewicht ist, angreift. Das effektive Gewicht des Protons, d.h. die von der Sonne ausgeübte Anziehungskraft, ist jetzt gleich dem „effektiven" Gewicht

des Elektrons — $e\,\mathfrak{E}$. Dies bewirkt eine gleiche Verteilung der Protonen und der Elektronen in der Höhe, die für die makroskopische Neutralität der Atmosphäre notwendig ist.

Außer dem betrachteten Fall kennen wir fast keinen anderen Mechanismus, der die Bildung einer Raumladung in einem ionisierten Gas verursachen könnte. Wegen seiner großen Leitfähigkeit zerfällt die Ladung in einer Zeit von der Größenordnung λ^{-1}, d.h. in 10^{-12} sec. Aus diesem Grunde können keine Potentialfelder von Bedeutung auftreten. Eine weit größere Bedeutung besitzen die elektrischen Wirbelfelder, da sie nicht zur Bildung von Raumladungen führen. Die Hauptquelle für die Wirbelfelder sind die veränderlichen Sonnenflecke. Jede Änderung des Magnetflusses hat das Auftreten eines induzierten Feldes zur Folge, das der Bedingung

$$\oint_L E_s ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{18.35}$$

unterliegt, wobei E_s die Projektion von $\mathfrak{E}$ auf die Kontur L und Φ der magnetische Induktionsfluß durch die von L umrandete Oberfläche ist.

Wenn ein Fleck mit der Feldstärke $H = 10^3$ abs. el.-magn. Einheiten und dem Radius $r = 5 \cdot 10^8$ cm während der Zeit $t = 3$ Tage auftritt, berechnet sich die maximale Feldstärke des elektrischen Wirbelfeldes über dem Fleck durch den Ausdruck

$$E = \frac{1}{2\pi r}\frac{1}{c}\frac{\pi r^2 H}{t} = \frac{r}{2c}\frac{H}{t} = \frac{5 \cdot 10^8 \cdot 10^3}{2 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}4 \cdot 10^5}$$
$$\approx 3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{CGSE} = 10^{-2}\ \mathrm{V/cm}. \tag{18.35'}$$

Dieses Feld bezieht sich jedoch auf ein ruhendes Koordinatensystem. Wenn wir die Wirkung des Feldes in einem beliebigen Medium betrachten wollen, müssen wir uns die Kontur L (nicht die geometrische, sondern die materielle Kontur) mit diesem Medium verbunden denken, und bei der Berechnung des Feldes in einem Koordinatensystem, das mit dem Plasma verbunden ist, müssen wir ebenfalls die Bewegung des Mediums berücksichtigen. Wenn z.B. die Materie über einem wachsenden Fleck mit einer solchen Geschwindigkeit komprimiert wird, daß der Strom durch die zusammenschrumpfende Kontur sich nicht ändert, so entstehen keine Induktionsströme, und das Feld im sich bewegenden Medium ist gleich Null.

Irgendein Körper möge sich im Felde $\mathfrak{H}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegen. Wenn dieser Körper mit der Ladung e behaftet ist, greift bei der Bewegung an ihm die Kraft

$$\mathfrak{f} = e\frac{1}{c}\mathfrak{v} \times \mathfrak{H} = e\mathfrak{E}' \tag{18.36}$$

mit

$$\mathfrak{E}' = \frac{1}{c}\mathfrak{v} \times \mathfrak{H} \tag{18.36'}$$

an. Ein gegenüber dem Körper ruhender Beobachter würde annehmen, daß in seinem Bezugssystem ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}'$ auftritt. Diese Erscheinung – ein Spezialfall der elektromagnetischen Induktion – ist für die Elektrodynamik der Sonne von großer Wichtigkeit. Wir betrachten ein Beispiel, das unsere Ausführungen erläutern soll. In den Feldern $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ befinde sich ein stark verdünntes Plasma. Wie wir oben gezeigt haben, gerät das Plasma in Bewegung (Drift) und besitzt die Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \frac{c}{H^2} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$. Infolge dieser Bewegung tritt ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}' = \frac{1}{c} \mathfrak{v} \times \mathfrak{H} = -\mathfrak{E}$ auf. Somit ist das resultierende Feld in dem sich bewegenden Plasma gleich $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}' = 0$, und es entstehen in ihm keinerlei Ströme.

Die Wechselwirkung der Teilchen verringert die Driftgeschwindigkeit; jedoch darf man auch in diesem Fall in die Formel für die Stromdichte nicht den Wert $\mathfrak{E}$ aus dem System einsetzen, das gegenüber dem Beobachter ruht, sondern muß mit dem Wert $\mathfrak{E}$ aus dem Bezugssystem, das mit dem Plasma als Ganzes verbunden ist, rechnen. Mit anderen Worten, zur Bestimmung von $\mathfrak{j}$, das von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, muß man eine Größe $\mathfrak{E}$ benutzen, die in einem ganz bestimmten Bezugssystem angegeben ist.

Wenn das leitende Medium sich unter der Einwirkung von beliebigen Kräften in einem Magnetfeld bewegt, ruft $\mathfrak{E}'$ – wie jedes Feld – einen Strom hervor, der durch (18.31) festgelegt ist.

Außer in den betrachteten Fällen entstehen induzierte Felder bei den verschiedenartigsten Änderungen des magnetischen Momentes einer bipolaren Gruppe: bei der Änderung des Abstandes zwischen den Flecken, bei der Rotation einer Gruppe um ihren Schwerpunkt usw. Der letzte Fall ist von besonderem Interesse, weil bei ihm das elektrische Feld in die Richtung des magnetischen Feldes zeigt und die Leitfähigkeit groß ist.

Das Auftreten von Strömen erzeugt ein neues elektrisches Feld, das Feld der Selbstinduktion $\mathfrak{E}''$, das infolge der großen Leitfähigkeit und der großen Ausdehnung der Sonnenatmosphäre von großer Bedeutung ist. Dieses Feld entsteht durch die Änderung des Magnetfeldes der Ströme. Die Stromdichte ist bestimmt aus dem Zusammenwirken aller elektrischen Felder $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''$.

5. Die thermischen und die mechanischen Wirkungen der Ströme

Die Ströme, die bei den verschiedenen Erscheinungsformen der elektromagnetischen Induktion entstehen, können thermisch und mechanisch wirksam werden. Die von dem Strom während 1 sec in 1 cm³ abgegebene Wärme ist durch den Ausdruck

$$q = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{E} = \lambda E^2 = \frac{1}{\lambda} j^2 \tag{18.37}$$

festgelegt.

Die abgegebene Wärmemenge wird durch die Komponente des Stromes angegeben, die parallel zu $\mathfrak{E}$ verläuft. Daher ist bei einem anisotropen Medium λ^{I} an Stelle von λ zu benutzen.

Es ist möglich, daß die Ursache für die hohe Temperatur der Korona und der oberen Chromosphäre und ebenfalls die Ursache für das Auftreten der Fackeln und der Flocculi in der Erwärmung dieser Gebiete durch elektrische Ströme zu suchen ist. Daß die Flecke stets von Fackeln umgeben sind und die Temperatur der Korona über ihnen höher ist, kann man nicht als Zufall ansehen. Durch das elektrische Feld wird den Elektronen kinetische Energie mitgeteilt.

Unter gewöhnlichen Bedingungen übertragen die Elektronen bei nicht sehr starken Feldern diese Energie an die Ionen, und die kinetischen Temperaturen der Ionen und der Elektronen sind gleich. Ein Elektron kann aber bei jedem elastischen Stoß an ein Ion nicht mehr als den Bruchteil $\frac{4\,m_e}{m_i}$ seiner eigenen Energie abgeben. Man kann einen solchen Wert für das Feld $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0$ angeben, bei dem die zusätzliche Energie, die von einem Elektron längs einer Strecke von der freien Weglänge aufgenommen wird, gleich dem maximalen Anteil an thermischer Energie ist, die es an ein Ion abgeben kann. Die freie Weglänge ist proportional dem Quadrat der Energie. Wenn daher $E > E_0$ ist, nimmt das Elektron eine größere Energie auf, als es abgeben kann. Seine Energie beginnt anzuwachsen, folglich vergrößert sich die freie Weglänge und die Energie, die das Elektron von dem Feld empfängt usw. Die Energie der Elektronen kann jetzt nur durch unelastische Stöße oder durch die endliche Größe der Felder begrenzt werden. Auf diese Weise kann das Feld eine Entladung herbeiführen. Dieser kritische Wert des Feldes, bei dem sich dies ereignen kann, beträgt

$$E_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9}\,\frac{\pi\beta^2 m_e^{\frac{3}{2}}\,n_i Z^2}{u_0^2\,e\,m_i^{\frac{1}{2}}}, \tag{18.38}$$

wobei $\beta = 1{,}57 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{sec}^2}$ und u_0 die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen ist, die sich mit den Ionen im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Bei der Temperatur $T = 5750°$ ist $E_0 = 7 \cdot 10^{-5}\,p_i$. In der Chromosphäre ist $p_i \approx 1\,\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}}$, so daß bei $E \geqslant 10^{-4}$ eine Entladung eintreten kann.

Es ist zu beachten, daß ein stabiles Potentialfeld, das z.B. infolge eines Gradienten in der Konzentration auftritt, nicht die Ursache für eine Wärmeabgabe sein kann, da es lediglich eine gewisse Neuverteilung der Elektronendichte, nicht aber eine Bewegung der Elektronen hervorruft. Aus der Formel (18.31) geht hervor, daß die Stromdichte in diesem Fall gleich Null ist. Außer durch Wirbelfelder kann ein Strom durch ein veränderliches Potentialfeld erzeugt werden doch ist dies in einer ionisierten Atmosphäre praktisch nicht realisierbar.

Die mechanische Wirkung des Stromes folgt aus (18.2). Die gesamte auf das Gas einwirkende Kraft ist gleich der Summe der Kräfte, die an den Ionen und

den Elektronen angreifen, und ist gleich

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_i + \mathfrak{f}_e = n_i e \mathfrak{E} + \frac{n_i e}{c} \mathfrak{v}_i \times \mathfrak{H} - n_e e \mathfrak{E} - \frac{n_e e}{c} \mathfrak{v}_e \times \mathfrak{H}$$

$$= \frac{1}{c} n_e e (\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_e) \times \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \mathfrak{j} \times \mathfrak{H}, \tag{18.39}$$

da $n_i = n_e$ ist und $\mathfrak{j}$ in (18.39) den gesamten Strom, sowohl den Längs- als auch den Querstrom, bedeutet. Die Kraft $\mathfrak{f}$ versetzt das Plasma in Bewegung, und die Bewegung des Plasmas ändert ihrerseits den Strom. Daher darf man diesen nicht einfach aus der Leitfähigkeit berechnen; man muß gleichzeitig die Gleichungen für die Leitfähigkeit und die Bewegungsgleichungen des Plasmas unter der Einwirkung der Kräfte $\mathfrak{f}$, grad p und anderer lösen und ebenfalls die Drift und die aus den MAXWELLschen Gleichungen zu berechnende Selbstinduktion berücksichtigen. Wenn grad $p = 0$ ist, so kommt das Plasma in Bewegung, und der Strom ist viel kleiner als in einem ruhenden Medium. Für das Gleichgewicht ist notwendig, daß die Gleichung grad $p = \frac{1}{c} \mathfrak{j} \times \mathfrak{H}$ erfüllt ist. Ein Druckgradient erzeugt seinerseits einen Strom.

Demzufolge ist die Lösung der Aufgabe, die Ströme und die Bewegungen der Materie in elektromagnetischen Feldern zu bestimmen, sehr schwierig. Die mechanische Wirkung eines Stromes auf das Gas ist bis auf den heutigen Tag die einzige Ursache, die die Bewegungen der Protuberanzen zu erklären vermag. Die elektrostatische Kraft, die auf geladene Wolken einwirkt, ist wegen der Kleinheit der möglichen Raumladung von weit geringerer Bedeutung. Eine Theorie, die die Bewegungen der Protuberanzen in zufriedenstellender Weise erklärt, ist jedoch bisher noch nicht geschaffen worden.

Wenn sich das leitende Medium in einem Magnetfeld mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{v} \perp \mathfrak{H}$ bewegt, entsteht in ihm eine Stromdichte $\mathfrak{j} = \frac{\lambda}{c} \mathfrak{v} \times \mathfrak{H}$. Infolge der Selbstinduktion wächst der Strom faktisch allmählich an; sein Betrag kann je nach den konkreten Bedingungen um einige Größenordnungen kleiner sein. Dieser Strom greift an 1 cm³ des Mediums mit der Kraft

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{c} \mathfrak{j} \times \mathfrak{H} = -\frac{\lambda \mathfrak{H}^2}{c^2} \mathfrak{v} \tag{18.40}$$

an.

Wie man leicht erkennt, bremst die Kraft $\mathfrak{f}$ die Bewegungen des Mediums nach einer Zeit von der Größenordnung

$$t \approx \frac{\varrho v}{f} = \frac{\varrho c^2}{\lambda H^2} \tag{18.41}$$

oder in einer um einige Größenordnungen größeren Zeit infolge Selbstinduktion, deren Einfluß wir später berechnen, ab. In Wirklichkeit wird die Bewegung nicht gleichmäßig verzögert. Das Auftreten der induzierten Felder führt

– wie später gezeigt wird – zu einer wellenförmigen oder noch komplizierteren Bewegung. Das angeführte Beispiel zeigt nur, daß eine stationäre gleichförmige Bewegung des leitenden Mediums quer zu $\mathfrak{H}$ ohne äußere Kräfte unmöglich ist.

Die Materie ist gewissermaßen mit dem Magnetfeld gekoppelt, „verschmolzen" (auf die Bewegung längs $\mathfrak{H}$ hat das Feld keinen Einfluß).

Wenn daher in der leichtbeweglichen Sonnenatmosphäre eine Änderung des Magnetfeldes eintritt, z. B. eine Verstärkung und somit eine Verdichtung der Kraftlinien, wird die Materie, die sich mit den Kraftlinien bewegt, ebenfalls komprimiert, und es bilden sich *Kondensationen*, d. h. Bereiche größerer Dichte. Das Auftreten der Protuberanzen über den Flecken hängt vielleicht mit diesem Umstand zusammen. Die Bewegungsrichtung der Protuberanzen und der Ströme kann durch die Richtung des Feldes bestimmt werden, das die Querbewegungen bremst.

Weil das Plasma dem Felde folgt, wird der magnetische Kraftfluß durch eine beliebige materielle Kontur nicht geändert, und eine elektromotorische Kraft der Induktion tritt nicht auf.

Für das Auftreten eines Induktionsstromes ist es notwendig, daß irgendeine Kraft, z. B. der Druckgradient, die Bewegung der Materie zum Stehen bringt, d. h. die Materie daran hindert, dem Felde zu folgen. Dies kann z. B. bei der Bildung einer Kondensation über einem wachsenden Fleck der Fall sein. Das gleiche kann eintreten, wenn die Bewegung, die senkrecht zur Feldrichtung verläuft, durch eine beliebige Kraft aufrechterhalten wird.

Wir betrachten diesen Fall ausführlicher.

Eine Kraft mit der Dichte $\mathfrak{f}'$ möge die Bewegung aufrechterhalten. Bei einer stationären Bewegung hält $\mathfrak{f}'$ der Kraft $\mathfrak{f} = \frac{1}{c}\mathfrak{j} \times \mathfrak{H}$ das Gleichgewicht. Auf diese Weise bestimmt der Betrag der Kraft $\mathfrak{f}'$ (bei vorgegebenem $\mathfrak{H}$) die Stromdichte. Die Selbstinduktion ist hier bedeutungslos, da die Stromdichte unter den Bedingungen der Stationarität konstant ist. Dagegen hängt die Geschwindigkeit, mit der sich die Materie gegenüber dem Feld bewegt, von der Leitfähigkeit ab – je größer die Leitfähigkeit ist, um so geringer ist die Geschwindigkeit, die die erforderliche Stromdichte bestimmt. Unter gewöhnlichen Bedingungen ist die Geschwindigkeit klein.

Als Beispiel berechnen wir die Fallgeschwindigkeit einer ionisierten Protuberanz in einem Magnetfeld, dessen Feldstärke horizontal gerichtet ist und $H = 1$ Oersted beträgt, wobei $n_e = 10^{10}$ ist. Aus (18.40) erhalten wir die Stationaritätsbedingung $n_e m_H g = \frac{\lambda^{\mathrm{I}} H^2}{c^2} v$, wobei $g = 2{,}7 \cdot 10^4$ die Schwerebeschleunigung ist.

Wir setzen $T = 5000°$ und finden nach (18.29)

$$\tau = \tau_e = 10^{-6}, \quad \omega = \omega_e = -2 \cdot 10^7 \quad \text{und} \quad |\omega\tau| = 20 \gg 1\,.$$

In diesem Fall ist

$$\lambda^{\mathrm{I}} = \frac{\lambda_0}{\omega^2\tau^2} = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}\frac{1}{\tau^2}\cdot\frac{m_e^2 c^2}{e^2 H^2} = \frac{n_e m_e c^2}{\tau H^2}$$

und die Fallgeschwindigkeit

$$v = \frac{n_e m_H g c^2}{\lambda^1 H^2} = \frac{m_H g \tau}{m_e} \approx 20 \text{ cm/sec}.$$

Die Berücksichtigung der Drift ändert an der Größenordnung nichts. Praktisch bedeutet dies, daß eine Protuberanz einfach über der Sonnenoberfläche schwebt. Die Existenz von ruhenden Protuberanzen wird möglicherweise durch das Auftreten von streng horizontalen Feldern hervorgerufen. Wenn dagegen der Vektor der Feldstärke gegen die Sonnenoberfläche geneigt ist, wird sich die Protuberanz in Richtung der Feldstärke wie auf einer schiefen Ebene mit entsprechender Beschleunigung bewegen.

Außer dem betrachteten Fall gibt es prinzipiell noch eine weitere Möglichkeit für die Bewegung von Materie in einem Feld.

Dieser Fall liegt vor, wenn sich eine große Gasmasse aus einem Gebiet mit kleiner Feldstärke in ein Gebiet mit großer Feldstärke bewegt.

Wie wir noch zeigen werden, kann das Feld nicht sofort die Gaswolke, die den Strom leitet, durchdringen; auf der Oberfläche der Wolke werden abschirmende Ströme induziert, deren Magnetfeld das Feld im Innern der Wolke neutralisiert. Auf diese Weise ist das Innere der Wolken der bremsenden Kraft nicht ausgesetzt, und die Zeit für die Abbremsung wird im ganzen vergrößert.

Die Wechselwirkung der abschirmenden Ströme und des Magnetfeldes erzeugt den sogenannten magnetischen Druck, der gleich $\frac{H^2}{8\pi}$ ist. Wir berechnen seine Bremswirkung. Die Wolke besitze eine Länge $l = 1000$ km und die Dichte $\varrho = 10^{-12} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, und sie bewege sich mit der Geschwindigkeit $v = 30$ km/sec in dem Felde $H = 30$ Oersted. Dann hört die Bewegung nach einer Zeit $t \approx \frac{l \varrho v 8\pi}{H^2} = 8$ sec auf.

Wir erkennen, daß die „elektromagnetische Abschirmung“ nur im Falle sehr großer Massen und schwacher Felder eine gewisse Rolle spielen kann.

Im großen und ganzen kann man die Schlußfolgerung ziehen, daß die Bewegung eines ionisierten Gases quer zum Magnetfeld verhältnismäßig schnell zum Stillstand kommt, wenn keine merklichen Kräfte vorhanden sind, die die Bewegung aufrechterhalten.

6. Berücksichtigung der Selbstinduktion

In unseren Rechnungen haben wir angenommen, daß die Stromdichte den stationären Wert $\mathfrak{j} = \lambda \mathfrak{E}$ besitzt. Indessen ist bekannt, daß beim „Schließen“ des Feldes $\mathfrak{E}$ der Strom nicht sofort seinen Maximalwert annimmt. Er wächst allmählich an, und die Zeit seiner Zunahme ist proportional der Selbstinduktion des Leiters. Die Selbstinduktion von leitenden Körpern mit großen Volumen

ist groß, die Stromdichte und ebenfalls die bremsende Kraft nehmen langsam zu, so daß die Zeit für die Abbremsung vergrößert wird. Um ein quantitatives Ergebnis zu erhalten, ist das System der MAXWELLschen Gleichungen und die hydrodynamische Gleichung gemeinsam zu lösen. Für einige Spezialfälle hat ALFVÉN Lösungen angegeben [5, S. 188]. Er geht von den Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}, \tag{18.42}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{18.43}$$

$$\mathfrak{j} = \lambda \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} \mathfrak{v} \times \mathfrak{H} \right), \tag{18.44}$$

$$\varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{1}{c} \mathfrak{j} \times \mathfrak{H} - \operatorname{grad} \mathfrak{p} \tag{18.45}$$

aus, wobei $\mathfrak{E}$ das elektrische Feld der Selbstinduktion ist.

In den Formeln (18.42)–(18.45) ist berücksichtigt, daß in der Sonnenatmosphäre der Verschiebungsstrom beträchtlich kleiner ist als der Leitungsstrom und daß die magnetische Permeabilität gleich Eins ist.

Als erste Näherung betrachten wir ein Medium von konstanter Dichte mit unendlich großer Leitfähigkeit, wobei die Anfangsgeschwindigkeit des Mediums senkrecht zu dem homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ gerichtet ist und ihr Betrag nur von z abhängt (z-Achse $\parallel \mathfrak{H}$). Dann hängen die Beträge aller Vektoren, die in die Gleichungen eingehen, nur von z und t ab. Wir drehen das Koordinatensystem so, daß $j_y = 0$ ist. Außerdem ist $j_z = 0$, da die induzierten Felder in dem vorliegenden Fall senkrecht zu $\mathfrak{H}$ sind. Dann finden wir aus (18.42):

$$j_x = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad H_x = \text{const} = 0, \quad H_z = H_0. \tag{18.46}$$

Zu dem ursprünglichen Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ tritt das Feld $\mathfrak{H}_y$ hinzu, das von dem System der Induktionsströme herrührt.

Wir setzen diese Größen in (18.45) ein. Da nach Voraussetzung grad p keine Komponenten in der xy-Ebene besitzt, erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0, \quad v_x = \text{const} = 0, \\ &\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{H_0}{4\pi\varrho} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad v_z = 0 \end{aligned} \right\} \tag{18.47}$$

und ferner

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial \left(H_y^2\right)}{\partial z}. \tag{18.48}$$

Da $\lambda = \infty$ und j endlich ist, ergibt die Gleichung (18.44)

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}, \quad E_x = -\frac{1}{c} v_y H_0, \quad E_y = E_z = 0. \tag{18.49}$$

Aus der Gleichung (18.43) finden wir

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -c\frac{\partial E_x}{\partial z}. \tag{18.50}$$

Unter Benutzung von (18.49), (18.50) und (18.47) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{H_0^2}{4\pi\varrho}\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}. \tag{18.51}$$

Die gefundene Gleichung ist mit der Wellengleichung identisch und beschreibt folglich eine Wellenbewegung, die sich längs der z-Achse mit der Geschwindigkeit

$$V = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\varrho}} \tag{18.52}$$

ausbreitet.

Der Bewegungszustand der Flüssigkeit pflanzt sich längs $\mathfrak{H}_0$ mit einer Geschwindigkeit fort, die proportional der Feldstärke und umgekehrt proportional $\sqrt{\varrho}$ ist.

Diese magnetisch-hydrodynamischen Wellen sind in der Sonnenphysik von großer Bedeutung. Sie können den Bewegungszustand und das veränderliche Magnetfeld von einer Schicht in die andere übertragen. Wenn die Welle sinusförmig ist, wobei die Amplitude der Schwingung H_y gleich A und die Frequenz gleich Ω ist, erhält man für alle übrigen Größen der Gleichungen (18.46) bis (18.50) folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
H_y &= A\sin\Omega\left(t - \frac{z}{v}\right),\\
v_y &= -\frac{A}{\sqrt{4\pi\varrho}}\sin\Omega\left(t - \frac{z}{v}\right),\\
j_x &= A\frac{c\Omega}{H}\sqrt{\frac{\varrho}{4\pi}}\cos\Omega\left(t - \frac{z}{v}\right),\\
E_x &= A\frac{H_0}{c\sqrt{4\pi\varrho}}\sin\Omega\left(t - \frac{z}{v}\right),\\
p &= p_0 - \frac{A^2}{8\pi}\sin^2\Omega\left(t - \frac{z}{v}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{18.53}$$

Die magnetischen Kraftlinien, die vordem Geraden waren, werden jetzt infolge der Überlagerung des Feldes H_y zu sinusförmigen Kurven. Ihre Form wird

durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dz} = \frac{H_y}{H_z} \tag{18.54}$$

bestimmt, deren Lösung die Gestalt

$$x = x_0, \quad y = y_0 + \frac{A}{\Omega\sqrt{4\pi\varrho}} \cos\Omega\left(t - \frac{z}{v}\right) \tag{18.55}$$

hat. Die Bewegungsgeschwindigkeit der Kraftlinien $\frac{dy}{dt}$ ist – wie man leicht erkennt – gleich v_y.

Die Begriffe der mechanischen Bewegung sind auf das Feld und die Kraftlinien eigentlich nicht anwendbar. Wir benutzen sie als anschauliches Analogon, mit dessen Hilfe man sich oft eine qualitative Vorstellung von dem Charakter der Erscheinungen als Ganzes verschaffen kann. Die nach einer derartigen Methode gewonnenen Ergebnisse darf man nicht als streng begründet ansehen.

Auf diese Weise bewegen sich die Materie und die Kraftlinien gemeinsam fort. Solch ein Verhalten müßte man auf Grund der allgemeinen Eigenschaften eines leitenden Mediums, das an den Kraftlinien „klebt", erwarten. Von diesem Standpunkt aus können wir die magnetisch-hydrodynamischen Wellen als Wellen auffassen, die auf einer elastisch aufgespannten Schnur, der Kraftlinie, entlanglaufen. Die Masse von 1 cm Länge beträgt $m = \frac{\varrho}{H_0}$, so daß die Zahl der Kraftlinien auf 1 cm^2 gleich H_0 ist. Die Spannung einer Kraftlinie beträgt $S = \frac{H_0}{8\pi}$. Bekanntlich ist die Geschwindigkeit einer auf einer Schnur entlanglaufenden Welle gleich $V = \sqrt{\frac{S}{m}}$. Wenn wir S und m einsetzen, erhalten wir $V = \frac{H_0}{\sqrt{8\pi\varrho}}$. Die Abweichung von (18.52) erklärt sich dadurch, daß wir den Seitendruck der Kraftlinien, der ebenfalls gleich $\frac{H}{8\pi}$ ist (für eine Linie), nicht berücksichtigt haben. Wir führen jedoch hier keine entsprechende Rechnung durch.

Jetzt können wir die Zeit für die Abbremsung einer Gasmasse, die sich in dem Felde H_0 mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt und den Durchmesser l und die Dichte ϱ besitzt, ausrechnen. Wir können diese Wolke näherungsweise als die Hälfte einer Welle auffassen, die sich wie ein sich hebender Wellenkamm nach einer Seite fortbewegt. Dann ist die Wellenlänge $2\,l$, die Geschwindigkeit $v = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\varrho}}$ und folglich die Periode $T = \frac{2\,l}{v}$. Die Zeit für die Abbremsung der Wolke beträgt

$$t \approx \frac{1}{4}T = \frac{l}{2v} = \frac{l\sqrt{4\pi\varrho}}{2H_0}. \tag{18.55'}$$

Wenn $l = 1000$ km, $\varrho = 10^{-12}\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und $H_0 = 10$ Oersted, beträgt $t \approx 20$ sec.

Somit vergrößert die Berücksichtigung der Selbstinduktion die Zeit für die Abbremsung beträchtlich.

Wenn die Leitfähigkeit nicht unendlich groß ist, verausgabt der Strom $\mathfrak{j}$ einen Teil seiner Energie auf die Erwärmung der Materie, und die Welle wird gedämpft. Bei nicht zu starker Dämpfung ist nach Formel (18.37) der mittlere Energieverlust in 1 sec gleich

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = -\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\lambda} j^2 dt = -\frac{A^2 c^2 \Omega^2 \varrho}{4\pi H_0^2 \lambda}\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\Omega\left(t-\frac{z}{v}\right)dt = -\frac{A^2 c^2 \Omega^2 \varrho}{8\pi H_0^2 \lambda}. \tag{18.56}$$

Die Energie der Welle W setzt sich aus der magnetischen Energie $\frac{H_y^2}{8\pi}$ und aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2}\varrho v^2$ zusammen. Mit Hilfe von (18.53) rechnet man leicht aus, daß diese Anteile gleich sind, so daß die gesamte mittlere Energie gleich

$$\overline{W} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{H_y^2}{4\pi} dt = \frac{A^2}{4\pi}\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\Omega\left(t-\frac{z}{v}\right)dt = \frac{A^2}{8\pi} \tag{18.57}$$

wird.

Wir führen die Größe α ein, die durch die Beziehung

$$2\alpha = -\frac{1}{\overline{W}}\frac{d\overline{W}}{dz} = \frac{1}{\overline{W}}\frac{1}{v}\frac{d\overline{W}}{dt}$$

definiert ist. Dann ist $\overline{W} = \overline{W}_0\, e^{-2\alpha z}$. Da W proportional H_y^2 ist, gilt

$$H_y = A e^{-\alpha z} \sin\Omega\left(t-\frac{z}{v}\right).$$

Das logarithmische Dekrement der Dämpfung ist – wie man aus der Definition (18.57′) und aus (18.56) und (18.57) leicht berechnet – gleich

$$\alpha = \sqrt{\pi}\,\frac{c^2}{\lambda}\,\frac{\Omega^2 \varrho^{\frac{3}{2}}}{H_0^3}.$$

Wenn die Leitfähigkeit anisotrop ist, muß man λ^{I} an Stelle von λ benutzen, da nur j^{I} Wärme abgibt.

Die Dämpfung der Wellen ist nur für verhältnismäßig schnelle Schwingungen mit Perioden von der Größenordnung Minuten von Bedeutung.

7. Die Ausbreitung des Magnetfeldes

Die magneto-hydrodynamischen Wellen stellen einen der Mechanismen für die Ausbreitung des Feldes in einem leitenden Medium dar. Wenn sich das Medium nicht bewegen kann, breitet sich das Feld in Form elektromagnetischer Schwingungen aus, die bei kleiner Leitfähigkeit periodisch und bei großer Leitfähigkeit aperiodisch gedämpft sind.

Im letzten Fall dringt das Feld etwa um $^1/_6$ der auf das betreffende Medium bezogenen Wellenlänge in das leitende Medium ein. Folglich dringt ein langsamer veränderliches Feld tiefer in den Leiter ein. Dies erzeugt die sogenannte elektromagnetische Abschirmung der inneren Teile eines Leiters von dem äußeren Magnetfeld, von der wir oben gesprochen haben. Die Feldenergie wandelt sich hierbei in die Energie des Systems der abschirmenden Ströme um, die durch das Magnetfeld dieser Ströme bestimmt wird.

Das Problem der Ausbreitung eines veränderlichen Magnetfeldes ist für die Sonnenphysik von großer Wichtigkeit, da die Pole dieses Feldes – die Sonnenflecke – an einzelnen Stellen der Sonnenoberfläche lokalisiert sind und der Charakter der Erscheinungen davon abhängt, ob sich das Feld bis zur Korona oder bis zu einer Protuberanz erstreckt und ihre Feldstärke etwas vermindert. Die Messung des Feldes unmittelbar in einer Protuberanz oder in der Korona auszuführen ist schwierig, da die Feldstärken klein sind.

P. E. Kolpakow und J. P. Terlezki[1]) haben auf die wichtige Rolle der Beweglichkeit der Sonnenatmosphäre hingewiesen. Wir haben schon früher gesehen, daß in diesem Falle die Materie an die Kraftlinien „angeklebt" ist, so daß keine Induktionsströme entstehen und die Feldenergie sich nicht in Wärme verwandelt. Folglich muß sich das Feld ausbreiten. Diese Erscheinung kann man am anschaulichsten als eine Bewegung der Materie unter der gemeinsamen Einwirkung eines magnetischen Druckgradienten und des Feldes deuten.

Die zweite für die Sonne wichtige Form der Ausdehnung des Feldes ist der Transport im Innern einer großen Wolke. Wenn im Innern einer Wolke ein Magnetfeld vorhanden und das Feld außen verschwunden ist, so erzeugen die Oberflächenschichten der Wolke eine elektromagnetische Abschirmung für die äußeren Schichten, die die schnelle Ausbreitung des Feldes und die Verringerung der Feldstärke in der Wolke verhindern.

Wir betrachten diese Erscheinung ausführlicher. Da das Feld keine Quellen besitzt, kann man das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ des Magnetfeldes einführen, das durch die Bedingung $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ definiert ist. Setzen wir den Wert $\mathfrak{H}$ in (18.43) ein und vertauschen wir die Reihenfolge der Differentiation nach den Koordinaten und

---

[1]) P. E. Kolpakow und J. P. Terlezki, Zur Frage der Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes der Flecke in der Sonnenatmosphäre. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, **76**, 185, 1951 (П. Е. Колпаков и Я. П. Терлецкий, К вопросу распространения электромагнитного поля пятен в атмосфере Солнца. Доклады Академии наук СССР **76**, 185, 1951).

der Zeit, so finden wir

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{dt} + \operatorname{grad}\varphi\,, \tag{18.58}$$

wobei $\mathfrak{E}$ das elektrische Feld, das beim Zerfall des Magnetfeldes entsteht, und φ das skalare Potential ist. Das letzte Glied kann man fortlassen, da in einem leitenden Medium keine merkliche Raumladung entstehen kann.

Somit finden wir für die Dichte des Induktionsstromes

$$\mathfrak{j} = \lambda\mathfrak{E} = -\frac{\lambda}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\,. \tag{19.59}$$

Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld, das durch die Gleichung (18.42) bestimmt ist. Wir ersetzen auf der linken Seite dieser Gleichung $\mathfrak{H}$ durch rot $\mathfrak{A}$ und auf der rechten Seite $\mathfrak{j}$ durch (18.59) und erhalten

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A} = \frac{4\pi\lambda}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\,. \tag{18.60}$$

Bisher haben wir nur rot $\mathfrak{A}$ festgelegt, für div $\mathfrak{A}$ können wir einen beliebigen Wert annehmen. Wir setzen div $\mathfrak{A} = 0$.

$$\nabla^2\mathfrak{A} = \frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial z^2} \tag{18.60'}$$

ist größenordnungsmäßig nicht größer als $\frac{\mathfrak{A}}{R^2}$, wobei R der Radius der Wolke ist (wenn außerhalb der Wolke $H \approx 0$ und $A \approx 0$). Dann kann man die Geschwindigkeit für die Abnahme von $\mathfrak{A}$ aus (18.60) ermitteln:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \leqslant -\frac{c^2\mathfrak{A}}{4\pi\lambda R}\,, \tag{18.61}$$

hieraus erhält man für die Zerfallszeit von $\mathfrak{A}$ (und folglich auch von $\mathfrak{H}$)

$$t \geqslant \frac{A}{-\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{4\pi\lambda R^2}{c^2}\,. \tag{18.62}$$

Die Zeit für das Anwachsen des Feldes ist von der gleichen Größenordnung. Wenn die Leitfähigkeit anisotrop ist, ist λ^{I} zu benutzen, weil nach der Lenzschen Regel nur der in Richtung $\mathfrak{E}$ verlaufende Strom eine Änderung des Magnetfeldes verhindert. Wenn $R = R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10}$ cm und $\lambda = 10^{16}$ sec^{-1} (die Bedingungen für die inneren Gebiete der Sonne) ist, beträgt $t \approx 10^9$ Jahre. Faktisch legt diese Zeit die Selbstinduktion des gegebenen Volumens und die Zeit zur Erreichung eines stationären Zustandes fest.

Wenn somit die Sonne vor Milliarden Jahren ihr Magnetfeld erworben haben sollte, würde dieses Feld, sogar ohne daß irgendwelche Ursachen vorhanden

wären, die dieses Feld aufrechterhalten, bis in die Gegenwart hinein unversehrt erhalten bleiben. Für eine Wolke mit $R = 10^9$ cm und $\lambda = 10^{13}$ sec^{-1} (die Bedingungen für die Schichten der Oberfläche) ist $t \approx 300$ Jahre. Somit muß das Feld eines Flecks ohne zusätzliche Energiezufuhr Hunderte von Jahren existieren. Indessen entstehen und verschwinden die Flecke in wenigen Tagen. Eine mögliche Deutung dieses Phänomens betrachten wir im folgenden Paragraphen.

§ 19. Die Sonnenflecke und die Fackeln

1. Vorbemerkungen. Das Strahlungsgleichgewicht der Sonnenflecke

Zu den wichtigsten Problemen der Physik der Sonnenflecke zählen folgende:

1. Die Erforschung des physikalischen Zustandes der Materie innerhalb der Flecke – die Feststellung der Art thermischen Gleichgewichtes und des Verlaufs der wichtigsten physikalischen Parameter im Fleck mit der Tiefe (Ionisation, Anregung der Atome usw.).

2. Die Ermittlung der Faktoren, die in den Sonnenflecken eine niedrigere Temperatur als in den umgebenden Schichten der Photosphäre aufrechterhalten.

3. Die Entstehung von starken Magnetfeldern im Fleck und die Erforschung des Gesetzes für ihre zeitlichen Änderungen.

4. Das allgemeine Problem des Ursprungs der Flecke und die mit dem elfjährigen Zyklus der Sonnenaktivität zusammenhängenden Probleme. (Die Ursachen des Zyklus selbst, die Aufklärung der Gesetzmäßigkeiten in der heliographischen Verteilung der Sonnenflecke in den verschiedenen Phasen der Sonnenaktivität und die mit der Phase der Sonnenaktivität zusammenhängenden magnetischen Gesetzmäßigkeiten – der periodische Wechsel der Polarität auf den beiden Sonnenhalbkugeln usw.).

Gegenwärtig sind nur in bezug auf das erste Problem Ergebnisse mit genügender Sicherheit erzielt worden.

Wir betrachten den physikalischen Zustand der Materie innerhalb der Flecke und in erster Linie den thermischen Zustand in ihrem Innern. Spektroskopische Beobachtungen ergaben, daß im Gebiet der Flecke gesetzmäßige Bewegungen der Gase vorliegen. In den unteren Schichten eines Flecks fließt die Materie aus ihm heraus, und in den oberen Schichten fließt sie in ihn hinein (Evershed-Effekt). Das Auftreten derartiger Ströme läßt sofort den Gedanken aufkommen, daß im Innern der Flecke die Prozesse des Wärmetransportes durch bewegte Materie, d.h. die Prozesse der Wärmeübertragung durch Konvektion, eine wichtige Rolle spielen könnten. Zahlreiche Tatsachen sprechen jedoch dafür, daß sich trotz des Vorhandenseins der erwähnten Strömungen der Wärmetransport in einem Fleck genauso wie in der Photosphäre hauptsächlich durch Strahlung vollzieht. Wir gehen kurz auf diese Tatsache ein.

Ebenso wie in der Sonnenphotosphäre werden die Absorptionsprozesse in einem Fleck, dessen Spektraltyp K0 ist, hauptsächlich durch die negativen Ionen des Wasserstoffs bestimmt (siehe § 6). In diesem Fall können wir aber – wie wir in § 6 gezeigt haben – für die Temperaturverteilung die für die graue Materie ermittelte Abhängigkeit der Größe T von τ benutzen. Für eine nur schwache Abhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten von der Frequenz in einem Fleck spricht auch der Umstand, daß die Kurve für die Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum des Flecks näherungsweise eine PLANCKsche Kurve ist.

Wenn sich folglich die Photosphäre und der Fleck im Zustande des Strahlungsgleichgewichtes befinden (für die Photosphäre haben wir uns hiervon früher überzeugt), können wir für die Verteilung der gesamten austretenden Strahlungsintensität $I(\vartheta)$ in Abhängigkeit von dem Winkel ϑ gegen die Normale sowohl für die Photosphäre als auch für die Flecke mit vollkommen ausreichender Genauigkeit die Formel (4.32) benutzen. Dann folgt aber aus dieser Formel, daß der Quotient $[I(\vartheta, 0)]_s : [I(\vartheta, 0)]_\odot$, wobei sich der Index s auf den Fleck bezieht, vom Winkel ϑ nicht abhängen darf. Mit anderen Worten, das Verhältnis der Intensität der gesamten („bolometrischen") Strahlung eines Flecks zur Intensität der Gesamtstrahlung der benachbarten Gebiete der Photosphäre muß in dem vorliegenden Fall für alle Punkte der Sonnenscheibe gleich sein. Die durchgeführten Beobachtungen und unter ihnen die neuesten Untersuchungen von G. F. SITNIK[1]) bestätigen die Konstanz des Quotienten $[I(\vartheta, 0)]_s : [I(\vartheta, 0)]_\odot$ vollkommen.

Die Unabhängigkeit des angegebenen Verhältnisses vom Winkel ϑ ermöglicht es, an einer beliebigen Stelle der Sonnenscheibe die effektive Temperatur des Flecks $(T_e)_s$ zu bestimmen. Wenn $(T_e)_\odot$ die Temperatur der Photosphäre ist, so ist nach (4.21)

$$\frac{(\pi H)_s}{(\pi H)_\odot} = \left[\frac{(T_e)_s}{(T_e)_\odot}\right]^4. \tag{19.1}$$

Wenn wir den von ϑ unabhängigen Quotienten $[I(\vartheta, 0)]_s : [I(\vartheta, 0)]_\odot$ aus Beobachtungen ermitteln, der auf Grund dieser Unabhängigkeit gleich dem Quotienten $(\pi H)_s : (\pi H)_\odot$ ist, und wenn wir $(T_e)_\odot$ kennen, erhalten wir $(T_e)_s$. Diesbezügliche Beobachtungen (unter Berücksichtigung des Streulichtes) ergeben für die linke Seite von (19.1) die Größenordnung 0,4. Hieraus folgt für $(T_e)_\odot = 5710°$ ein $(T_e)_s$ von etwa 4500°.

Die letzte Zahl stellt einen gewissen Mittelwert dar, weil offenbar (wie es sich aus den Beobachtungen ergibt) die größeren Flecke ein kleineres $(T_e)_s$ besitzen. So ergaben z. B. die Messungen für einen ausnehmend großen Fleck, der im November 1938 beobachtet wurde, eine Temperatur von etwa 3700°.

Das nach Formel (19.1) ermittelte $(T_e)_s$ darf man nicht – wie es häufig geschieht – mit der Anregungstemperatur $(T_A)_s$ identifizieren, da – wie wir in

[1]) G. F. SITNIK, Über die Natur der Sonnenflecke. Veröffentlichungen des Staatlichen Sternberg-Instituts, Bd. 11, Teil 2, S. 5, 1939 (Г. Ф. Ситник, К вопросу о природе солнечных пятен. Труды ГАИШ, т. 11, ч. 2, стр. 5, 1939).

§ 12 gesehen haben – zwischen beiden Größen ein gewisser Unterschied besteht, über dessen Ursache man sich noch nicht im klaren ist.

Ein zweiter Weg für die Lösung des Problems der Wärmeübertragung ist der folgende: Wir nehmen an, daß in den Flecken und in der Photosphäre Strahlungsgleichgewicht herrscht, und berücksichtigen, daß der Absorptionskoeffizient in beiden Fällen nur schwach von der Frequenz abhängt. Dann können wir die Formel (4.40) auf die Flecke und auf die Photosphäre anwenden. In diesem Fall finden wir

$$\frac{[I_\lambda(\vartheta,0)]_s}{[I_\lambda(\vartheta,0)]_\odot} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t\sec\vartheta}\sec\vartheta\, dt}{e^{\frac{hc}{k\lambda (T_e)_s\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}t\right)^{\frac{1}{4}}}}-1}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t\sec\vartheta}\sec\vartheta\, dt}{e^{\frac{hc}{k\lambda (T_e)_\odot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}t\right)^{\frac{1}{4}}}}-1}}. \tag{19.2}$$

Wenden wir die Formel auf die Mitte der Sonnenscheibe an, wo $\vartheta = 0$ ist, erhalten wir

$$\frac{[I_\lambda(0,0)]_s}{[I_\lambda(0,0)]_\odot} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\, dt}{e^{\frac{hc}{k\lambda (T_e)_s\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}t\right)^{\frac{1}{4}}}}-1}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\, dt}{e^{\frac{hc}{k\lambda (T_e)_\odot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}t\right)^{\frac{1}{4}}}}-1}}. \tag{19.3}$$

Somit gibt die Formel (19.3) für einen Fleck, der sich in der Mitte der Sonnenscheibe befindet, das theoretische Intensitätsverhältnis „Fleck – angrenzende Photosphäre“ für die verschiedenen Wellenlängen an. Wenn sich der Fleck im Zustand des Strahlungsgleichgewichtes befindet, kann man die Formel (19.3) mit dem beobachteten Verhältnis $[I_\lambda(0,0)]_s : [I_\lambda(0,0)]_\odot$ durch geeignete Wahl eines einzigen Parameters, nämlich $(T_e)_s$ – natürlich bei vorgegebenem Wert von $(T_e)_\odot$ –, in Übereinstimmung bringen. Dies kann man tatsächlich bei $(T_e)_s \approx 4500°$ erreichen, wobei das beobachtete Intensitätsverhältnis in dem Wellenlängenintervall von 3000 bis 10000 Å in völlig zufriedenstellender Weise mit dem theoretischen Verhältnis übereinstimmt. Etwas schlechter ist diese

Übereinstimmung – möglicherweise wegen des Einflusses der Absorptionsbanden des Wasserdampfes in der Erdatmosphäre – in dem Bereich von 10000 bis 22000 Å. Hier sind noch weitere Beobachtungen erforderlich.

Schließlich können wir die Formel (19.2) für eine beliebige Wellenlänge λ anwenden, um das Verhältnis $[I_\lambda(\vartheta, 0)]_s : [I_\lambda(\vartheta, 0)]_\odot$ in den verschiedenen Punkten der Sonnenscheibe zu untersuchen (ebenso wie im Falle der Gesamtstrahlung). Auch hier stimmt die Theorie mit den Beobachtungen ganz befriedigend überein. Die auf diese Weise gefundenen Werte für $(T_e)_s$ schwanken bei den verschiedenen Autoren zwischen 4300° (RICHARDSON) und 4750° (G. F. SITNIK). Möglicherweise ist dies auf reale Unterschiede in $(T_e)_s$ zurückzuführen. Wir haben ja schon erwähnt, daß die größeren Flecke offenbar kleinere $(T_e)_s$ besitzen.

Auf Grund der von uns angeführten Tatsachen kann man annehmen, daß sich die Sonnenflecke wirklich im Zustande des Strahlungsgleichgewichtes befinden. Insbesondere hat die Annahme, daß sich die Flecke im Zustand des konvektiven Gleichgewichtes befinden, krasse Widersprüche zwischen der Theorie und den Beobachtungen zur Folge.

Daß sich die Materie in einem Fleck im Zustand des Strahlungsgleichgewichtes befinden muß, folgt auch aus der Abschätzung der Energieströme, deren Energie durch Strahlung und durch Konvektion transportiert wird. Die Konvektionsströme sind bei den im Fleck beobachteten Geschwindigkeiten (im ganzen bis zu 2–3 km/sec) zu klein, um ein wirksamer Faktor beim Transport von thermischer Energie zu werden.[1])

2. Das Fleckenspektrum. Der Elektronendruck

Wir wenden uns jetzt der Analyse der Absorptionslinien im Spektrum des Sonnenflecks zu. Das Spektrum eines Sonnenflecks wird in Übereinstimmung mit der niedrigeren Temperatur des Flecks durch einen späteren Spektraltyp charakterisiert als das Spektrum der Photosphäre. Und zwar ordnet man den Fleck gewöhnlich dem Typ K 0 zu, während das Sonnenspektrum vom Typ d G 3 ist. Wenn man annimmt, daß die physikalischen Bedingungen in einem Fleck den in der Atmosphäre eines K 0-Sternes herrschenden Bedingungen ähnlich sind, und berücksichtigt, daß die Schwerebeschleunigung im Fleck die gleiche ist wie für die Sonne (Zwerg), müßte man nach Tabelle 11 für einen Fleck $(T_e)_s = 4910°$ erwarten. Dieser Wert ist etwas größer als der schon abgeleitete von 4500°. Es lassen sich jedoch einstweilen noch keine Folgerungen ziehen, da der Fleck nur näherungsweise den angegebenen Spektraltyp K 0 besitzt. Außerdem müßte man streng genommen für den Vergleich ein m i t t l e r e s Spektrum des Flecks benutzen, d. h. ein Spektrum, das von einem weit entfernten Beobachter registriert würde, wenn die ganze Sonnenscheibe von Flecken bedeckt

---

[1]) Eine ausführliche Übersicht über alle hier berührten Fragen ist von G. F. SITNIK [18, S. 107] zusammengestellt worden.

wäre. Wenn z. B. der angegebene Spektraltyp K0 einem Fleck in der Mitte der Sonnenscheibe entspricht, so besitzt der Fleck ein mittleres Spektrum von späterem Typ[1]), und die Übereinstimmung mit $(T_e)_s \approx 4500°$ verbessert sich.

Bei dem Studium der Anregungs- und Ionisationsbedingungen in den Flecken kann man vollkommen die gleichen Methoden benutzen, die wir im zweiten Kapitel dargestellt haben. Und zwar können wir entweder die Methoden der elementaren Wachstumskurve (§ 12) oder die auf eine genauere Ableitung der Konturen zurückgehende Methode des § 13 benutzen.

Die Konstruktion der Wachstumskurve für die Sonnenflecke geht nach den allgemeinen Methoden vor sich, die in § 12 dargestellt worden sind. Die vorliegenden Untersuchungen zeigen, daß sich die auf diese Weise ermittelte Wachstumskurve ihrer Form nach (innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler) anscheinend nicht merklich von der Wachstumskurve für die ungestörte Photosphäre unterscheidet. Für weitergehende Schlußfolgerungen reichen die bisherigen Daten nicht aus. Die Unterschiede in der Verschiebung und der Verzerrung der Wachstumskurve für die Flecke gegenüber der Wachstumskurve für die Photosphäre sind im wesentlichen auf drei Faktoren zurückzuführen:

1. auf die im allgemeinen bestehende Verschiedenheit der Anzahl der absorbierenden Atome in einem Sonnenfleck und in der Photosphäre;

2. auf den Temperaturunterschied zwischen den Flecken und der Photosphäre;

3. auf die Aufspaltung der Linien im Fleckenspektrum infolge des Auftretens von starken Magnetfeldern (bis 4000 Gauß) in den Flecken.

Bei nicht sehr großem Auflösungsvermögen der Spektrographen verschmelzen die einzelnen ZEEMAN-Komponenten, was einer Verbreiterung der Linien gleichkommt. Der Einfluß dieser Verbreiterung auf die Äquivalentbreite der Linien ist für die schwachen Linien am unbedeutendsten und am stärksten für die Linien mittlerer Intensität, die dem „flachen" Übergangsgebiet der Wachstumskurve entspricht.

Wir betrachten diese Fälle der Reihe nach. Für die schwachen Linien ist die Äquivalentbreite der Zahl der absorbierenden Atome proportional, und da beim Auftreten eines Feldes diese Zahl gleich bleibt, beläuft sich der Einfluß der Aufspaltung auf eine gewisse Verbreiterung und Zunahme des diffusen Aussehens der Linie, ohne daß irgendeine Änderung von W_λ eintritt.

Bei sehr starken Linien ist die magnetische Aufspaltung selbst bei einem Felde der Größenordnung 4000 Gauß beträchtlich geringer als die Ausdehnung der Flügel und die Linienbreite überhaupt (sagen wir bei $r_\nu = 0,5$), wobei auch die äußersten Komponenten berücksichtigt sind.

Wir kommen zu den Linien mittlerer Intensität. Die Äquivalentbreite einer beliebigen, in dem Übergangsbereich der Wachstumskurve gelegenen Linie betrage bei Abwesenheit eines magnetischen Feldes W_λ^0, und die Anzahl der sie erzeugenden Atome sei N. Bei Anlegen eines Magnetfeldes spaltet die Linie in

---

[1]) Da die Strahlung aus den zentralen Gebieten der Sonnen- (= Stern-) Scheibe heißeren Schichten entspricht als die Strahlung von der gesamten Scheibe als Ganzes gesehen.

n Komponenten auf. Hierbei wird – grob gesprochen – jede Komponente durch die Absorptionswirkung von $N_s = \frac{N}{n}$ Atomen bestimmt. Bei den betrachteten Linien (in dem Übergangsbereich der Wachstumskurve) zieht jedoch selbst eine große Änderung in der Anzahl der absorbierenden Atome eine überaus kleine Änderung der Äquivalentbreite nach sich. Daher muß bei kleinem n jede der erwähnten Komponenten praktisch den gleichen Wert W_λ besitzen, den auch die anfängliche Linie bei Abwesenheit eines Magnetfeldes besitzt, d.h. W_λ^0. Die Verschmelzung aller Komponenten ergibt bei der beobachteten Linie eine Vergrößerung von W_λ.

Die Polarisation der Atome hat eine gewisse Verkleinerung[1]) der erwähnten resultierenden Breite zur Folge. Trotzdem wird aber bei genügender Anzahl der Komponenten und bei hinreichender Feldstärke die Linie verstärkt. Auf diese Weise wird durch den ZEEMAN-Effekt der mittlere Teil der Wachstumskurve angehoben. Hierbei ist zu beachten, daß die verschiedenen Atome (und sogar die verschiedenen Linien, die zu dem gleichen Atom gehören) ein verschiedenes Aufspaltungsbild sowohl hinsichtlich der Größe der Aufspaltung als auch in bezug auf die relativen Intensitäten der Komponenten ergeben. Daher ist im großen und ganzen das vorliegende Problem außerordentlich kompliziert.

Die gleichzeitige Ermittlung von Wachstumskurven für einen Fleck und für die Photosphäre gestattet es, eine Reihe von Folgerungen über die physikalischen Bedingungen im Fleck zu ziehen. Erstens können wir die Anregungstemperatur in einem Fleck bestimmen. Zunächst bestimmen wir (bei der Ermittlung der Wachstumskurve) einen vorläufigen Wert $(T_A)_s$ und dann unter Benutzung der Formel (12.37) und einer graphischen Darstellung von der Art der Abb. 34 einen verbesserten Wert für $(T_A)_s$.

Eine andere Methode fußt auf der Formel (12.40), in der wir an Stelle des Index St den Index s einführen:

$$(\lg X_0)_s - (\lg X_0)_\odot = \lg \frac{(N_r)_s}{(N_r)_\odot}\frac{(u_r)_\odot}{(u_r)_s} - \lg \frac{(v_0)_s}{(v_0)_\odot} - 5040\,\varepsilon_i\left[\frac{1}{(T_A)_s} - \frac{1}{(T_A)_\odot}\right]. \tag{19.4}$$

Wir bestimmen für verschiedene Multipletts mit verschiedenem ε_i für das untere Niveau die Differenz $\{(\lg X_0)_s - (\lg X_0)_\odot\}$ und stellen die Abhängigkeit dieser Differenz von den Größen ε_i dar, wobei diese nach (19.4) gewöhnlich linear sind. Dann findet man

$$\Delta\Theta = 5040\left(\frac{1}{(T_A)_s} - \frac{1}{(T_A)_\odot}\right) \tag{19.5}$$

aus der Neigung der erhaltenen Geraden gegen die Abszissenachse (ε_i-Achse). Nachdem wir $\Delta\Theta$ ermittelt und einen bestimmten Wert für $(T_A)_\odot$ angenommen haben, finden wir $(T_A)_s$.

---

[1]) Der Effekt der Polarisation der Atome bewirkt, daß die von jeder getrennten Komponente absorbierte Energie kleiner ist als in dem Fall, daß keine Polarisation vorliegt.

TEN BRUGGENCATE und v. KLÜBER finden für große Flecke $\Delta\Theta = 0{,}33$. Wenn wir diesen Wert übernehmen, erhalten wir bei $(T_A)_\odot = 5040°$ $(T_A)_s = 3800°$ und bei $(T_A)_\odot = 5700°$ $(T_A)_s = 4200°$.

Anscheinend schwanken die Werte für $(T_A)_s$ sowie $(T_e)_s$ von Fleck zu Fleck und nehmen für größere Flecke kleinere Werte an. Aus diesem Grunde ist der angegebene Wert $\Delta\Theta = 0{,}33$ offenbar zu groß.

Die Methoden, die auf der Theorie der Wachstumskurve fußen, gestatten auch, den Elektronendruck im Fleck zu bestimmen. Wenn man die Anzahl der Atome eines beliebigen Elementes für zwei aufeinanderfolgende Ionisationsstufen ermittelt hat, muß man die Ionisationsformel (5.11) anwenden, wobei man für T natürlich einen festen Wert annimmt, der in der Nähe der effektiven Temperatur des Flecks liegt. Wenn man dies für zwei oder mehr Elemente ausführt, kann man außer p_e auch T selbst bestimmen.

Den Elektronendruck p_e für einen Fleck kann man nicht nur dadurch bestimmen, daß man die Wachstumskurve heranzieht, sondern auch unter Bezugnahme auf die Photosphäre. Wir schreiben die Ionisationsformel (5.19) zweimal hin (für die Photosphäre und für den Fleck) und erhalten, wenn wir das Resultat in der logarithmischen Form darstellen:

$$\lg\left(\frac{N_{1,1}}{N_{0,1}}\right)_s = \frac{5}{2}\lg T_s - \frac{5040}{T_s}\chi_0 - \lg(p_e)_s + \lg\frac{g_{1,1}}{g_{0,1}}\,\frac{2\,(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}}\,k^{\frac{5}{2}}}{h^3}\,, \qquad (19.6)$$

$$\lg\left(\frac{N_{1,1}}{N_{0,1}}\right)_\odot = \frac{5}{2}\lg T_\odot - \frac{5040}{T_\odot}\chi_0 - \lg(p_e)_\odot + \lg\frac{g_{1,1}}{g_{0,1}}\,\frac{2\,(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}}\,k^{\frac{5}{2}}}{h^3}\,, \qquad (19.7)$$

wobei wir natürlich annehmen, daß man die Gleichung (5.19) auf die gesamte Atmosphäre als Ganzes anwenden kann (Übergang von n auf N).

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhalten wir

$$\lg\frac{(p_e)_s}{(p_e)_\odot} = \lg\frac{(N_{1,1})_\odot}{(N_{1,1})_s} + \lg\frac{(N_{0,1})_s}{(N_{0,1})_\odot} + \frac{5}{2}\lg\frac{T_s}{T_\odot} - 5040\chi_0\left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_\odot}\right). \qquad (19.8)$$

Hierbei sind die in diese Gleichung eingehenden Temperaturen genau genommen gewisse (über die Tiefe) gemittelte „Ionisationstemperaturen", die man näherungsweise mit den effektiven Temperaturen identifizieren kann.

Die Bestimmung der beiden ersten Summanden auf der rechten Seite von (19.8) ist in dem Fall möglich, wenn zwei aufeinanderfolgende Ionisationsstufen eines beliebigen Elementes in dem Spektrum eines Flecks und der Photosphäre durch hinreichend starke Resonanzlinien vertreten sind, für die nach Formel (12.28) W_λ proportional $\sqrt{N}$ und die Benutzung der Wachstumskurve nicht unbedingt erforderlich ist.[1]

[1] Wir weisen darauf hin, daß die Anwendung des angegebenen Gesetzes einen überall gleichen Wert der Dämpfungskonstante Γ_{ik} voraussetzt. Diese Konstante wird im wesentlichen durch die Stoßdämpfung bestimmt und kann sich folglich in den Flecken und in der Photosphäre unterscheiden. Daher ist die angegebene Methode nur eine Näherung.

Die Bestimmung von $(p_e)_s$ gemäß Formel (19.8) wurde von T. W. KRAT[1]) an den Resonanzlinien 4227 von CaI und H und K von CaII durchgeführt. Für T_s wurde der angegebene Wert 3800° und für $T_\odot$ der Wert 5040° angenommen. Die Anwendung des angegebenen Gesetzes $W_\lambda \sim \sqrt{N}$ ergab auf Grund der gemessenen Äquivalentbreiten $(p_e)_s : (p_e)_\odot \approx \frac{1}{40}$. Dieser Wert für $(p_e)_s$ ist zweifellos zu klein, weil T. W. KRAT die Differenz $\Delta\Theta$ größer als den Mittelwert angenommen hat. Wenn wir die vorliegenden anderen Daten für diese Differenz benutzen, kommen wir trotzdem stets zu dem Ergebnis, daß $(p_e)_s$ um ein Vielfaches (etwa um eine Größenordnung) kleiner als $(p_e)_\odot$ ist.

Wir vergleichen den Unterschied in p_e zwischen der Photosphäre und einem Fleck mit demjenigen Unterschied, den man beim Übergang von der Sonne zu einem Stern vom Typ dK0 erwarten müßte. Aus Tabelle 8 folgt, daß in der Atmosphäre des Sternes 70 Ophiuchi A vom Typ dK0 der Elektronendruck etwa um das 20fache kleiner ist als in der Sonnenatmosphäre. Größenordnungsmäßig stimmt diese Differenz mit dem von T. W. KRAT gefundenen Wert überein.

Überdies zeigt unmittelbar ein von VAN DIJKE[2]) durchgeführter Vergleich des Sternes 70 Ophiuchi A mit einem Sonnenfleck, daß p_e für beide Objekte innerhalb der Fehlergrenzen praktisch gleich ist. Dies alles beweist, daß ein Fleck in vielen Eigenschaften der Atmosphäre eines Zwergsternes vom gleichen Spektraltyp ähnelt.

Es ist interessant, unser eben erhaltenes Ergebnis zu bestätigen, indem man von anderen Überlegungen ausgeht. In erster Linie könnte man einen quantitativen Vergleich der Äquivalentbreiten im Spektrum eines Flecks und im Spektrum der Photosphäre durchführen, wobei man für den Übergang auf die Anzahl der Atome die Wachstumskurve benutzen könnte.

Hierbei entstehen jedoch einige Komplikationen. So ist z. B. die Anzahl der angeregten Magnesiumatome, die das bekannte grüne Triplett 5183,7 Å, 5172,7 Å und 5167,4 Å hervorbringen, im Fleck doppelt so groß wie in der Photosphäre. Wie aus den Rechnungen hervorgeht, ist dieses Ergebnis lediglich unter Benutzung der gewöhnlichen Formeln des thermischen Gleichgewichtes äußerst schwierig zu erklären. Gleichzeitig geht bei den angegebenen Linien das Anwachsen der Äquivalentbreite beim Übergang von der Photosphäre zum Fleck praktisch genauso vor sich wie beim Übergang von einem Stern vom Typ dG3 zu einem Stern vom Typ dK0!

Nach T. W. KRAT ist die Ursache dieser Unstimmigkeiten darin zu suchen, daß der kontinuierliche Absorptionskoeffizient in den Flecken kleiner sein muß als in der Photosphäre. Dies vergrößert den Wert $\eta_\nu = \sigma_\nu : \varkappa_\nu$ und erzeugt dadurch auch eine Vergrößerung der Anzahl der Atome. Die Tatsache, daß $\varkappa_\nu$ von

---

[1]) T. W. KRAT, Temperatur und Druck in den Sonnenflecken. Mitteilungen des Astronomischen Hauptobservatoriums Nr. 137, S. 1, 1948 (Т. В. Крат, Температура и давление в солнечных пятнах. Известия ГАО, No. 137, стр. 1, 1948).

[2]) S. VAN DIJKE. A comparative study of the spectra of α Bootis and 70 Ophiuchi A. Astrophysical Journal **104**, 27, 1946.

der Photosphäre zum Fleck abnimmt, ist von T. W. KRAT auf Grund einer Untersuchung der Abweichungen der Strahlungsintensität im kontinuierlichen Spektrum eines Flecks und der Photosphäre von derjenigen einer grauen Materie festgestellt worden.[1]) Die Ungleichung $(\varkappa_\nu)_s : (\varkappa_\nu)_\odot < 1$ folgt auch aus Abb. 15, wenn wir für $T_s = 4200°$ und für $T_\odot = 5600°$ setzen und das Verhältnis $(\varkappa_\nu)_s : (\varkappa_\nu)_\odot$ mit dem angegebenen Wert $(p_e)_\odot : (p_e)_s = 10$ berechnen. Für $\lambda = 5000$ Å wird das Verhältnis $(\varkappa_\nu)_s : (\varkappa_\nu)_\odot$ von der Größenordnung $^1/_3$.

Aus unseren Ausführungen geht hervor, daß wir für die theoretische Deutung der Unterschiede in den Linienintensitäten zwischen Fleck und Photosphäre in Zukunft die Methoden des § 13 benutzen müssen. Und zwar müssen wir die Konturen der uns interessierenden Linien nach den allgemeinen Angaben des § 13 bestimmen, nachdem wir den Verlauf der verschiedenen physikalischen Parameter im Innern des Flecks ermittelt haben. Das gleiche müssen wir natürlich auch für die Photosphäre tun. Nur in diesem Fall ist der Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen ausreichend begründet.

Für die gerade erwähnten Berechnungen der Struktur der Flecke können wir die Theorie der Sonnenphotosphäre benutzen, die wir zu Beginn des § 17 dargestellt haben. Zu diesem Zweck müssen wir nur $T_e \approx 4500°$ setzen, wobei wir den Wert $g = 2{,}74 \cdot 10^4$ cm/sec^2 beibehalten.

Eine zweite außerordentlich wichtige Methode zur Erforschung der physikalischen Bedingungen in einem Fleck ist der sorgfältige Vergleich des Fleckenspektrums mit Sternspektren von benachbartem Typ. Man hat dabei festzustellen, ob man unter den Sternspektren (die natürlich dem Typ dK0 benachbart sind) ein solches Spektrum herausfinden kann, das exakt mit dem Spektrum des Flecks übereinstimmt.

Bisher sind fast keine derartigen Untersuchungen durchgeführt worden. Der einzige Vergleich eines Fleckenspektrums mit dem Spektrum des Zwerges 70 Ophiuchi A vom Typ dK0 (siehe oben) zeigt, daß das Verhältnis der Anzahl der Atome in dem Fleck zu der Anzahl der Atome in dem angegebenen Stern für alle neutralen Atome größer als Eins und für alle ionisierten Atome kleiner als Eins ist.

3. Die möglichen Ursachen für die Temperaturerniedrigung in einem Fleck. Das Magnetfeld der Flecke

Das nächste physikalische Problem der Flecke ist die Frage nach der Natur des Mechanismus, der die Temperatur der Materie in einem Fleck erniedrigt. Zahlreiche Versuche zur Erklärung dieser Tatsache gehen von der Voraussetzung aus, daß aus einem Fleck Gase ausströmen und sich adiabatisch ausdehnen, was zu einer Abkühlung führt. Seit kurzem weiß man jedoch, daß diese

[1]) T. W. KRAT, Die kontinuierliche Absorption im Spektrum der Sonnenflecke. Mitteilungen des Astronomischen Hauptobservatoriums Nr. 140, S. 56, 1947 (Т. В. Крат. Непрерывное поглощение в спектре солнечных пятен. Известия ГАО, No. 140, стр. 56, 1947).

„adiabatische Theorie“ auf zahlreiche ernste Schwierigkeiten stößt [34, S. 145–146].

Die modernen Theorien bringen die Abkühlung der Materie in den Flecken mit dem Auftreten starker Magnetfelder in den Flecken in Zusammenhang. Wir wenden uns daher sofort der Behandlung der Magnetfelder in den Flecken zu.

Wir führen einige allgemeine charakteristische Merkmale an, die das Magnetfeld der Sonnenflecke betreffen.

Das Auftreten eines starken Magnetfeldes in den Flecken ist eine Grundeigenschaft der Flecke. Niemals wurde ein Fleck ohne Magnetfeld beobachtet. Im Gegenteil, es begegnen einem sogar sogenannte *unsichtbare Flecke*; dies sind Bereiche der Photosphäre, über denen man schwache Magnetfelder beobachtet. Diese Bereiche befinden sich häufig dort, wo bis vor kurzem ein Fleck vorhanden war oder wo demnächst einer erscheinen wird.

Die magnetischen Kraftlinien stehen in der Mitte eines Flecks senkrecht auf der Sonnenoberfläche und bilden an den Rändern der Penumbra mit ihr einen Winkel von etwa 20°. Hinsichtlich seines Magnetfeldes erinnert ein einzelner Fleck an einen einpoligen Magneten und eine typische Gruppe von zwei großen Flecken an einen zweipoligen Magneten. Bisweilen trifft man multipolare Gruppen mit komplizierter Anordnung der Pole an.

Eine bipolare Gruppe kann man durch ihr magnetisches Moment $\mathfrak{M} = \bar{\mathfrak{H}} S \mathfrak{l}$ charakterisieren, wobei $\bar{\mathfrak{H}}$ die mittlere Feldstärke im Fleck, S seine Fläche und $\mathfrak{l}$ der Abstand zwischen den Flecken ist.

Die Feldstärke einer bipolaren Gruppe im Abstand R mit $R \gg l$ ist gleich[1])

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{R}}{R^3} = \frac{3(\mathfrak{M}\mathfrak{R})\mathfrak{R}}{R^5} - \frac{\mathfrak{M}}{R^3}, \tag{19.9}$$

d.h., das Feld nimmt näherungsweise proportional R^{-3} ab.

Die Feldstärke H im Zentrum eines Flecks ist mit der Fläche S des Flecks veränderlich und erreicht bei den großen Flecken 3500 Gauß.

Die Abhängigkeit von H und S von der Zeit ist in Abb. 50 für typische schnell (unten) und langsam (oben) veränderliche Flecke dargestellt.[2]) Dabei ist S in einem Millionstel der Halbkugel und H in Gauß angegeben. Anfangs ist H proportional S, darauf erreicht es ein Maximum und ist fast unveränderlich. Erst wenn sich die Fläche des Flecks merklich verringert, beginnt auch H abzunehmen.

Die Zeit des Anwachsens der Feldstärke dauert gewöhnlich 2–3 Tage, die Zeit der Konstanz einige Tage bis einige Wochen und die Zeit der Abnahme eine bis zwei Wochen. Indessen haben wir am Schluß des § 18 gezeigt, daß das Feld eines Flecks Hunderte von Jahren ohne Energieverlust existieren kann. Auf

---

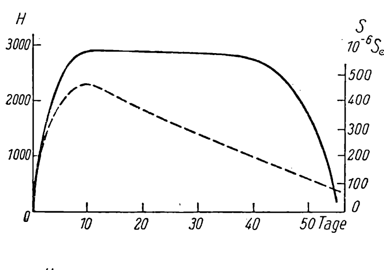
[1]) Siehe I. E. TAMM, Grundlagen der Theorie der Elektrizität, Staatsverlag für technische Literatur, 1946, S. 269 (И. Е. ТАММ, Основы теории электричества. Гостехиздат, 1946, стр. 269).

[2]) T. COWLING, The growth and decay of sunspot magnetic field. Monthly Notices **106**, 218, 1946.

Grund dieser Feststellung nimmt COWLING an, daß das Feld eines Flecks durch die Bewegung der ionisierten Materie an die Oberfläche tritt und wieder in die Tiefe gelangt. Die Flecke sind wie Fenster, durch die das Feld, das lange Zeit in den unter der Photosphäre befindlichen Schichten existierte, an die Oberfläche tritt.

Das Magnetfeld übt auf die leitende Atmosphäre den Druck $\frac{H^2}{8\pi}$ aus. In den tiefen Schichten ist der Gasdruck beträchtlich größer als der magnetische Druck. Infolgedessen führt der magnetische Druck nicht zu einer Ausdehnung des Gases.

In den Schichten der Photosphäre ist der magnetische Druck von der gleichen Größenordnung wie der Gasdruck, und das Feld kann unter Mitnahme des Gases aus der Oberfläche austreten. Die Ausdehnung des Gases hat eine Abkühlung zur Folge, wobei im Falle des Gleichgewichtes der gesamte Druck im Fleck – Gasdruck plus magnetischer Druck – gleich dem Gasdruck außerhalb des Flecks auf dem gleichen Niveau sein muß. Auf diese Weise kann man bei Kenntnis von H die Differenz des Gasdruckes im Fleck und in der Photosphäre berechnen. Weil $p = nkT$ ist, gestattet das aus den Beobachtungen bekannte Temperaturverhältnis das Verhältnis der Dichten zu ermitteln.



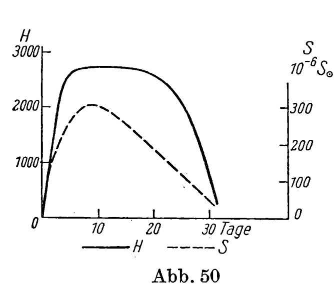


Abb. 50

Die Strahlung der benachbarten Schichten erwärmt unaufhörlich die Grenzschichten eines Flecks und erhöht den Gasdruck. Hierdurch wird das Gleichgewicht gestört, und die erwärmten Schichten dehnen sich ein wenig aus, bis ihre Temperatur wieder auf den ursprünglichen Wert gesunken ist. Möglicherweise ist diese Ausdehnung die beobachtete Bewegung der Materie von den Flecken fort.

Auf diese Weise ist die erniedrigte Temperatur eines Flecks offenbar eine notwendige Folge des Vorhandenseins von starken Magnetfeldern.

Was den Ursprung der Magnetfelder betrifft, so gibt es noch keine endgültige Antwort auf diese Frage. L. E. GUREWITSCH und A. I. LEBEDINSKI[1]) sind im

---

[1]) L. E. GUREWITSCH und A. I. LEBEDINSKI, Das Magnetfeld der Sonnenflecke. I und II. Journal für experimentelle und theoretische Physik **16**, 832 und 840, 1946 (Л. Е. Гуревич и А. И. Лебединский, Магнитное поле солнечных пятен. I и II. Журнал экспериментальной и теоретической физики **16**, 832 и 840, 1946).

Gegensatz zu COWLING der Meinung, daß das Feld unmittelbar in den Schichten unterhalb der Photosphäre infolge Zirkulation leitender Materie in einem Magnetfeld unter Einwirkung hydrodynamischer Kräfte entsteht. Eine derartige Zirkulation kann Ströme erzeugen, die auch das Magnetfeld des Flecks bestimmen. Der gesamte Prozeß erinnert als Ganzes an den Anregungsprozeß einer Dynamomaschine. Einen konkreten Mechanismus für die Selbstanregung geben die Autoren jedoch nicht an.

Eine der wichtigsten Fragen ist diejenige, ob die Erzeugung eines Magnetfeldes H in den Flecken an die Existenz eines allgemeinen Magnetfeldes der Sonne gebunden ist oder nicht. Dieses Problem ist von W. W. STEPANOW behandelt worden.[1]

Wenn die Entstehung der Flecke in irgendeinem Zusammenhang mit dem allgemeinen Feld der Sonne steht, wird das Auftreten der Flecke in der Hauptsache von der magnetischen und nicht von der heliographischen Breite abhängen. Wenn somit der Magnetpol der Sonne auf der nördlichen Halbkugel zu einem gegebenen Zeitpunkt uns näher als der heliographische Pol gelegen ist (diese Pole fallen nicht zusammen), so ist die mittlere Breite für die Entstehung der Flecke auf der nördlichen Halbkugel kleiner als auf der südlichen. Bei der entgegengesetzten Lage der Pole tritt der umgekehrte Effekt auf.

Die Differenz zwischen der mittleren Breite für die Entstehung der Flecke auf der nördlichen und südlichen Halbkugel muß demnach eine Periode aufweisen, die gleich der Periode des von der Erde aus gesehenen Umlaufs der magnetischen Achse der Sonne ist. Die Bearbeitung von Fleckenbeobachtungen aus über 45 Jahren nach statistischen Methoden ermöglichte es, diese Periode mit genügender Sicherheit zu bestimmen; sie beträgt 27,5993 Tage und unterscheidet sich ein wenig von dem auf spektroskopischem Wege bestimmten Wert. Der von W. W. STEPANOW ermittelte Wert ist jedoch zuverlässiger, da ihm eine lange Beobachtungsreihe zugrunde liegt. Auf diese Weise kann man annehmen, daß das Auftreten der Flecke mit einem allgemeinen Magnetfeld der Sonne in Verbindung steht.

4. Die Sonnenfackeln. Die Temperaturverteilung in den Fackeln mit der Tiefe

Wir wenden uns jetzt den Fackeln zu. Diese beobachtet man bekanntlich nur in den Randgebieten der Sonnenscheibe, hauptsächlich in der Zone mit den Grenzen $0{,}6\, R_{\odot} < R < R_{\odot}$. Sie bieten sich dem Beobachter als Aufhellungen der Photosphäre dar. Die Fackeln besitzen eine komplizierte Faserstruktur, die sich bisweilen in einigen Stunden ändert. Die Fasern (Adern) bestehen ihrerseits aus Granula. Die Granulation in den Fackeln unterscheidet sich jedoch von der Granulation in den ungestörten Gebieten der Photosphäre, und zwar

[1] W. W. STEPANOW, Über eine neue Gesetzmäßigkeit in der Entstehung der Sonnenflecke. Astronomisches Journal, **25**, 209, 1948 (В. В. Степанов, О новой закономерности в возникновении солнечных пятен. Астрономический журнал **25**, 209, 1948).

1. die Lebensdauer der Granula in der Photosphäre ist von der Größenordnung zwei Minuten, während sie bei den Fackeln größenordnungsmäßig zwei Stunden beträgt;

2. der Kontrast zwischen den Granula und den zwischengranularen Gebieten ist in den Fackeln beträchtlich größer als in der Photosphäre.

Es ist möglich, daß das mittlere Niveau, in dem sich die Fackeln befinden, höher liegt als das der Flecke und der Photosphäre überhaupt. Hierfür spricht z. B. die Tatsache, daß die aus den Fackeln bestimmte Winkelgeschwindigkeit der Sonnenrotation größer ist als die aus den Flecken abgeleitete. Es ist bekannt, daß die Winkelgeschwindigkeit der verschiedenen Schichten der Sonne mit der Höhe wächst. (Diese Feststellung darf man anscheinend nicht auf die Sonnenkorona ausdehnen; siehe § 22.)

Ein sehr wichtiges Problem der Physik der Fackeln ist die Änderung des Kontrastes Fackel – benachbarte Photosphäre. Das Verhältnis

$$F_\lambda(\vartheta) = \frac{[I_\lambda(\vartheta, 0)]_f}{[I_\lambda(\vartheta, 0)]_\odot}, \tag{19.10}$$

wobei sich der Index f auf die Fackel bezieht, ist von zahlreichen Beobachtern für verschiedene ϑ gemessen worden. So fanden V. A. AMBARZUMJAN und N. A. KOSYREW für eine von ihnen ausgewählte Fackel mit $R = 0{,}94\, R_\odot$ bei $\lambda \approx 3900$ Å $F(\vartheta) = 1{,}14$ und bei $\lambda \approx 5000$ Å $F(\vartheta) = 1{,}10$. Für eine Reihe von ϑ-Werten hat T. W. KRAT[1]) $F(\vartheta)$ an einigen Fackeln für $\lambda = 3900$ Å und $\lambda = 5000$ Å bestimmt. Bei $\lambda = 3900$ Å betrug $F(\vartheta)$ für $R = 0{,}52\, R_\odot$ und $R = 0{,}90\, R_\odot$ bzw. 1,15 und 1,28. Bei $\lambda = 5000$ Å ist $F(\vartheta)$ für dieselben R gleich 1,08 und 1,16. A. I. LEBEDINSKI und S. S. SHURAWLEW[2]) haben $F(\vartheta)$ photoelektrisch untersucht.

Wir weisen darauf hin, daß sich alle diese Untersuchungen im wesentlichen nicht auf die erwähnten Fasern der Fackeln, sondern auf ein gewisses mittleres „verschmiertes" Bild einer Fackel beziehen. Diese Verschmierung entsteht durch Schwankungen des Bildes und das Auftreten von Streulicht. Durch die Bildschwankungen wird die Helligkeit der Fasern zum Teil auch auf die den Fasern benachbarten Gebiete „verteilt". Die Berücksichtigung dieses Effektes und ebenfalls direkte (vorläufige) Rechnungen stützen die Annahme, daß $F(\vartheta)$ in den erwähnten Fasern die Werte 1,5–2,5 erreichen kann.

Eine überaus interessante Tatsache ist die, daß das Verhältnis der Gesamtintensitäten $[I(\vartheta, 0)]_f : [I(\vartheta, 0)]_\odot$ (im Gegensatz zu den Sonnenflecken) mit dem Abstand vom Scheibenmittelpunkt veränderlich ist. Dies bedeutet offen-

---

[1]) T. W. KRAT, Die Ionisation und der Elektronendruck in den Sonnenfackeln. Astronomisches Journal **24**, 329, 1947 (Т. В. Крат, Ионизация и электронное давление в солнечных факелах. Астрономический журнал **24**, 329, 1947).

[2]) A. I. LEBEDINSKI und S. S. SHURAWLEW, Lichtelektrische Photometrie der Sonnenoberfläche. Astronomisches Journal **18**, 312, 1941 (А. И. Лебединский и С. С. Журавлев, Фотоэлектрическая фотометрия солнечной поверхности. Астрономический журнал **18**, 312, 1941).

bar, daß sich die Sonnenfackeln nicht im Zustande des Strahlungsgleichgewichtes befinden.

Die Temperaturverteilung im Innern einer Fackel können wir mit Hilfe der am Schluß des § 7 dargestellten Methode ermitteln. Zu diesem Zweck muß das Gesetz der Änderung von $[I_\lambda(\vartheta, 0)]_f$ mit dem Winkel ϑ bekannt sein. Dieses Gesetz können wir speziell aus dem beobachteten Verhältnis (19.10) ableiten, da die Abhängigkeit von $[I_\lambda(\vartheta, 0)]_\odot$ von ϑ bekannt ist. Wenn wir das Gesetz der Änderung der fraglichen Intensität mit ϑ kennen, können wir den Ausdruck

$$[I_\lambda(\vartheta, 0)]_f = \int_0^\infty B_\lambda(T_f)\, e^{-\tau_\lambda \sec\vartheta} \sec\vartheta\, d\tau_\lambda \tag{19.11}$$

als Integralgleichung ansehen, die bei vorgegebenem λ die $B_\lambda(T_f)$ als Funktion von τ_λ zu bestimmen gestattet. Wenn wir annehmen, daß die Materie in einer Fackel ebenso wie in der Photosphäre die Eigenschaften einer „grauen Materie"[1] besitzt, kann man die gleiche Methode auch auf die Gesamtstrahlung anwenden:

$$[I(\vartheta, 0)]_f \approx \int_0^\infty B(T_f)\, e^{-\sec\vartheta\,\tau} \sec\vartheta\, d\tau. \tag{19.12}$$

Die Gleichungen (19.11) und (19.12) sind durch numerische Integration zu lösen. Wenn die beobachtete Intensität in Form eines nach Potenzen von $\cos\vartheta$ fortschreitenden Polynoms darstellbar ist, können wir die Methode des § 6 benutzen.

Rechnungen ähnlicher Art zeigen stets, daß für kleine τ die Temperatur T_f einer Fackel höher ist als die Temperatur der Photosphäre, während T_f in großen Tiefen niedriger ist als das T der Photosphäre. [Daher darf man (was häufig geschieht) den Unterschied in der Strahlungstemperatur T_E zwischen einer Fackel und der Photosphäre nicht mit der Differenz der effektiven Temperaturen identifizieren.]

Um eine Erklärung für das gefundene Resultat zu geben, erinnern wir uns, daß wir im allgemeinen am Rand der Sonnenscheibe eine Strahlung beobachten, die aus den obersten Schichten der Oberfläche der Sonnenatmosphäre austritt. Daher beweist die größere Helligkeit der Fackeln am Sonnenrande, die die Helligkeit der Photosphäre übertrifft, unmittelbar, daß sie in ihren äußeren Bereichen heißer sind als die Photosphäre. Andererseits sind sie in der Mitte der Scheibe nicht sichtbar. Dies bedeutet, daß der eben erwähnte Überschuß an thermischer Energie in den äußeren Bereichen der Fackeln (gegenüber der Photosphäre) auf irgendeine Weise durch eine niedrigere Temperatur der Fackeln im Bereich großer τ kompensiert werden muß.

Bedauerlicherweise besitzen die oben erwähnten Rechnungen bis jetzt rein qualitativen Charakter. Wir haben in § 7 erwähnt, daß in die Ermittlung der

[1]) Wegen des geringen Unterschiedes in den mittleren Temperaturen der Fackeln und der Photosphäre.

Funktion $T(\tau)$ aus dem Gesetz der Randverdunkelung die Unsicherheit eingeht, die sich aus der erforderlichen Extrapolation der Intensität bis zum äußersten Sonnenrand ergibt. Gleichzeitig ist diese Aufgabe für die Fackeln besonders kompliziert. Bis vor kurzem war man der Ansicht, daß der Kontrast Fackel – Photosphäre bis zum äußersten Sonnenrand hin anwächst. Dagegen zeigen die jüngsten Untersuchungen von M. WALDMEIER[1]), daß dieser Kontrast bei $R_m \approx 0{,}95\ R_\odot$ ein Maximum erreicht und nach beiden Seiten von R_m abfällt. Zugleich erhält man in den beiden Fällen eine verschiedene Verteilung $T(\tau)$. Im ersten Fall (maximaler Kontrast am Sonnenrande) findet die Überhitzung der Materie in der Fackel hauptsächlich in den äußersten Schichten mit $\tau < 0{,}02$ statt. Im zweiten Fall dagegen besitzt die Überhitzung (d. h. das Verhältnis $T_f/T_\odot$) etwa bei $\tau \approx 0{,}6$ ihr Maximum.

Für die Lösung des betrachteten Problems sind noch weitere sorgfältige Messungen des Kontrastes Fackel – Photosphäre in der Nähe des äußersten Sonnenrandes erforderlich. Zur Zeit ist jedoch die Annahme gerechtfertigt, daß der zweite Fall der Wirklichkeit offenbar näherkommt, weil – wie sich aus dem Studium der Absorptionslinien in den Spektren der Fackeln ergibt – die sie erzeugenden Atome einer höheren Temperatur ausgesetzt sind als die entsprechenden Atome in der Photosphäre (siehe weiter unten). Die Absorptionslinien entstehen indessen im Mittel (!) gerade in der Nähe des Niveaus mit $\tau = 0{,}3 - 0{,}6$.

Das Studium der Flocculi spricht ebenfalls dafür, daß der zweite Fall der Wirklichkeit näherkommt. Diese Frage behandeln wir in § 21.

In Zusammenhang mit der Deutung des beobachteten Kontrastes Fackel – Photosphäre gehen wir noch auf ein wichtiges Problem ein, das von allgemeinem Charakter ist.

Zur Vereinfachung setzen wir voraus, daß die aus der Sonne (Stern) austretende Strahlung der Frequenz ν in einer verhältnismäßig dünnen Schicht der Oberfläche entsteht, in der alle Temperaturen, die die Strahlung und den Zustand der Materie der Schicht charakterisieren, gleich sind, sich nicht mit der Tiefe ändern und den Wert T_0 besitzen. In dem vorliegenden Fall ist – wie unmittelbar ersichtlich – die Intensität $I_\nu(0)$ der austretenden Strahlung von der vorgegebenen Frequenz gleich $B_\nu(T_0)$. [Siehe z. B. Gleichung (3.38) für $T = T_0 = \text{const.}$] Wir nehmen jetzt an, daß sich aus irgendeinem Grunde die kinetische Temperatur der betrachteten Schichten bis zu einem gewissen Wert $T_\varepsilon > T_0$ erhöht hat. Es erhebt sich nun die Frage, ob die Intensität $I_\nu(0)$ jetzt gleich $B_\nu(T_\varepsilon)$ ist oder nicht. Wir zeigen im folgenden, daß dies nicht der Fall sein kann.[2])

---

[1]) M. WALDMEIER, Die Sichtbarkeitsfunktion der Sonnenfackeln. Zeitschrift für Astrophysik **26**, 147, 1949.

[2]) Das vorliegende Problem ist behandelt in der Arbeit von E. R. MUSTEL, Über die grundlegenden physikalischen Prinzipien der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes in den Sternatmosphären. Mitteilungen des Astrophysikalischen Observatoriums auf der Krim **2**, 123, 1948 (Э. Р. Мустель, Об основных физических принципах теории лучевого равновесия звездных атмосфер. Известия Крымской астрофизической обзерватории **2**, 123, 1948).

In Übereinstimmung mit den Formeln (3.30), (3.13) und (2.27) hat der Ausdruck für die Intensität der aus der Oberfläche austretenden Strahlung die allgemeine Gestalt

$$I_\nu(\vartheta, 0) = \int_0^\infty \frac{j_\nu}{\varkappa_\nu} e^{-t_\nu \sec\vartheta} \sec\vartheta \, dt_\nu, \tag{19.13}$$

wobei hier die Voraussetzung des lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes nicht benutzt worden ist. Da wir uns nur mit der prinzipiellen Seite der vorliegenden Aufgabe befassen, nehmen wir an, daß im Innern der äußeren Schichten, in denen die Intensität I_ν $(\vartheta, 0)$ im wesentlichen entsteht, das Verhältnis $j_\nu/\varkappa_\nu$ konstant ist. Im Rahmen der Hypothese des lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes würde diese Voraussetzung nach (3.10) bedeuten, daß die Temperatur innerhalb der genannten Schichten konstant ist. Wir setzen jetzt $j_\nu/\varkappa_\nu = \text{const}$ und finden nach (19.13) für alle ϑ

$$I_\nu(\vartheta, 0) = \frac{j_\nu}{\varkappa_\nu}. \tag{19.14}$$

Wir berücksichtigen ferner, daß der Emissionskoeffizient j_ν in den Sternatmosphären im wesentlichen durch die Rekombinationen bestimmt wird (mit Ausnahme des fernen infraroten Spektralbereichs). Dann können wir für ihn die Gleichung (8.38) benutzen, wobei wir für die Sonne die Prozesse der erzwungenen Emission vernachlässigen können. Schließlich mögen die Absorptionsprozesse (Koeffizient $\varkappa_\nu$) und die Emissionsprozesse (Koeffizient j_ν) in einer vorgegebenen Frequenz durch die gleichen Atome bestimmt werden. Dann können wir nach (5.20) und (5.22) schreiben:

$$\varrho\varkappa_\nu = n_{r,k} k'_\nu, \tag{19.15}$$

wobei $n_{r,k}$ die Anzahl der Atome im r-ten Ionisations- und k-ten Anregungszustand in 1 cm³ ist.

Hierbei betonen wir, daß wir sowohl in (8.38) als auch in (19.15) nur einen der Streifen der Abb. 11 berücksichtigt haben. Die Berücksichtigung aller Streifen mit $\chi_{r,k} < h\nu$ würde unsere Resultate aber prinzipiell nicht ändern.

Auf Grund unserer Ausführungen erhalten wir für I_ν $(\vartheta, 0)$ den Ausdruck

$$I_\nu(\vartheta, 0) = \left(\frac{n_e n_{r+1}}{n_{r,k}}\right) \frac{g_{r,k} h^4 \nu^3}{u_{r+1} c^2 (2\pi m_e k T_\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{h\nu - \chi_{r,k}}{k T_\varepsilon}}. \tag{19.16}$$

Wenn wir in diese Formel die im fünften Paragraphen für das thermische Gleichgewicht abgeleiteten Gleichungen einführen, $T = T_\varepsilon$ setzen und die erzwungene Emission berücksichtigen, erhalten wir I_ν $(\vartheta, 0) = B_\nu$ (T), was unmittelbar einzusehen ist.

Um unser Hauptergebnis so verständlich wie möglich zu machen, betrachten wir eine Frequenz ν, die in der Nähe der Grenzfrequenz ν_k des von uns betrach-

teten Streifens liegt oder ihr gleich ist. In diesem Fall ist $h\nu \approx \chi_{r,k}$ und folglich

$$I_\nu(\vartheta, 0) \approx \left(\frac{n_e n_{r+1}}{n_{r,k}}\right)\left\{\frac{g_{r,k} h^4 \nu^3}{u_{r+1} c^2 (2\pi m_e k T_\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}\right\}. \tag{19.17}$$

Der erste Faktor der rechten Seite von (19.17) hängt von den Ionisations- und den Anregungsprozessen, der zweite Faktor – und zwar in schwachem Maße – nur von der kinetischen Temperatur ab. Wenn die Ionisations- und die Anregungsprozesse durch die Temperatur T bestimmt werden und außerdem $T = T_\varepsilon$ ist, so ist – wie wir eben gezeigt haben – $I_\nu(\vartheta, 0) = B_\nu(T)$.

Untersuchen wir jetzt, was bei einer Erhöhung von T_ε geschieht. In § 8 haben wir gesehen, daß unter den in den Sternatmosphären herrschenden Bedingungen (kleine Materiedichten) die Ionisation in der Hauptsache durch Strahlung und nicht durch Stöße bewirkt wird. Ferner haben wir in § 15 gezeigt, daß das gleiche auch für die Anregungsprozesse gilt. Hieraus folgt, daß der erste Faktor auf der rechten Seite von (19.17) sich anfangs überhaupt nicht mit wachsendem T_ε ändert. Der Einfluß der Zunahme von T_ε auf diesen Faktor wird erst dann merklich, wenn der Faktor α der Formel (8.24) mit Eins vergleichbar wird und Eins übersteigt. Der Einfluß einer Zunahme von T_ε auf den zweiten Faktor der Formel (19.17) ist dagegen im allgemeinen klein. Aus diesem Grunde ist $I_\nu(\vartheta, 0)$ bei der Erhöhung T_ε zunächst praktisch konstant. Darauf beginnt es (bei $\alpha > 1$) zu wachsen; aber auch hier ist die Ungleichung $I_\nu(\vartheta, 0) < B_\nu(T_\varepsilon)$ oder sogar die Ungleichung $I_\nu(\vartheta, 0) \ll B_\nu(T_\varepsilon)$ erfüllt. Auf diese Weise darf man unter den Bedingungen in den Sternatmosphären aus der Zunahme der Intensität der austretenden Strahlung nicht unmittelbar auf eine entsprechende Zunahme der kinetischen Temperatur schließen. Wenn daher beispielsweise die Strahlungstemperatur der Fackeln $(T_E)_f$ höher als die Strahlungstemperatur $(T_E)_\odot$ der benachbarten Bereiche der Photosphäre ist, darf man die Differenz $\Delta T_E = (T_E)_f - (T_E)_\odot$ nicht der entsprechenden Differenz der kinetischen Temperaturen gleichsetzen. In Wirklichkeit kann die Differenz $\Delta T_\varepsilon = (T_\varepsilon)_f - (T_\varepsilon)_\odot$ viel größer sein. Hierbei ist klar, daß diese Folgerung prinzipiellen Charakter besitzt und von den Einschränkungen, die wir bei der Durchführung der Lösung des betrachteten Problems gemacht haben, nicht betroffen wird.

5. Das Spektrum der Fackeln

Wir wenden uns jetzt den Spektren der Fackeln zu. Ein allgemeiner quantitativer Vergleich des Spektrums einer Fackel mit dem Spektrum der benachbarten Photosphäre zeigt, daß die Linien der ionisierten Metalle im Spektrum der Fackel stärker sind als im Spektrum der Photosphäre. Bei den Linien der neutralen Metalle beobachtet man das umgekehrte Verhalten. Eine Ausnahme von dieser Regel bilden die Linien H und K von Ca II, die im Spektrum der Fackeln schwächer sind als im Spektrum der benachbarten Photosphäre.

Bisher liegen noch sehr wenig spektralphotometrische Untersuchungen der

Fackeln vor; im wesentlichen Arbeiten von T. W. KRAT (Pulkowo) und O. N. MITROPOLSKAJA (Astrophysikalisches Observatorium auf der Krim).[1] Wir stellen kurz die Ergebnisse der beiden Arbeiten dar. Die von O. N. MITROPOLSKAJA mit Hilfe der Fe I-Linien durchgeführte Ableitung einer Wachstumskurve für eine Fackel ergab, daß sich diese Kurve innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler in ihrer Form nicht von der Kurve unterscheidet, die für die benachbarten Bereiche der Photosphäre abgeleitet wurde. Eine gewisse gegenseitige Verschiebung beider Kurven längs der Abszissenachse weist darauf hin, daß in der Fackel weniger absorbierende Fe I-Atome vorhanden sind als in der benachbarten Photosphäre.

Aus beiden zitierten Arbeiten folgt (in Übereinstimmung mit der oben angegebenen qualitativen Charakteristik), daß tatsächlich die Linien der neutralen Elemente in ihrer überwiegenden Anzahl in den Fackeln schwächer sind als in der Photosphäre und daß bei den Linien der ionisierten Elemente (mit Ausnahme der Linien H und K) das umgekehrte Verhalten beobachtet wird.

Diese Ergebnisse besagen, daß die mittlere Temperatur der Fackeln höher als die mittlere Temperatur der benachbarten Photosphäre ist.

Oben haben wir gezeigt, daß die Bestimmung der effektiven Temperatur der Fackeln (aus dem Kontrast Fackel – Photosphäre) wegen der Besonderheit des Gesetzes der Temperaturverteilung innerhalb der Fackeln erschwert wird. Daher kann man versuchen, $(T_e)_f$ folgendermaßen zu bestimmen. Wir machen die Annahme, daß wir für eine Reihe von Absorptionslinien die Differenz der Äquivalentbreiten $\Delta W_\lambda = (W_\lambda)_f - (W_\lambda)_\odot$ bestimmt haben. Außerdem nehmen wir an, daß für dieselben Linien die Abhängigkeit der Größe W_λ vom Spektraltyp des Sterns und damit (siehe Tabelle 11) von der effektiven Temperatur T_e des Sternes bekannt ist. Wenn wir dann voraussetzen, daß die physikalischen Eigenschaften einer Fackel den physikalischen Eigenschaften der Atmosphäre eines solchen Sternes ähnlich sind, dessen effektive Temperatur höher ist als die effektive Temperatur der Sonne, wobei aber g in beiden Fällen gleich ist, können wir mit Hilfe der gefundenen ΔW_λ auch die Differenz $\Delta T_e = (T_e)_f - (T_e)_\odot$ bestimmen. Hierbei beträgt ΔT_e etwa hundert Grad. Wenn man noch die „faserförmige" Struktur der Fackeln berücksichtigt, ist ΔT_e in den „Fasern" noch größer.

Weitere Untersuchungen auf Grund dieser Methode sind von außerordentlicher Wichtigkeit, weil z. B. ein Unterschied in ΔT_e für die neutralen und die ionisierten Atome auf eine Abweichung von den Bedingungen des thermodynamischen Gleichgewichtes in den Fackeln hinweisen könnte.

---

[1] T. W. KRAT, Die Ionisation und der Elektronendruck in den Sonnenfackeln. Astronomisches Journal 24, 329, 1947; O. N. MITROPOLSKAJA, Die Ableitung der Wachstumskurve und die Untersuchung der physikalischen Bedingungen in den Sonnenfackel. Mitteilungen des Astrophysikalischen Observatoriums auf der Krim 8, 93, 1952 (Т. В. Крат, Ионизация и электронное давление в солнечных факелах. Астрономический журнал 24, 329, 1947. О. Н. Митропольская, Построение кривой роста и исследование физических условий в солнечных факелах. Известия Крымской астрофизической обсерватории 8, 93, 1952).

Eine sichere Abschätzung des Elektronendruckes in den Fackeln wird durch verschiedene Anomalien im Verhalten der ionisierten Elemente (besonders Ca II) erschwert. Aus den vorliegenden Daten scheint zu folgen, daß p_e in den Fackeln sich nicht merklich von p_e in der benachbarten Photosphäre unterscheidet.

Die Frage nach dem anomalen Verhalten der Ca II-Linien in den Spektren der Fackeln ist bisher noch nicht vollständig geklärt. Es ist durchaus möglich, daß hier die gleiche Ursache wie bei den „Metallsternen" (siehe § 15) wirkt. Es gibt zahlreiche Hinweise, daß im fernen ultravioletten Bereich des Spektrums der Fackeln ein großer Energieüberschuß vorhanden ist. Dies muß zu einer anomal starken Ionisation der Ca II-Atome und zu einer Verringerung ihrer Anzahl führen.

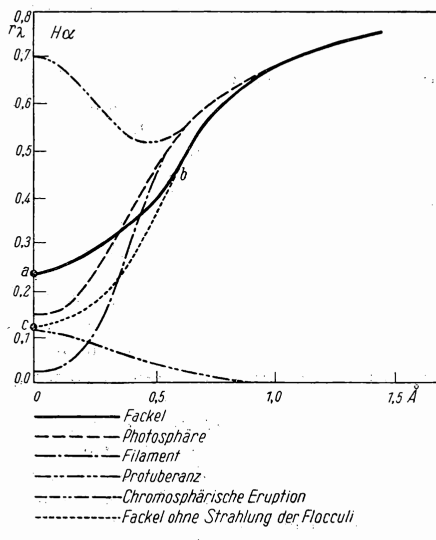


Abb. 51

Betrachten wir kurz das Verhalten der Wasserstofflinien in den Spektren der Fackeln. Die Kontur der Hα-Linie in den Spektren der Fackeln und der anderen auf der Sonne zu beobachtenden Erscheinungen ist in Abb. 51 dargestellt. Die ausgezogene Kontur ist die beobachtete Kontur der Hα-Linie in dem Spektrum einer Fackel. Aber in dem Abschnitt *a b* muß die zur Fackel selbst gehörige Kontur der Hα-Linie unterhalb der Linie *a b* verlaufen, weil sich den Fackeln die chromosphärischen Flocculi mit einer Hα-Emission überlagern (siehe § 21). Die wirkliche, von einer fremden Emission[1]) befreite Kontur der Hα-Linie im Spektrum der Fackeln muß etwa längs der punktierten Linie *b c* verlaufen. Die Verbreiterung der Hα-Linie in den Fackelspektren im Vergleich zu den Hα-Linien im Spektrum der benachbarten Gebiete der Photosphäre ist – wie man gegenwärtig annimmt – durch die erhöhte Anregung der Wasserstoffatome in den Fackeln bedingt. Infolgedessen wird die Anzahl N_2 der H-Atome im zweiten Quantenzustand und dadurch die Linienbreite vergrößert. Eine Verringerung der zentralen Restintensität in den Fackeln gegenüber der Photosphäre ist ebenfalls wegen der Erhöhung von N_2 in den Fackeln zu erwarten. Außerdem wird die erwähnte Verringerung von r_{ν_0} häufig in der Linie Hβ be-

[1]) D. h. die Kontur der Hα-Linie in einem Fackelspektrum in dem Fall, daß keinerlei chromosphärische Flocculi vorhanden sind.

obachtet[1]), bei der die von den Flocculi herrührende Emission viel schwächer ist als im Falle Hα und folglich die zur Fackel selbst gehörige Linienkontur von Hβ nicht merklich verzerrt ist. In noch höherem Maße trifft dies auf die höheren Glieder der BALMER-Serie zu.

Wenn die Hα-Linie nicht infolge der vergrößerten Anzahl der im zweiten Quantenzustand befindlichen Atome, sondern durch den Druckeffekt (mögliche Zunahme von n_e) verbreitert wäre, müßte man in diesem Fall eine starke Verbreiterung der Linien Hβ, Hγ, ... erwarten, bei denen der Druckeffekt stärker wirkt als bei der Hα-Linie. In den Fackeln ist aber die Verbreiterung der genannten Linien wesentlich schwächer als die Verbreiterung der Hα-Linie.

Der Umstand, daß die Wasserstoffatome in den Fackeln stärker angeregt sind als in der benachbarten Photosphäre, widerspricht nicht der aus den Beobachtungen näherungsweise gefundenen Gleichheit von $(T_A)_f$ und $(T_A)_\odot$ für die Metallinien. Im Gegensatz zu diesen ist für die Wasserstoffatome, die die BALMER-Serie erzeugen, eine Anregungsenergie von 10,15 eV erforderlich. Hier kann selbst eine kleine Vergrößerung von T_A zu einer beträchtlichen Vergrößerung des Verhältnisses $N_2 : N_1$ führen. Außerdem ist es durchaus möglich (hiervon haben wir schon gesprochen), daß in den Fackeln Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht auftreten, die – wie gewöhnlich – mit anwachsendem Anregungspotential zunehmen.

§ 20. Die Protuberanzen

1. Klassifikation der Protuberanzen

Beim Studium der Protuberanzen treffen wir auf eine Vielzahl von überaus komplizierten und hinsichtlich ihrer physikalischen Beschaffenheit mannigfaltigen Erscheinungen. Die Anwendung der Kinematographie auf das Studium der solaren Erscheinungen ermöglichte es, eine vorläufige Klassifikation der Protuberanzen vorzunehmen. Diese Klassifikation darf man nur als eine Einteilung der verschiedenen, sich voneinander unterscheidenden Abarten der Protuberanzen mit dem Hinweis auf einen möglichen Zusammenhang zwischen diesen Abarten ansehen.

Die Klassifikation wird nach folgenden Merkmalen vorgenommen:

1. Die äußere Form und die Struktur der Protuberanzen.
2. Der Charakter der Bewegung der Materie in den Protuberanzen.
3. Der Zusammenhang der Protuberanzen mit den Sonnenflecken.
4. Der Ort der Entstehung der Protuberanzen (Chromosphäre oder Korona).

---

[1]) Dies ist häufig auf Spektrogrammen im Licht der Hβ-Linie zu erkennen. In solchen Fällen ist die von der Fackel eingenommene Fläche in Hβ dunkler als die benachbarten Gebiete der Photosphäre.

Wir wollen die gegenwärtige Klassifikation der Protuberanzen nicht in aller Ausführlichkeit behandeln, sondern uns auf kurze Bemerkungen beschränken.[1])

Die *ruhenden* Protuberanzen (deren Aussehen meistens an einen Heuschober erinnert) weisen im Verlauf vieler Stunden praktisch keine Änderung auf.

Eines der sichersten Kriterien für die ruhenden Protuberanzen ist das Fehlen von äußeren Strömungen, *Strahlen*, die mit zu den charakteristischen Eigenschaften der aktiven Protuberanzen gehören.

Die *gewöhnlichen aktiven Protuberanzen* sind die am häufigsten auf der Sonne anzutreffende Form der Protuberanzen. Sie werden in allen Breiten beobachtet, wodurch sie sich von den aktiven Fleckprotuberanzen der Sonnenflecke unterscheiden (siehe weiter unten).

Ein typisches Kennzeichen für die gewöhnlichen aktiven Protuberanzen sind die Ströme sich bewegender Materie, die aus den äußeren Teilen des „Stammes" dieser Protuberanzen austreten und nach unten auf die Chromosphäre gerichtet sind, als ob sie von dort angezogen würden. Die in einer gewissen Entfernung vom „Stamm" liegende Stelle, zu der diese Ströme hinfließen, wird als *Anziehungszentrum* bezeichnet.

Nach den zur Zeit vorliegenden Beobachtungen des Materiestroms zu urteilen, nehmen die Anziehungszentren eine verhältnismäßig kleine Fläche in der Chromosphäre ein und sind durch keine äußeren Merkmale gekennzeichnet. Für eine einzige Protuberanz kann es mehrere Anziehungszentren geben. Die sich zu den Anziehungszentren bewegenden Materieströme bestehen gewöhnlich aus einzelnen Strahlen (Bändern) und Knoten. Die Länge eines Strahls schwankt zwischen tausend Kilometern und hunderttausend Kilometern bei sehr aktiven Protuberanzen. Breite und kräftige Strahlen können eine Protuberanz schnell verbrauchen.

Wenn überdies das Anziehungszentrum sehr stark ist, kann sich der gesamte Körper der aktiven Protuberanz von dem Stamm loslösen, der ihn mit der Chromosphäre verbindet, sich auf einer stark gekrümmten Bahn bis zu einer gewissen Höhe erheben, sich hierauf nach unten umwenden und in das Anziehungszentrum einmünden (sogenannte quasieruptive Protuberanz). In dem Maße, wie sich eine derartige Protuberanz dem Anziehungszentrum nähert, wird sie stark in der Helligkeit geschwächt. Das gleiche gilt auch für die aktiven Fleckprotuberanzen der Sonnenflecke.

Zu den aktiven Protuberanzen gehören auch die sogenannten *wechselwirkenden Protuberanzen*. Bei ihnen fließt die Materie in Form von Strahlen und Knoten von der Protuberanz zu einer andern. Man beobachtet auch Fälle, in denen sich die Strahlen und Knoten in beiden Richtungen bewegen. Hier findet also ein Materieaustausch zwischen den beiden Protuberanzen statt.

Als *eruptive Protuberanzen* bezeichnet man solche Protuberanzen, die sich verhältnismäßig schnell bis in große Höhen über der Sonnenoberfläche erheben

---

[1]) Über die ausführliche Darstellung einer der vollständigsten Klassifikationen, der Klassifikation von PETTIT, siehe [5, S. 98]. Die bei dieser Klassifikation benutzte Terminologie werden wir auch verwenden.

und dort verschwinden. Die maximalen Höhen dieser Protuberanzen liegen hauptsächlich zwischen 100000 und 500000 km. In noch größere Höhen steigen die eruptiven Protuberanzen selten auf. Die eruptiven Protuberanzen entstehen aus aktiven oder ruhenden Protuberanzen. Es scheint keine eruptive Protuberanz bekannt zu sein, die direkt aus der Chromosphäre aufsteigt.

Den Prozeß der Entstehung einer eruptiven Protuberanz aus einer aktiven Protuberanz können wir als eine gewisse Explosion ansehen. Dieses Wort bezieht sich natürlich nur auf die äußere Erscheinungsform und sagt nichts über das Wesen des Vorganges aus.

Infolge der Explosion dehnt sich die Protuberanz, die bis dahin eine aktive Protuberanz gewesen ist, aus, steigt auf und verschwindet auf dem Hintergrund der Korona. Während des gesamten Ausdehnungsprozesses entsendet die Protuberanz leuchtende Materieströme nach unten. Diese anfangs recht zahlreichen Ströme fließen auf das ursprüngliche Anziehungszentrum und auf neu entstehende Zentren zu.

Anscheinend lassen sich die eruptiven Protuberanzen in zwei Unterklassen einteilen. In der ersten Unterklasse haben wir es mit einer verhältnismäßig isolierten aufsteigenden Gasmasse zu tun, von der nach unten gerichtete Ströme ausgehen. In der zweiten Unterklasse besitzt die eruptive Protuberanz die Form eines Kurvenbogens, dessen höchste Stelle aufsteigt, während sich der ganze Bogen ausdehnt. Hier fließen die Ströme in Richtung der beiden Grundlinien (Seiten) des Bogens.

Abschließend weisen wir auf einen außerordentlich wichtigen Umstand hin. Die Entstehung einer eruptiven Protuberanz (d.h. die Explosion einer aktiven Protuberanz) vollzieht sich in Bereichen, in denen weder in der Photosphäre noch in der Chromosphäre Störungen beobachtet werden.

Die *Fleckprotuberanzen* werden in eine Reihe von Unterklassen eingeteilt, die sich stark voneinander unterscheiden. Ihnen allen ist gemeinsam, daß sie mit den Sonnenflecken zusammenhängen. Die Protuberanzen dieser Klasse werden nie ohne begleitende Flecke beobachtet, während man auch häufig Flecke ohne Protuberanzen beobachten kann. Wir gehen im folgenden auf die typischen Fleckprotuberanzen ein.

Die am häufigsten anzutreffende Abart der Fleckprotuberanzen ist diejenige, die man als *koronale Fleckprotuberanzen* bezeichnen könnte. Hier entsteht die leuchtende Materie der Protuberanzen im Bereich der Korona über den Flecken.

Es treten nämlich über den Fleckengruppen konvergierende Materieströme (Strahlen) oder in mehrere Bestandteile zerlegte Ströme auf, die sich alle auf Geraden oder gekrümmten Bahnen auf die Flecke zu bewegen. Seiner äußeren Form nach erinnert eine derartige Protuberanz an einen geöffneten Fächer. Oft beobachtet man in den oberen Teilen der erwähnten Ströme Verdichtungsknoten von leuchtender Materie, die sich gewöhnlich auch in dem Bereich der Korona bilden und dadurch, daß sie auf der Stelle bleiben, als „Reservoire“ für die nach unten fließenden Strahlen dienen. Es ist von Interesse, zu bemerken, daß sich in dem Maße, wie sich der Strahl der Chromosphäre nähert, er seine Helligkeit vergrößert.

Bei sehr aktiven Fleckengruppen fließt die Materie aus den Knoten nicht nur in einer Richtung, sondern in zwei Richtungen nach unten. Infolgedessen entsteht eine geschlossene Schlinge. Das Aussehen dieser Protuberanz erinnert an eine Fontäne. In seltenen Fällen können die Schlingen auch in der Chromosphäre entstehen.

Bisweilen sind die koronalen Fleckprotuberanzen an einer oder an beiden Seiten von aktiven Protuberanzen begleitet, die den oben betrachteten ähneln und mit ihnen viele gemeinsame Merkmale besitzen. In diesem Fall fließen die leuchtenden Materieströme in den Bereich, in dem sich die Flecke befinden.

Eine überaus interessante Abart der Fleckprotuberanzen ist diejenige, die man als *zurückkehrende* bezeichnen könnte. Hier wird die Materie mit Geschwindigkeiten, die bisweilen 500 km/sec übersteigen, aus der Chromosphäre fortgeschleudert und kehrt dann praktisch auf derselben Bahn in die Chromosphäre zurück. Die rückkehrenden Protuberanzen sind entweder kleine Klumpen, die mehrere tausend Kilometer aufsteigen und darauf in die Chromosphäre zurückkehren, oder sie besitzen die Gestalt riesiger Röhren (Säulen) leuchtender Materie mit einer Höhe von mehr als 100000 km. Im letzten Fall kehrt praktisch die gesamte leuchtende Materie der Protuberanzen in die Chromosphäre zurück. Von Zeit zu Zeit lösen sich nur die oberen Teile von ihr ab.

Die Lebensdauer der rückkehrenden Protuberanzen ist verhältnismäßig kurz. Sie beträgt 10–20 Minuten für die kleinen und etwas mehr als eine Stunde für die großen Protuberanzen. Von großem Interesse ist der Umstand, daß die zurückkehrenden Protuberanzen unter einem beliebigen Winkel zur Sonnenoberfläche herausgeschleudert werden können.

Bei genügend aktiven Fleckengruppen beobachtet man ebenfalls, daß kleine Klumpen von Chromosphärenmaterie (häufig unter einem großen Winkel zur Vertikalen) ausgestoßen werden, die ähnlich den eruptiven Protuberanzen nicht mehr in die Chromosphäre zurückkehren.

Außer diesen von uns besprochenen Abarten der Fleckprotuberanzen gibt es noch andere, denen wir uns jetzt nicht zuwenden wollen.

Die *Protuberanzen vom Tornado-Typ* ähneln einer senkrecht stehenden Spirale oder einem gedrehten Seil. In diesem Fall haben wir es zweifellos mit einer Rotation der Protuberanz und überhaupt mit Erscheinungen, die Wirbelcharakter besitzen, zu tun. Bisweilen entdeckt man auch bei den Protuberanzen anderer Typen eine Rotation.

Abschließend müssen wir kurz auf die Protuberanzen eingehen, deren Entstehung mit dem Bereich der Korona zusammenhängt. Die zu der Klasse der Fleckprotuberanzen gehörenden koronalen Protuberanzen haben wir schon behandelt. Ein ähnlicher Fall liegt bei den gewöhnlichen aktiven Protuberanzen vor. Mit zunehmender Zahl der leuchtenden Materieströme, die von einer derartigen Protuberanz ausgehen (was auf einen wachsenden Einfluß des Anziehungszentrums hindeutet), beginnen von Zeit zu Zeit aus dem Bereich der Korona zum Anziehungszentrum sich lange, leuchtende, leicht gekrümmte Strahlen zu bewegen, die Geschwindigkeiten von der Größenordnung 100–200 km/sec besitzen. Sie können in Höhen von ungefähr 150000 km auftreten und bewegen sich in der Regel auf dem gesamten Wege bis zum Anziehungszentrum mit kon-

stanter Geschwindigkeit. Wie sich aus den Beobachtungen ergibt, können diese Protuberanzen sogar dann auftreten und in die Chromosphäre einmünden, wenn keine andere Protuberanz beobachtet wird. Dies beweist, daß die Anziehungszentren auf der Oberfläche der Sonne unabhängig von den Protuberanzen existieren.

Als eine überaus interessante Abart der koronalen Fleckprotuberanzen sind die *Koronawolken* anzusehen. Die Entstehung der Koronawolken geht folgendermaßen vor sich: Über einer Fleckengruppe bilden sich plötzlich helle Punkte, deren Anzahl ständig zunimmt. Diese Punkte verschmelzen zu einer Wolke, die in dem Gebiet der Korona zu schweben scheint. Aus ihr bewegen sich Materieströme in Form von Strahlen nach unten auf die Flecke zu.

Bevor wir die Beschreibung der verschiedenen Klassen der Protuberanzen abschließen, betonen wir noch einmal, daß die vorliegende Klassifikation bis jetzt noch keine physikalische Grundlage besitzt. Irgendeine – wenn auch nur vorläufige – Klassifikation der Protuberanzen ist aber erforderlich, weil es – wie wir gesehen haben – eine überaus große Mannigfaltigkeit von verschiedenen Protuberanzen gibt und weil man bei der Deutung der physikalischen Eigenschaften dieser Typen jeweils eine besondere Methode anwenden muß, wenn auch gewisse Gesetzmäßigkeiten selbstverständlich von allgemeinerem Charakter sein können.

Wir bemerken, daß das wirkliche Bild der Entwicklung der Protuberanzen viel komplizierter ist, als man auf Grund dieser einfachen Klassifikation annehmen könnte. Bisweilen ist selbst die Zuordnung einer Protuberanz zu dieser oder jener Klasse mit großen Schwierigkeiten verbunden. Endlich muß man auch die Wechselbeziehung zwischen den Protuberanzen verschiedener Klassen berücksichtigen. Z.B. können die eruptiven Protuberanzen im Entwicklungsgang der aktiven Protuberanzen entstehen usw.

Dieser betrachteten Klassifikation liegen die am Rande der Sonnenscheibe beobachteten Protuberanzen zugrunde. Dort werden die Protuberanzen in Emission beobachtet. Wenn sich dagegen die Protuberanz zwischen dem Beobachter und der Photosphäre befindet, absorbiert sie ihre Strahlung (in den Linien, für die die optische Dicke der Protuberanz groß ist) und projiziert sich als ein gewisses, als Faser (Filament) bezeichnetes dunkles Gebilde auf die Sonnenscheibe. In den meisten Fällen sind die Filamente schmal und stark auseinandergezogen. Bisweilen erreicht ihre Länge (in der Projektion gerechnet) einen beträchtlichen Bruchteil des Sonnendurchmessers.

Wenn ein Filament infolge der Sonnenrotation zum Sonnenrand gelangt, verwandelt es sich für den Beobachter gewöhnlich in eine Protuberanz. Eine völlige Übereinstimmung zwischen den geometrischen Eigenschaften der Filamente und der aus ihnen hervorgehenden Protuberanzen liegt jedoch nicht vor. Anscheinend entstehen die Filamente durch die Absorption der Photosphärenstrahlung in den einzelnen Frequenzen, die von den dichtesten und ausgedehntesten Teilen der Protuberanzen hervorgerufen wird.

Aus der Erscheinung der „Umwandlung" eines Filaments in eine Protuberanz und umgekehrt schließt man, daß die Filamente in den meisten Fällen ruhende Protuberanzen darstellen.

Es ist interessant, daß die betrachteten Filamente (und folglich auch die ruhenden Protuberanzen) die von den Sonnenflecken eingenommenen Gebiete meiden. Wenn in der Nähe eines Filaments ein Fleck entsteht, verschwindet das Filament rasch. Im allgemeinen bleiben die Filamente jedoch verhältnismäßig lange, mehrere Tage und Wochen, bestehen. Man hat Grund zu der Annahme, daß die Umwandlung einer entsprechenden ruhenden Protuberanz in eine eruptive – natürlich über das Übergangsstadium einer aktiven Protuberanz – das normale Lebensende eines Filaments darstellt.

Bisweilen rufen auch die Fleckprotuberanzen eine merkliche Intensitätsabnahme der Strahlung der Sonnenscheibe hervor. In diesem Fall sind jedoch die dunklen Gebilde auf der Scheibe kleiner als die Filamente und haben ein anderes Aussehen, nämlich die Gestalt von kleinen, dunklen, unregelmäßig geformten Flächen, von sehr dunklen, dichten, kleinen Flecken usw. Diese Gebilde beobachtet man besonders deutlich über den chromosphärischen Eruptionen (Ausbrüchen).

2. Die Bewegungen der Materie in den Protuberanzen

Wir betrachten jetzt die Bewegung der Materie, in den Protuberanzen. Zum größten Teil wurde unser Wissen über dieses Gebiet mit Hilfe kinematographischer Aufnahmen der Protuberanzen in Verbindung mit Polarisations-Interferenzfiltern von schmalem Durchlässigkeitsbereich gewonnen.

In der Sowjetunion wurden derartige kinematographische Aufnahmen zuerst von A. B. Sewerny und A. B. Gilwarg am Astrophysikalischen Oberservatorium auf der Krim der Akademie der Wissenschaften der UdSSR durchgeführt [32].

Aus dem gewonnenen Material gelang es A. B. Sewerny[1]), drei grundlegende Bewegungstypen der Protuberanzen auszusondern.

Zu dem ersten Typ gehören die Bewegungen, die bei der Explosion einer eruptiven Protuberanz beobachtet werden.

Zu dem zweiten, am häufigsten auftretenden Typ zählt A. B. Sewerny die vollkommen regelmäßigen, beschleunigten oder verlangsamten Bewegungen einzelner Knoten, Strahlen und Wolken in der Protuberanz längs gekrümmter Bahnen. Diese Bewegungen sind für die Fleckprotuberanzen, die aktiven Protuberanzen, die Koronawolken und die zurückkehrenden Protuberanzen charakteristisch.

Schließlich gehören zu dem dritten Bewegungstyp die unregelmäßigen Bewegungen einzelner Knoten, Wolken und Strahlen (wie eine Maserung) und ebenfalls die Änderungen in der Form und Struktur, die große Ähnlichkeit mit der Metamorphose irdischer Wolken oder mit Rauch haben, der sich über einer

---

[1]) A. B. Sewerny, Grundlegende Bewegungstypen in den Sonnenprotuberanzen. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 82, 25, 1952 (А. Б. Северный, Основные типы движений в солнечных протуберанцах. Доклады Академии наук СССР 82, 25, 1952).

rauhen Oberfläche ausbreitet. Solche Metamorphosen, die mitunter äußerst langsam vor sich gehen und Stunden oder Tage dauern, sind für die ruhenden Protuberanzen kennzeichnend. In diesem Fall haben wir es ohne Zweifel mit dem Auftreten einer Turbulenz zu tun, der die gesamte Sonnenatmosphäre unterworfen ist.

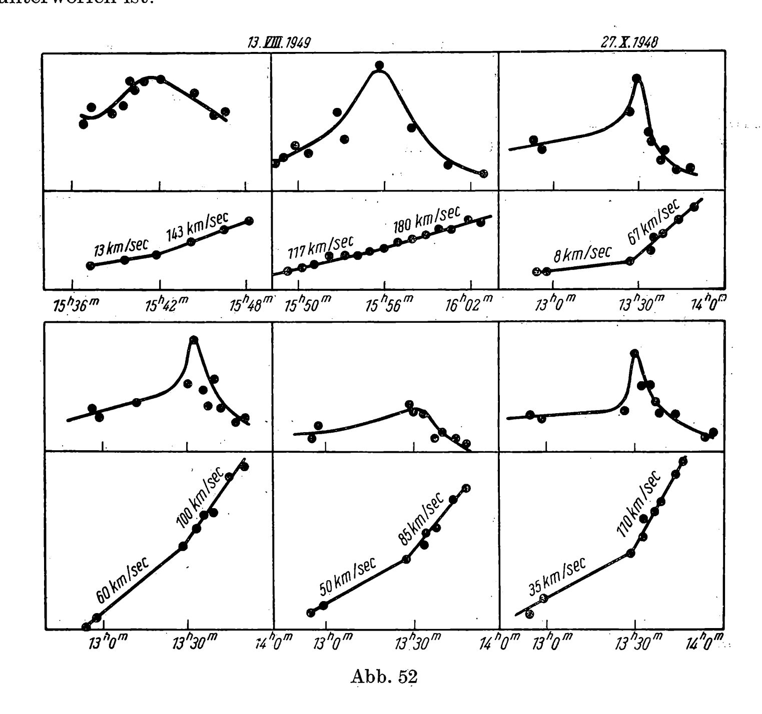


Abb. 52

Es ist klar, daß diese Aufteilung der Bewegungen in verschiedene Typen die Grundlage für die Schaffung einer zukünftigen, hinreichend begründeten Klassifikation der Protuberanzen sein muß.

Betrachten wir nun die anderen bei der Bewegung der Protuberanzen festgestellten Gesetzmäßigkeiten.

Durch die Anwendung der Kinematographie konnte man nachweisen, daß man den nach unten auf die Chromosphäre gerichteten Bewegungen eine viel größere Bedeutung beimessen muß, als es bislang geschah. Als Beispiel kann man auf die koronalen Fleckprotuberanzen, auf die aktiven Protuberanzen usw. verweisen. Unter den zahlreichen Untergruppen der Fleckprotuberanzen entstehen nur wenige in der Chromosphäre (z. B. die zurückkehrenden). Die übrigen entstehen im Gebiet der Korona, und von hier aus gehen Ströme leuch-

tender Materie nach unten. Überhaupt ist im Gegensatz zu den früher geltenden Ansichten anzunehmen, daß die Protuberanzen vieler Klassen in der Korona entstehen.

Eine aufmerksame Betrachtung der Filme über die Bewegung der Protuberanzen zeigt, daß in den weitaus meisten Fällen (besonders bei den koronalen Fleckprotuberanzen, den aktiven und wechselwirkenden Protuberanzen) die Bewegung der Knoten und Strahlen der leuchtenden Materie im Verlauf einer langen Zeitspanne anscheinend längs vollständig festliegender gekrümmter Bahnen vor sich geht. Hieran knüpft die Vorstellung an, daß im Bereich der Protuberanzen ein Kraftfeld vorhanden ist.

Aus dem Studium der eruptiven Protuberanzen ergibt sich, daß bei der Bewegung der Protuberanzen von der Sonne nach außen sich ihre Geschwindigkeit vergrößert. Hierbei geht die Geschwindigkeitsänderung sprunghaft vor sich. In den Intervallen zwischen einer plötzlichen Vergrößerung der Geschwindigkeit ist diese konstant. (In Wirklichkeit verändert sich die Geschwindigkeit natürlich nicht plötzlich, sondern in einem sehr kurzen Zeitintervall). Die Zeitintervalle zwischen den erwähnten „Geschwindigkeitssprüngen" betragen manchmal Minuten und manchmal auch Stunden. Es ist von Interesse, daß die plötzliche Geschwindigkeitsänderung im Verlauf einer Minute in der gesamten Protuberanz oder in einigen Teilen der Protuberanz vor sich geht.

A. B. SEWERNY[1]) entdeckte, daß nahe dem Zeitpunkt der plötzlichen Geschwindigkeitsänderung die Helligkeit der Knoten in den Protuberanzen zunimmt und in dem Augenblick der Geschwindigkeitsänderung ein Maximum erreicht, wenn sich auch diese Helligkeitsausbrüche natürlich auf dem Hintergrund einer allgemeinen Abnahme der mittleren Helligkeit der Protuberanz bei ihrem Aufstieg abspielen.

In Abb. 52 bringen wir eine graphische Darstellung, die der Arbeit von A. B. SEWERNY entnommen ist. Sie veranschaulicht die für die eruptiven Protuberanzen oben angegebenen Gesetzmäßigkeiten in der Änderung der Geschwindigkeiten und der Helligkeiten der Knoten.

Mit diesem Sachverhalt muß auch die Tatsache zusammenhängen, daß eine eruptive Protuberanz unmittelbar vor ihrem Aufstieg heller wird.

Aus den Beobachtungen ergibt sich, daß sich die Atome der verschiedenen Elemente in den Protuberanzen praktisch mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen. Mit anderen Worten, eine Entmischung der Elemente in den Protuberanzen tritt nicht ein. Zweifellos ist dies auf das Auftreten genügender Kräfte in den Protuberanzen zurückzuführen, die der Bewegung einen inneren Widerstand entgegensetzen. Wenn z. B. den Kalziumatomen eine größere Beschleunigung als den übrigen Atomen erteilt wird, müssen sich die Ca-Atome gewissermaßen durch die Masse der übrigen Atome „hindurchdrängen", d. h.,

---

[1]) A. B. SEWERNY, Eine Untersuchung der Schwankungen in der Helligkeit der Sonnenprotuberanzen. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 73, 475, 1950 (А. Б. Серерный, Исследование колебаний в свечении солнечных протуберанцев. Доклады Академии наук СССР 73, 475, 1950).

diese sind ein Widerstand für die sich bewegenden Ca-Atome. Es liegt auf der Hand, daß dieser Widerstand um so größer ist, je größer die Dichte des Mediums ist. Weil sich die verschiedenen Atome in den Protuberanzen mit den gleichen Geschwindigkeiten bewegen, können wir behaupten, daß die Dichte der Protuberanzen groß genug ist, um die Entmischung der Elemente zu verhindern. Dies folgt auch aus theoretischen Berechnungen (siehe z. B. die Rechnungen von McCrea [2, S. 432–436]).

3. Die Spektren der Protuberanzen

Nachdem wir uns mit den allgemeinen Eigenschaften der Protuberanzen vertraut gemacht haben, wenden wir uns der Behandlung und der Deutung ihrer Spektren zu. In erster Linie müssen wir darauf hinweisen, daß das Spektrum einer Protuberanz, die sich gegen den Himmel projiziert, ein Emissionsspektrum ist. Es besteht aus hellen Linien, einem schwachen Rekombinationskontinuum jenseits der Grenze der Balmer-Serie und einem noch schwächeren Kontinuum, das durch die Streuung der Sonnenstrahlung an freien Elektronen entsteht, die in den Protuberanzen enthalten sind. Diese charakteristischen Eigenschaften der Protuberanzenspektren sind darauf zurückzuführen, daß die optische Dicke der Protuberanzen in den Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums beträchtlich kleiner als Eins ist (dies ergibt sich aus den Beobachtungen).

Wir wollen unsere Ausführungen über das Emissionslinienspektrum der Protuberanzen etwas erläutern. Zu diesem Zweck betrachten wir den Fall, daß die optische Dicke der Protuberanz in den Frequenzen der Linien ebenfalls kleiner als Eins ist. In diesem Fall ist (da in allen Frequenzen $\tau_\nu < 1$ ist) die aus der Protuberanz austretende Strahlungsintensität in allen Frequenzen dem Emissionskoeffizienten j_ν proportional.

Gleichzeitig ist in den Frequenzen, in denen der Absorptionskoeffizient groß ist, auch der Emissionskoeffizient groß [siehe z. B. die Formeln (3.10) und (9.5)]. Und da in den Frequenzen der Linien der Absorptionskoeffizient größer als in den benachbarten Bereichen des kontinuierlichen Spektrums ist, ist auch in den Frequenzen der Linien der Emissionskoeffizient größer. Daher müssen die sich auf den Himmelshintergrund projizierenden Protuberanzen in der Tat ein Emissionslinienspektrum liefern. Hierbei ist klar, daß unsere Schlußfolgerung überhaupt nicht von der zugrunde gelegten vereinfachenden Voraussetzung über die Durchsichtigkeit der Protuberanz in den Frequenzen der Absorptionslinien abhängt.

Wenn sich dagegen die Protuberanz auf die Sonnenscheibe projiziert, müssen die Absorptionslinien im Sonnenspektrum an der entsprechenden Stelle der Scheibe durch die zusätzliche Absorption des Lichtes in der Protuberanz geschwächt sein. Dies beobachtet man auch bei gewissen Linien im Spektrum der Filamente, nämlich bei den starken Linien, bei denen die optische Dicke der Protuberanz mit Eins vergleichbar oder größer als Eins wird.

Das außerhalb von Finsternissen beobachtete Emissionslinienspektrum der ruhenden Protuberanzen umfaßt in der Hauptsache die ersten Glieder der BALMER-Serie des Wasserstoffs, die Linien H und K von Ca II, die D_3-Linie des neutralen Heliums ($\lambda = 5876$ Å) und noch einige schwächere Linien. Das während einer totalen Sonnenfinsternis, bei der der Einfluß der Tageshelligkeit des Himmels auf ein Minimum herabgesetzt ist, gewonnene Spektrum der Protuberanzen ist viel prächtiger und umfaßt einige Dutzend Emissionslinien. Am häufigsten sind hier die Wasserstofflinien und die Linien der ionisierten Metalle vertreten. Die Linien der neutralen Metalle sind in beträchtlich geringerer Anzahl vorhanden als die der ionisierten Metalle, wobei dies hauptsächlich die Linien sind, die zu den hinreichend starken Linien des gewöhnlichen Absorptionsspektrums der Sonne gehören. Außer den erwähnten Linien sind in dem Spektrum der ruhenden Protuberanzen einige Linien des neutralen Heliums (einschließlich D_3) und ebenfalls die Linie 4686 Å des ionisierten Heliums vorhanden.

Nach dem vorliegenden Material zu urteilen, unterscheidet sich das Spektrum der eruptiven Protuberanzen praktisch nicht von dem Spektrum der ruhenden Protuberanzen (in den relativen Intensitäten der verschiedenen Linien).

Die mit Flecken in Verbindung stehenden Protuberanzen werden oft als „*metallische*" bezeichnet. Diese Bezeichnung ist daraus entstanden, daß ihr außerhalb von Finsternissen untersuchtes Spektrum neben den Linien von H, Ca und He viele helle Metallinien enthält, die Sr, Mg, Na, Ti, Fe und anderen Metallen angehören. Bisweilen sind diese Linien so hell, daß man in ihnen auch bei offenem Spalt des Spektrohelioskops oder des Protuberanzenspektroskops ein Bild der Protuberanz sehen kann. In einigen Fällen beobachtete man bei den Protuberanzen dieser Klasse auch ein ziemlich intensives kontinuierliches Spektrum.

Zwischen dem Spektrum einer ruhenden Protuberanz und dem Spektrum einer Fleckprotuberanz besteht offenbar kein prinzipieller Unterschied. Der Vergleich der Spektren (die bei einer Finsternis gewonnen wurden) zeigt, daß das erstere hauptsächlich aus Linien besteht, die in der häufig benutzten geschätzten Intensitätsskala für die Chromosphärenlinien eine Intensität größer als 30 besitzen, während in den „metallischen" Protuberanzen auch schwächere Linien mit einer Intensität $\geqslant 15$ auftreten. Somit unterscheiden sich die Spektrallinien der ruhenden und der „metallischen" Protuberanzen der Sonnenflecke im wesentlichen durch ihre Intensitäten.

Dieser Unterschied kann entweder mit dem Unterschied im Ionisations- und Anregungsgrad oder mit einem Unterschied in der Anzahl der emittierenden Atome zusammenhängen (nicht aber mit einem Unterschied in der chemischen Zusammensetzung). Es ist zu erwarten, daß die Anzahl der emittierenden Atome in den Fleckprotuberanzen größer ist als die entsprechende Anzahl in den ruhenden Protuberanzen.

Zahlreiche charakteristische Eigenschaften der Protuberanzspektren, nämlich das Auftreten der Linien von He I und He II in diesen Spektren, das Vorherrschen der Linien der ionisierten Metalle gegenüber den Linien der neutralen Metalle usw., entsprechen einem höheren Anregungs- und Ionisationszustand

der Atome, als er unter den Bedingungen der Photosphäre und der „umkehrenden Schicht" der Sonne herrscht. Zum Beispiel zeigt UNSÖLD, daß das Spektrum der eruptiven Protuberanzen in Emission genau die gleichen Eigenschaften aufweist wie das gewöhnliche Absorptionsspektrum eines Sternes vom Typ cA. Schlüsse von größerer Bestimmtheit kann man aus einer quantitativen Analyse der Protuberanzenspektren ziehen. Dieser Aufgabe werden wir uns sogleich zuwenden.

4. Die Selbstabsorption in den Protuberanzen

Wir wählen in einer Protuberanz einen Zylinder aus, der in der Visierrichtung orientiert ist und die Grundfläche Eins besitzt (Abb. 53). Die Länge s dieses in der Höhe h über der Photosphäre gelegenen Zylinders ist gleich der Dicke der Protuberanz in der vorgegebenen Richtung.

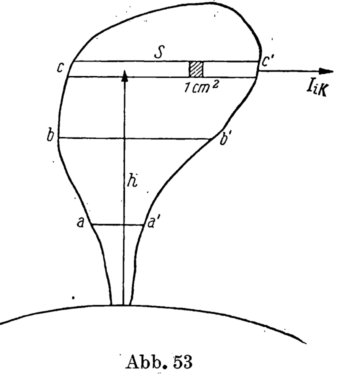


Abb. 53

Uns interessiert im Augenblick die Gesamtenergie, die von dem betrachteten Zylinder innerhalb der gesamten Linie mit den Übergängen $i \to k$ emittiert wird. Es sei I_{ik} diese von dem Zylinder in Richtung zum Beobachter in 1 sec und auf die Raumwinkeleinheit bezogene emittierte Gesamtenergie. Es ist klar, daß I_{ik} demnach die gesamte Strahlungsintensität in der betrachteten Linie und der vorgegebenen Richtung ist.

Die Anzahl der emittierenden Atome in dem betrachteten Zylinder sei N_k. Wir nehmen an, daß die optische Dicke der Protuberanz in der betrachteten Richtung innerhalb der gesamten Linie beträchtlich kleiner als Eins ist. Mit anderen Worten, wir nehmen an, daß man die Selbstabsorption innerhalb der Protuberanz (in der vorgegebenen Richtung) vernachlässigen kann. Dann erhalten wir

$$I_{ik} = \frac{N_k A_{ki}}{4\pi} h\nu_{ik}, \qquad (20.1)$$

weil wir für nicht sehr kleine $h\nu_{ik}$ die Prozesse der erzwungenen Emission unter den auf der Sonne herrschenden Bedingungen vernachlässigen können.

Wenn wir jetzt nach dieser oder jener Methode aus den Beobachtungen[1]) I_{ik} festgelegt haben, können wir aus (20.1) auch N_k bestimmen.

In einigen sehr wichtigen Fällen muß man jedoch die Selbstabsorption berücksichtigen. Wir gehen kurz auf dieses Problem ein.

[1]) Gewöhnlich beziehen die Beobachter die von den Protuberanzen emittierte Energie auf die Energie, die vom Mittelpunkt oder vom Rand der Sonnenscheibe emittiert wird.

Wir ersetzen in (2.26) $\varkappa_\nu$ durch σ_ν und bezeichnen mit $d\tau_\nu = \sigma_\nu \varrho ds$ das Element der optischen Dicke in der Richtung cc'. Dann erhalten wir

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{\sigma_\nu}. \tag{20.2}$$

Die Lösung dieser Gleichung, die wie bei der Herleitung von (3.36) und (3.37) durchgeführt wird, ergibt

$$I_\nu = \int_0^{\tau_\nu(s)} \frac{j_\nu}{\sigma_\nu} e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu, \tag{20.3}$$

wobei τ_ν (s) die optische Dicke des gesamten Zylinders cc' ist. Die Zählung der optischen Dicken kann sowohl vom Punkt c als auch vom Punkt c' aus vorgenommen werden. Durch Integration von (20.3) über alle Frequenzen der Emissionslinie erhalten wir offenbar I_{ik}:

$$I_{ik} = \int I_\nu d\nu = \int \left\{ \int_0^{\tau_\nu(s)} \frac{j_\nu}{\sigma_\nu} e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu \right\} d\nu. \tag{20.4}$$

Wenn die Selbstabsorption fehlt $[\tau_\nu(s) \ll 1]$, nimmt der Ausdruck (20.4) die Gestalt

$$I_{ik} = \int \left\{ \int_0^s j_\nu \varrho ds \right\} d\nu \tag{20.5}$$

an.

Die Berechnung des Integrals der rechten Seite von (20.4) im allgemeinen Fall ist mit großen Schwierigkeiten verbunden. Daher vereinfachen wir die Aufgabe ein wenig. Wenn wir voraussetzen, daß die physikalischen Bedingungen innerhalb einer Protuberanz nur von der Höhe h über der Photosphäre abhängen, können wir j_ν und σ_ν längs des Integrationsweges (des Zylinders cc') als konstant ansehen.

Folglich können wir in (20.4) $\frac{j_\nu}{\sigma_\nu}$ vor das innere Integralzeichen ziehen. Außerdem können wir auf Grund von (5.20) und (5.22) und der Konstanz von σ_ν an Stelle von $\tau_\nu(s)$

$$\tau_\nu(s) = \int_0^s \sigma_\nu \varrho ds = m \int_0^s \sigma_\nu n_i dh = s_\nu N_i \tag{20.6}$$

schreiben, wobei s_ν der auf ein Atom bezogene Absorptionskoeffizient und N_i die Zahl der absorbierenden Atome im Zylinder cc' ist. Auf diese Weise finden wir an Stelle von (20.4)

$$I_{ik} = \int \frac{j_\nu}{\sigma_\nu} \left(1 - e^{-s_\nu N_i}\right) d\nu. \tag{20.7}$$

Wir führen jetzt die Bezeichnung

$$P_\nu = \frac{j_\nu}{\sigma_\nu}. \tag{20.8}$$

ein.

Die Entscheidung darüber, welche Prozesse für P_ν maßgebend sind, stellt die größte Schwierigkeit bei dem Problem der Selbstabsorption dar. Wenn in den Protuberanzen lokales thermodynamisches Gleichgewicht herrschte, würde nach (3.10) $P_\nu \equiv B_\nu$ gelten (das ist in Wirklichkeit nicht der Fall). Wenn die Protuberanzen ferner die auf sie von unten auftreffende Sonnenstrahlung einfach zerstreuen, gilt nach (9.5) in diesem Fall $P_\nu = J_\nu$. Wenn endlich die Emission in den Protuberanzen das Ergebnis von Fluoreszenzprozessen oder der Anregung der Atome durch Elektronenstoß ist, besitzt P_ν völlig andere Werte. In allen diesen Fällen wird sich jedoch P_ν innerhalb einer Linie verhältnismäßig wenig mit der Frequenz ändern (viel weniger als sich der unter dem Integralzeichen in runden Klammern stehende Ausdruck mit der Frequenz ändert). Daher können wir (20.7) wie folgt umschreiben:

$$I_{ik} = \overline{P_\nu} \int \left(1 - e^{-s_\nu N_i}\right) d\nu, \tag{20.9}$$

wobei $\overline{P}_\nu$ ein Mittelwert von P_ν ist.

Was s_ν anbelangt, so zeigen entsprechende Untersuchungen, daß die optische Dicke der Protuberanzen selbst in der Mitte der starken Linien den Wert Zehn (oder im äußersten Fall die Größenordnung Zehn) nicht übersteigt. Dies bedeutet aber (siehe Abb. 25), daß im Bereich der Dämpfung (wo s_ν um einige Größenordnungen kleiner als s_{ν_0} ist) die optische Dicke $s_i N_i \ll 1$ ist. Folglich können wir für s_ν den durch die Formel (11.34) gegebenen reinen Doppler-Koeffizienten nehmen, wobei $\Delta \nu_D$ sowohl durch die thermische Bewegung als auch durch die Turbulenz bestimmt wird.

Wenn in einer beliebigen Richtung (d.h. aa', bb', cc' usw.) $\overline{P}_\nu$ ein und denselben Wert besitzt, ist I_{ik} nur eine Funktion von N_i, d. h., wir besitzen eine gewisse Wachstumskurve, jedoch für Emissionslinien. Wenn außerdem die Funktion $\overline{P}_\nu$ für alle Protuberanzen einer vorgegebenen Klasse konstant ist, kann man im Prinzip eine derartige Wachstumskurve aus vielen Protuberanzen ableiten.

Wenn wir für einen Augenblick die Konstanz von $\overline{P}_\nu$ voraussetzen, können wir das Auftreten einer Selbstabsorption folgendermaßen feststellen: Wir wählen zwei Linien: eine, bei der eine Selbstabsorption ganz sicher fehlt, etwa die D_3-Linie von He I, und eine weitere, bei der das Auftreten einer merklichen Selbstabsorption zu erwarten ist, etwa Hα. Wir messen für beide Linien I_{ik} in verschiedenen Punkten der Protuberanz (oder sogar in verschiedenen Protuberanzen) und fertigen eine graphische Darstellung an, auf deren Abszissenachse wir $(\lg I_{ik})_{\mathrm{He}}$ und auf deren Ordinatenachse wir $(\lg I_{ik})_{\mathrm{H}\alpha}$ auftragen. Wenn jetzt die Bedingungen für die Anregung und die Ionisation innerhalb der gesamten Protuberanz (oder der Protuberanzen) gleich sind und die Selbst-

absorption fehlt, so besteht zwischen $(I_{ik})_{H\alpha}$ und $(I_{ik})_{He}$ – wie aus (20.1) folgt – Proportionalität. Das Auftreten einer Selbstabsorption dagegen verringert natürlich $(I_{ik})_{H\alpha}$ dort, wo diese selbst groß ist. Je größer I_{ik} ist, um so größer ist N_k und folglich (bei $\overline{P}_\nu$ = const) auch N_i, d.h., um so größer ist die Selbstabsorption. Als Ergebnis erhält man eine graphische Darstellung von der Art der Abb. 54. Dabei ist Δ ein Maß für die Selbstabsorption.

Als Resultat derartiger Untersuchungen ergab sich, daß die Linien H und K von Ca II gewöhnlich eine starke, die Linie Hα eine gemäßigte und die D_3-Linie von He ebenso wie alle schwächeren Linien praktisch keine Selbstabsorption besitzen.

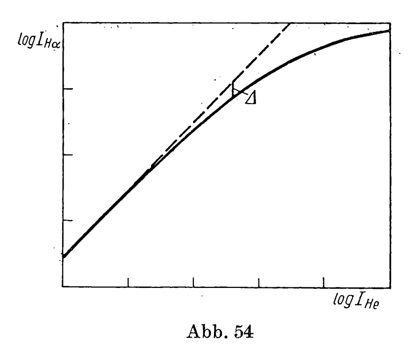


Abb. 54

Die beschriebene Methode hat den Nachteil (der sich in der Streuung der Punkte um die Kurven vom Typ der Abb. 54 offenbart), daß man bei ihrer Anwendung die Existenz einer universellen Wachstumskurve, d.h. die Konstanz von $\overline{P}_\nu$, postulieren muß. Andererseits liegt auf der Hand, daß außer allen übrigen Faktoren schon der Übergang von einer optisch dünnen zu einer optisch dicken Schicht eine Änderung von $\overline{P}_\nu$ nach sich zieht. Besonders deutlich tritt dies in dem Fall zutage, daß I_i durch die Streuung der Sonnenstrahlung bestimmt wird. Es ist klar, daß bei $\tau_{\nu_0} > 1$ die Größe J_ν in den äußeren und den inneren Bereichen der Protuberanz verschieden ist. Eine ähnliche Situation liegt auch bei den anderen Mechanismen der Anregung der Atome vor.

Nach W. P. Wjasanizyn[1]) kann man für die Linien H und K diese Schwierigkeit auf folgende Weise zum Teil beseitigen. Da die Linien H und K von einem gemeinsamen Niveau ausgehen und in dem gleichen Spektralbereich liegen, müssen die Anregungsbedingungen für sie praktisch gleich sein, so daß man $(\overline{P}_\nu)_H \approx (\overline{P}_\nu)_K$ setzen kann. Dadurch wird der Einfluß der Selbstabsorption auf das Verhältnis $(I_{ik})_H : (I_{ik})_K$ nur durch N_i bestimmt. Da die Oszillatorenstärke bei der K-Linie doppelt so groß ist wie bei der H-Linie, ist die Selbstabsorption bei der K-Linie stärker als bei der H-Linie. Dieser Effekt verstärkt sich mit wachsendem N_i, d.h. mit zunehmender allgemeiner Helligkeit der Protuberanz in den Linien H und K. Durch (20.9) können wir unter der oben angegebenen Voraussetzung, daß $(\overline{P}_\nu)_H = (\overline{P}_\nu)_K$ ist, den theoretischen Zusammenhang zwischen N_i und dem Verhältnis $(I_{ik})_H : (I_{ik})_K$ ableiten. Das in

---

[1]) W. P. Wjasanizyn, Spektralphotometrische Untersuchungen der Sonnenprotuberanzen. Mitteilungen des Astronomischen Hauptobservatoriums Nr. 136, 1, 1947 (В. П. Вязаницын, Спектрофотометрическое исследование солнечных протуберанцев. Известия ГАО, No. 136, 1, 1947).

den Ausdruck für den Absorptionskoeffizienten eingehende v_0 kann man aus den Halbwertsbreiten der Linien H und K bestimmen. Mit Hilfe dieser Methode (mit einigen Modifikationen) erhielt W. P. WJASANIZYN unter Zugrundelegung eines umfangreichen Materials einen mittleren Wert von $N_i = N_1 = 2{,}4 \cdot 10^{13}$ Ca II-Atomen für alle von ihm untersuchten Protuberanzen. Wenn man für die mittlere Dicke der ruhenden Protuberanzen etwa 10000 km ansetzt, sind in 1 cm³ einer Protuberanz ungefähr $2{,}4 \cdot 10^4$ Ca II-Atome enthalten. Aus dem gleichen Material wurde abgeleitet, daß die Selbstabsorption die Helligkeit der H-Linie von Ca II im Mittel um das Dreifache verringert.

In einer anderen Arbeit untersuchte W. P. WJASANIZYN[1]) den seltenen Fall einer teilweisen Abschirmung einer Protuberanz durch eine andere. In diesem Fall bot sich die dem Beobachter am nächsten gelegene Protuberanz sowohl in Emission als auch in Absorption dar.

5. Die Anregung der Atome in den Protuberanzen

Die Hauptaufgabe der Theorie der Selbstabsorption ist es, die Gestalt der Funktion P_ν anzugeben, d. h. klarzustellen, welche Anregungs- und Ionisationsbedingungen in den Protuberanzen herrschen. Es ist vollkommen klar, daß diese Aufgabe überhaupt eine der grundlegenden der gesamten Theorie der Protuberanzen ist. Selbst dann, wenn die Selbstabsorption fehlt und wir die Formel (20.1) anwenden können, müssen wir für die aus N_k vorzunehmende Bestimmung der Anzahl der Atome, die sich in anderen Anregungs- und Ionisationszuständen befinden, die Anregungs- und Ionisationsprozesse selbst kennen. In einigen Fällen kann man diese Frage mit Hilfe der Gleichung (20.9) entscheiden. Wir setzen voraus, daß I_{ik} z. B. durch die gewöhnliche Streuung der Sonnenstrahlung in der Protuberanz bestimmt wird. Dann können wir schreiben: $\bar{P}_\nu = \bar{J}_\nu$, mit $\bar{J}_\nu = \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} = \bar{I}_\nu W$, wobei W der Verdünnungsfaktor und $\bar{I}_\nu$ die mittlere Strahlungsintensität innerhalb der Protuberanz ist. Falls wir jetzt (z. B. nach dem oben angegebenen Verfahren) N_i bestimmt haben, können wir das Integral auf der rechten Seite von (20.9) leicht berechnen. Kennen wir ferner aus den Beobachtungen die absoluten Werte von I_{ik}, so können wir nach (20.9) auch $\bar{J}_\nu$ bestimmen. Hierbei muß das auf diese Weise gefundene $\bar{I}_\nu$ angenähert mit der mittleren Intensität der Sonnenstrahlung, die auf die Protuberanz auftrifft, übereinstimmen. Für kleinere τ_ν ist dies unmittelbar verständlich. Bei großen τ_ν dagegen tritt gemäß (20.3) die Strahlung I_ν aus verhältnismäßig weit außen liegenden Schichten der Protuberanz mit kleinem τ_ν

---

[1]) W. P. WJASANIZYN, Die Selbstabsorption der Protuberanzen in den Ca⁺-Linien H und K. Mitteilungen des Astronomischen Hauptobservatoriums Nr. 139, 31, 1947 (В. П. Вязаницын, Самопоглощение протуберанцев в Ca⁺ линиях H и K. Известия ГАО, No. 139, 31, 1947).

aus (Einfluß des Faktors $e^{-\tau_\nu}$), d.h., auch hier muß $\bar{I}_\nu$ näherungsweise mit der mittleren Intensität der Sonnenstrahlung übereinstimmen. Die von W. P. WJASANIZYN in den beiden zitierten Arbeiten durchgeführten Rechnungen haben ergeben, daß das auf die beschriebene Weise gewonnene $\bar{J}_\nu$ bei den Linien H und K in der Tat näherungsweise gleich der Größe $J_\nu = \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi}$ der Sonnenstrahlung in der Linienmitte von H und K ist. Folglich wird die Helligkeit der Protuberanzen in den Linien H und K in beträchtlichem Maße durch die Streuung der Sonnenstrahlung bestimmt (in dem vorliegenden Fall durch Resonanzstreuung).

Dieses Ergebnis ist darauf zurückzuführrn, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten A_{ki} und B_{ik} für die Linien H und K und außerdem die Dichte der Sonnenstrahlung in dem betrachteten Spektralbereich hinreichend groß sind.

Anscheinend gilt dieser Schluß auch für viele andere Linien, die man in den Protuberanzspektren beobachtet. In einigen Fällen hat man jedoch Grund zu der Annahme, daß an dem Leuchtmechanismus auch Rekombinationen, auf die Kaskadenübergänge der Elektronen nach unten folgen, in beträchtlichem Maße beteiligt sind. Zum Beispiel ist die Intensität der Emissionslinien des Wasserstoffs und besonders des Heliums gegenüber der Intensität der meisten anderen Linien (hauptsächlich der Metallinien mit niedrigem Anregungspotential) anomal hoch.

Wertvolle Hinweise für die Lösung der vorliegenden Aufgabe erhalten wir, wenn wir die Verteilung der emittierenden Atome auf die verschiedenen Niveaus untersuchen.

Genau genommen, muß man bei der Lösung dieser Aufgabe von geeigneten Stationaritätsgleichungen ausgehen. Jede dieser Gleichungen legt fest, daß die Menge der in 1 sec auf allen nur möglichen Wegen auf das k-te Niveau eines r-fach ionisierten Atoms gelangenden Elektronen gleich der Menge der Elektronen ist, die sich in 1 sec ebenfalls auf allen nur möglichen Wegen von diesem Niveau entfernen. Beide Mengen sind natürlich auf das gleiche Volumen, etwa auf 1 cm³, bezogen. (Es ist völlig klar, daß diese Gleichungen in dem Falle richtig sind, in dem sich die Helligkeit der Protuberanz zeitlich nicht oder nur wenig ändert.)

Wir schreiben diese Gleichungen auf. Es sei ϱ_{ik} die Strahlungsdichte, die dem Übergang $i \to k$ oder $k \to i$ entspricht. Die Wahrscheinlichkeit für eine Photoionisation vom k-ten Niveau bezeichnen wir mit C_{kf}. Sie kann nach (14.20) berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit für eine Photorekombination auf das k-te Niveau bezeichnen wir mit C_{fk}. Nach (8.25) ist sie gleich

$$C_{fk} = 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k T}\right)^{3/2} \int_0^\infty (\beta_\nu)_k \left(1 + \frac{c^3}{8\pi h \nu^3}\,\varrho_\nu\right) e^{-\frac{m_e v^2}{2kT}}\, v^3 dv. \tag{20.10}$$

Dann nimmt die Stationaritätsgleichung für das erste Niveau mit $k = 1$ die

Gestalt

$$n_{r+1} n_e C_{f1} + \sum_{s=2}^{\infty} n_{r,s}(A_{s1} + \varrho_{1s} B_{s1}) = n_{r,1} \sum_{s=2}^{\infty} \varrho_{1s} B_{1s} + n_{r,1} C_{1f} \tag{20.11}$$

an. Das erste Glied auf der linken Seite gibt die Zahl der Rekombinationen auf das erste Niveau und das zweite Glied die Zahl der Übergänge auf dieses Niveau von den höheren diskreten Niveaus an. Das erste Glied auf der rechten Seite gibt die Zahl der Übergänge vom ersten Niveau auf die höheren diskreten Niveaus und das zweite Glied die Zahl der Photoionisationen vom ersten Niveau an.

Für das zweite Niveau erhält die Gleichung des Gleichgewichtes die Gestalt

$$n_{r+1} n_e C_{f2} + \sum_{s=3}^{\infty} n_{r,s}(A_{s2} + \varrho_{2s} B_{s2}) + n_{r,1} \varrho_{12} B_{12}$$
$$= n_{r,2} \left\{ \sum_{s=3}^{\infty} \varrho_{2s} B_{2s} + A_{21} + \varrho_{12} B_{21} + C_{2f} \right\}. \tag{20.12}$$

Für das dritte Niveau finden wir

$$n_{r+1} n_e C_{f3} + \sum_{s=4}^{\infty} n_{r,s}(A_{s3} + \varrho_{3s} B_{s3}) + \sum_{s=1}^{s=2} n_{r,s} \varrho_{s3} B_{s3}$$
$$= n_{r,3} \left\{ \sum_{s=4}^{\infty} \varrho_{3s} B_{3s} + \sum_{s=1}^{s=2} (A_{3s} + \varrho_{s3} B_{3s}) + C_{3f} \right\}. \tag{20.13}$$

In analoger Form schreiben sich auch die Gleichungen für die anderen Niveaus. Ihre Zahl ist natürlich unendlich groß. In der Praxis beschränken wir uns jedoch auf eine endliche Zahl von Gleichungen, da bei geeigneter Wahl dieser Zahl der Einfluß der übrigen Gleichungen auf das Resultat bedeutungslos wird.

Bei der Aufstellung der Stationaritätsgleichungen haben wir die Anregung der Atome durch Stöße wegen der geringen Dichte der Materie in den Protuberanzen vernachlässigt. (Nach zahlreichen Beobachtungsdaten zu urteilen, ist die kinetische Temperatur der Protuberanzen ebenfalls niedrig und beträgt etwa 5000—7000°).

Um die Verteilung der Atome auf die einzelnen Zustände zu ermitteln, muß man ϱ_{ik} und C_{kf} kennen.

Durch die Vorgabe einer Reihe von Werten für die Strahlungstemperatur (der Anregung) diesseits der Grenze der LYMAN-Serie (T_1) und für die Ionisationstemperatur jenseits dieser Grenze (T_2) gelang es W. P. WJASANIZYN (siehe Fußnote auf S. 340), eine zufriedenstellende Erklärung für das beobachtete Verhältnis $I_{H\beta} : I_{H\gamma} : I_{H\delta} : I_{H\varepsilon}$ zu finden. Hierbei ergab sich, daß $T_1 = 5670°$ und $T_2 = 6650°$.

Somit liegt die Anregungstemperatur in diesem Fall in der Nähe der effektiven Temperatur der Sonne. Dagegen zeigt $T_2 = 6650°$, daß jenseits der Grenze der LYMAN-Serie ein bestimmter Intensitätsüberschuß in der Sonnen-

strahlung vorhanden ist.[1]) Dies hat eine zusätzliche Ionisation der Wasserstoffatome und somit auch eine Vergrößerung der Zahl der Rekombinationen, d.h. eine Helligkeitszunahme der entsprechenden Emissionslinien des Wasserstoffs, zur Folge.

Hier ist jedoch folgende Bemerkung am Platze: Obgleich der angegebene Weg zur Lösung der Gleichungen vom Typ (20.11) bis (20.13) usw. bedeutungsvoll und physikalisch richtig ist, stößt er doch auf eine Reihe ernster Schwierigkeiten. Die größte Schwierigkeit ist die, daß die Dichte der ionisierenden und anregenden Strahlung im fernen Ultraviolett uns nicht bekannt ist. Zugleich spricht das Auftreten der Linien von He I und He II in den Spektren der Protuberanzen dafür, daß wir bezüglich der Strahlungsdichte die verschiedenartigsten Anomalien zu erwarten haben.

Insbesondere kann sich der Charakter der ionisierenden Strahlung sowohl in der Temperatur als auch hinsichtlich der Quelle scharf von dem Charakter der anregenden Strahlung unterscheiden. So wird die Ionisation des Wasserstoffs und des Heliums in den Protuberanzen anscheinend durch die harte Strahlung der Korona bewirkt. Gleichzeitig ist für die Anregung der Wassersoffatome vom ersten Niveau aus anscheinend die eigene Emission der Protuberanzen in den Linien der Lyman-Serie maßgebend (infolge von Rekombinationen mit nachfolgenden Kaskadenübergängen). Auf die Protuberanzen trifft allerdings auch die direkte Strahlung der Chromosphäre in den Linien L α, L β usw. auf. Jedoch ist die optische Dicke der Protuberanzen in diesen Frequenzen sehr groß (in der Linie Hα ist sie häufig mit Eins vergleichbar), so daß die monochromatische Strahlung der Chromosphäre nur in stark abgeschwächter Form in die Tiefe der Protuberanz eindringt.

Aus unseren Darlegungen geht hervor, daß unsere Kenntnisse über ϱ_{ik} und C_{kf} für große Frequenzen im Augenblick noch sehr unsicher sind. Überhaupt sind sämtliche theoretischen Schlußfolgerungen, die die Übergänge mit großen Anregungsenergien betreffen, zur Zeit sehr ungewiß, um so mehr, als die Situation für die verschiedenen Klassen von Protuberanzen unterschiedlich sein kann.

Im Hinblick auf diese Unsicherheit bedient man sich verschiedener indirekter Methoden [außer der Verwendung der Gleichungen (20.11)–(20.13)]. Eine sehr weit verbreitete Methode dieser Art ist die folgende:

Wir betrachten Atome mit hohem erstem Anregungspotential, z. B. Wasserstoff- oder Heliumatome. Die Anwendung der Formel des thermischen Gleichgewichtes auf diese Atome kann – wie wir gezeigt haben – große Fehler hervorrufen. Dagegen hat man Grund zu der Annahme, daß es durchaus gerechtfertigt ist, die fraglichen Formeln bei Übergängen mit kleinen Energiewerten anzuwenden.

In diesem Zusammenhang betrachten wir Übergänge zwischen dem Kontinuum und den Niveaus, die sich durch eine verhältnismäßig kleine (bis 5 eV) Bindungsenergie $\chi_{r,k}$ auszeichnen.

---

[1]) Wegen der größeren Undurchsichtigkeit der Sonnengase jenseits der Grenze $\lambda = 912$ Å müßte man erwarten, daß die Strahlungsintensität hier der Grenztemperatur der Sonnenphotosphäre, etwa gleich 4500°–5000°, entspricht.

Im Hinblick auf unsere Ausführungen können wir für diese Übergänge die für thermodynamisches Gleichgewicht geltenden Formeln benutzen. Eine dieser Formeln erhalten wir, wenn wir unter Beachtung von (5.6) (5.54) durch (5.11) dividieren:

$$n_{r,k} = n_{r+1} p_e \frac{g_{r,k}}{u_{r+1}} \frac{h^3}{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}} e^{\frac{\chi_{r,k}}{kT}}, \tag{20.14}$$

oder, in logarithmischer Form:

$$\lg n_{r,k} = \lg n_{r+1} + \lg p_e + \lg \frac{g_{r,k}}{u_{r+1}} + \lg \frac{h^3}{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{5}{2}}} - \frac{5}{2} \lg T + \frac{5040}{T} \chi_{r,k}, \tag{20.15}$$

wobei $\chi_{r,k}$ in Elektronenvolt ausgedrückt ist.

Wenn wir jetzt mit Hilfe von (20.1) oder (20.9) $N_{r,k}$ bestimmen, können wir, bei bekanntem p_e und T, N_{r+1} ermitteln usw.

Da die Formel (20.14) von vielen Autoren angewendet wird und mit ihrer Hilfe zahlreiche quantitative Untersuchungen durchgeführt worden sind, begründen wir sie näher.

Man kann sich davon überzeugen, daß die Formel (20.14) völlig streng gültig ist, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. In dem langwelligen Spektralbereich (in dem $h\nu$ den betrachteten kleinen Werten $\chi_{r,k}$ entspricht) wird die auf die Atome auftreffende Strahlungsdichte durch das Planckscheche Gesetz bestimmt.

2. Die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen entspricht für kleine Energien der Maxwellschen Verteilung.

3. Die Übergänge zwischen dem Grundniveau (und überhaupt den tiefen Niveaus) des betrachteten Atoms oder Ions und den uns interessierenden oberen Niveaus sind verboten oder spielen keine wesentliche Rolle.

Die erste Bedingung ist bei den Protuberanzen mit genügender Genauigkeit erfüllt. Die zweite Bedingung ist ebenfalls verwirklicht (siehe § 8). In welchem Maße die dritte Bedingung erfüllt ist, ist schwieriger zu sagen. Die Niveaus des Orthoheliums bespielsweise genügen dieser Bedingung. Der Umstand, daß auch in zahlreichen anderen Fällen die Anwendung der Formel (20.14) stets zu glaubwürdigen Resultaten führt, die auch eine innere Übereinstimmung aufweisen, zeigt, daß in diesen Fällen die Zahl der Übergänge vom Grundniveau auf ein beliebiges angeregtes Niveau größenordnungsmäßig die Zahl der Übergänge zwischen den angeregten Niveaus und die Zahl der Rekombinationen auf dieses angeregte Niveau nicht übersteigt. Für den Wasserstoff kann man dies erläutern, wenn man von folgenden Überlegungen ausgeht. Eine anomal starke Anregung der Wasserstoffatome in den Protuberanzen vom ersten Niveau aus könnte infolge einer anomal starken Strahlung der Chromosphäre in den Linien

der LYMAN-Serie auftreten (siehe § 22). Die optische Dicke der Protuberanzen ist jedoch in den Linien dieser Serie sehr groß. Daher dringt die Strahlung der Chromosphäre stark geschwächt in die Protuberanz ein. Anscheinend findet etwas Ähnliches auch beim Helium statt. Selbstverständlich sind noch weitere Untersuchungen über die Möglichkeit der Anwendung der Formel (20.14) erforderlich.

6. Die Ionisation der Atome. Der Elektronendruck

Wir behandeln jetzt kurz das Problem der Ionisation der Atome in den Protuberanzen. In erster Linie ist hier der mittlere Wert von p_e zu bestimmen. Dies können wir folgendermaßen ausführen.

Die erste Methode: p_e kann man mit Hilfe der Formel (15.1) bestimmen, indem man für m die Hauptquantenzahl der letzten getrennten Linie aus der BALMER-Serie oder der PASCHEN-Serie im Protuberanzenspektrum einsetzt. Bei dem Übergang von n_e zu p_e kann man für T größenordnungsmäßig 5000 bis 7000° ansetzen.

Die zweite Methode zur Bestimmung von p_e besteht in folgendem: Weiter unten werden wir sehen, daß der Wasserstoff in den Protuberanzen in beträchtlichem Maße ionisiert ist, so daß die Anzahl der freien Elektronen in den Protuberanzen hauptsächlich durch die Ionisation des Wasserstoffs und nicht durch die Ionisation der Metalle bestimmt wird. In diesem Falle ist $n_e \approx n_1$, wobei n_1 die Anzahl der Protonen in 1 cm³ ist. Folglich erhalten wir unter Verwendung von (20.14)

$$n_{0,k} = n_e^2 \frac{g_{0,k}}{u_1} \frac{h^3}{2\,(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}}\,(k\,T)^{\frac{3}{2}}}\, e^{\frac{\chi_{0,k}}{k\,T}}, \tag{20.16}$$

wobei $g_{0,k} = 2\,k^2$ ist.

Wenn wir mit Hilfe von (20.1) und der bekannten Dicke der Protuberanz $n_{0,k}$ bestimmen (für eine beliebige BALMER- oder PASCHEN-Linie oder sogar für mehrere Linien), gewinnen wir aus (20.16) n_e.

Mit Rücksicht auf unsere Ausführungen können wir für T die Strahlungstemperatur der Sonne im roten und infraroten Spektralbereich nehmen, wo sie etwa 6000° beträgt. Da der Exponentialfaktor in (20.16) bei der Bestimmung von n_e unter der Wurzel auftritt, kann sich das auf diese Weise gefundene n_e nicht stark von dem wahren Wert unterscheiden.

Die dritte Methode zur Bestimmung von n_e, die zum ersten Mal von W. P. WJASANIZYN angewendet wurde (siehe Fußnote auf Seite 340), fußt auf der Lösung der Gleichungen (20.11)–(20.13). Aus diesen Gleichungen finden wir für Wasserstoff die Quotienten $\frac{n_{0,s}}{n_e n_1} \approx \frac{n_{0,s}}{n_e^2}$. Ist $n_{0,s}$ aus den Beobachtungen bekannt, so können wir n_e selbst ermitteln.

Mit Hilfe der beschriebenen Methoden fanden verschiedene Autoren (W. P. WJASANIZYN, A. UNSÖLD und andere), daß p_e für Protuberanzen im Mittel in den Grenzen 0,005 und 0,05 bar liegt, wobei die obere Grenze an-

scheinend der Wirklichkeit am nächsten kommt. Bei $T_\varepsilon = 5000°$ und $p_e = 0{,}05$ bar erhält man $n_e \approx 7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm}^{-3}$, bei $p_e = 0{,}005$ bar $n_e \approx 7 \cdot 10^{9}\,\mathrm{cm}^{-3}$.

Somit ist p_e in den Protuberanzen etwa um drei Größenordnungen kleiner als in der Photosphäre der Sonne. Dieser niedrige Wert für p_e erklärt jedoch nicht den anomal hohen Ionisationszustand der He- und H-Atome in den Protuberanzen. Die Hauptursache für die erhöhte Ionisation muß von anderem Charakter sein. Nach I. S. Schklowski [33, § 30] ist einer der wahrscheinlichsten Mechanismen für die Ionisation der Protuberanzen die Ionisation durch die monochromatische ultraviolette Strahlung der Korona (siehe § 22), d. h. die Ionisation durch die Strahlung der Korona in den einzelnen Linien, die im fernen Ultraviolett gelegen sind. Hauptsächlich sind dies die Koronalinien $\lambda = 776$ Å (Ne VIII) und $\lambda = 625$ Å (Mg X). Die Ionisationsgleichung ist in diesem Fall ähnlich wie die Gleichung (8.27) gebaut, wobei J_ν nur in dem schmalen Bereich der Koronalinien von Null verschieden ist. Insbesondere ist nach (3.6) und (5.37) die von der Strahlung einer beliebig vorgegebenen Koronalinie erzeugte Anzahl von Photoionisationen in 1 cm³ und in 1 sec für den Wasserstoff gleich

$$k'_\nu n_{0,1} \frac{c}{h\nu} \int \varrho_\nu d\nu\,, \tag{20.17}$$

wobei $\int \varrho_\nu d\nu$ die Gesamtdichte der monochromatischen Koronastrahlung in der gesamten Linie und k'_ν der Absorptionskoeffizient für die photoelektrische Absorption vom ersten Niveau aus ist; dieser wird durch die Formel (5.24) mit $n = 1$ bestimmt. Die Gesamtzahl der Photoionisationen berechnet sich durch die Summation von (20.17) über alle an der Ionisation beteiligten Linien. Die Anzahl der Photorekombinationen wird wie früher durch die Formel (8.25) festgelegt.

Die Anwendung analoger Ionisationsformeln erklärt in der Tat den sehr hohen Ionisationszustand von H und He in den Protuberanzen. Hierbei findet man, daß die Ionisationswirkung der fraglichen Koronastrahlung für den Wasserstoff einer Planckschen Strahlung mit der Temperatur $T \approx 7000°$ äquivalent ist, die dem von W. P. Wjasanizyn gefundenen Wert für die „Ionisationstemperatur" $T_2 = 6650°$ nahe kommt. Zu den gleichen quantitativen Ergebnissen gelangt auch W. A. Krat.[1])

Außerdem zeigen derartige Rechnungen, daß der Ionisationsgrad des Wasserstoffs x_{H} in den Protuberanzen die Größenordnung 0,1–1,0 besitzt. In diesem Fall ist die Ionisation des Wasserstoffs tatsächlich die Hauptquelle der freien Elektronen. Dieses Ergebnis (das wir schon benutzt haben) stimmt auch mit den anderen Folgerungen überein, die sich aus den verschiedenen angegebenen Methoden ergeben. Eine dieser Methoden wird in der Anwendung auf die Chromosphäre in § 21 betrachtet.

---

[1]) W. A. Krat, Über das Spektrum der Chromosphäre und der schwachen Protuberanzen. Mitteilungen des Astronomischen Hauptobservatoriums Nr. 147, S. 1, 1951 (В. А. Крат, О спектре хромосферы и слабых протуберанцев, Известия ГАО, No. 147, стр. 1. 1951).

Die Abweichungen von dem Ionisationszustand, der dem thermodynamischen Gleichgewicht entspricht, kann man mit Hilfe der Formel (20.14) angeben, wenn in dem Spektrum der Protuberanz die Linien zweier aufeinanderfolgender Ionisationsstufen eines bestimmten Elementes enthalten sind. Bei einer Protuberanz sind dies natürlich die Linien der neutralen und der einfach ionisierten Elemente. Linien von zweifach ionisierten Elementen werden in den Protuberanzenspektren nicht beobachtet.

Auf Grund von (20.14) können wir schreiben:

$$\frac{n_{0,k}}{n_{1,k}} = \frac{n_1}{n_2} \frac{g_{0,k}}{g_{1,k}} \frac{u_2}{u_1} e^{\frac{\chi_{0,k} - \chi_{1,k}}{kT}}, \tag{20.18}$$

wobei natürlich der Index k für das neutrale und das ionisierte Atom verschieden sein kann.

Wenn wir z. B. $n_{0,k}$ und $n_{1,k}$ aus den Linien des neutralen und des einfach ionisierten Heliums (Linie 4686 Å He II) bestimmen, können wir bei vorgegebenem T mit Hilfe von (20.18) $n_1 : n_2$ ermitteln, d. h. das Verhältnis der Anzahl der einfach ionisierten Heliumatome zur Anzahl der zweifach ionisierten Heliumatome. Die größte Unsicherheit liegt hier in der Vorgabe von T. Bei kleiner Differenz $\chi_{0,k} - \chi_{1,k}$ ist jedoch der Fehler in dem vorgegebenen Wert von T ebenfalls gering. In diesem Fall kann man $T = 6000°$ setzen (siehe oben). Auf analoge Weise findet man, daß beispielsweise das Verhältnis n_2 zu n_1, das dem Verhältnis von n (He III) zu n (He II) entspricht, in den Protuberanzen um das $10^{38,5}$fache größer ist, als die Ionisationsformel (5.11) mit $T = 5040°$ angibt! Derartige Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht kann man rein formal folgendermaßen beschreiben. Wir schreiben zu diesem Zweck $\Phi(\chi r)$ in der Formel (5.11a) an Stelle des entscheidenden Temperaturgliedes $\frac{5040}{T}\chi_r$. In diesem Fall nimmt die Ionisationsformel die Gestalt

$$\lg \frac{n_{r+1}}{n_r} = \lg \frac{u_{r+1}}{u_r} + \frac{5}{2} \lg T - \Phi(\chi_r) - \lg p_e + \lg \frac{2\,(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{5}{2}}}{h^3} \tag{20.19}$$

an.

Wenn wir in (20.19) einen bekannten Wert für p_e einführen, im zweiten Summanden auf der rechten Seite von (20.19) einen gewissen festen Wert für T annehmen, der etwa näherungsweise gleich der effektiven Temperatur der Sonne ist (der Einfluß dieses Summanden ist im allgemeinen klein), und mit Hilfe einer zu (20.18) analogen Formel das Verhältnis $n_{r+1} : n_r$ ermitteln, finden wir aus (20.19) die Funktion $\Phi(\chi_r)$.

Wenn wir eine Reihe von Elementen benutzen, können wir die Abhängigkeit der Funktion $\Phi(\chi_r)$ von χ_r in Form einer glatten Kurve darstellen. Diese Kurve gibt für jedes χ_r ein quantitatives Maß für die Abweichungen von der Formel der thermischen Ionisation (5.11) an.[1] Mit Hilfe dieser Kurven und der Formel (20.19) können wir die Ionisation für die Elemente angeben, für die nur n_r oder n_{r+1} usw. bekannt ist.

[1]) Eine von UNSÖLD für eine eruptive Protuberanz angefertigte graphische Darstellung der Funktion $\Phi(\chi_r)$ siehe in [2, S. 573].

7. Die kinetische Temperatur der Protuberanzen. Die chemische Zusammensetzung

Wir behandeln jetzt die Frage nach der kinetischen Temperatur der Protuberanzen. Ein direkter Weg zu ihrer Bestimmung ist das Studium der Energieverteilung im Rekombinationsleuchten der Protuberanzen jenseits der Grenze der BALMER-Serie.

Da die Protuberanzen in den Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums (mindestens bis zur Grenze der LYMAN-Serie) durchsichtig sind, ist die Energiemenge $I_\nu d\nu$, die von einer Protuberanz in 1 sec von 1 cm² in die vorgegebene Richtung cc' (siehe Abb. 53) emittiert wird und die auf die Raumwinkeleinheit und das Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ bezogen ist, gleich

$$I_\nu d\nu = d\nu \int_0^s j_\nu \varrho \, ds\,, \tag{20.20}$$

wobei s die lineare Länge des Zylinders cc' ist. Dabei ist I_ν offenbar die Strahlungsintensität in der betrachteten Richtung.

In dem vorliegenden Fall wird der Emissionskoeffizient j_ν durch die Formel (8.38) gegeben, wobei wir die erzwungene Emission vernachlässigen können. Wenn wir wieder voraussetzen, daß der physikalische Zustand der Materie in der Protuberanz nur von der Höhe h abhängt, können wir das Produkt $j_\nu \varrho$ in (20.20) vor das Integralzeichen ziehen. Auf Grund von (8.38) erhalten wir dann

$$I_\nu = s\,\{n_e n_1\} \left\{ \frac{2k^2 h^4 \nu^3 k_\nu'}{c^2 (2\pi m_e k T_\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \right\} e^{-\frac{h\nu - \chi_{0,k}}{k T_\varepsilon}}\,. \tag{20.21}$$

Für ein Proton ist $u_1 = 1$ und $g_{0,k} = 2\,k^2$.

Beachten wir ferner, daß $n_e \approx n_1$ ist, und benutzen wir (5.24), so finden wir

$$I_\nu \approx s n_e^2 \frac{2^6 \pi^2 h e^6 R}{3\sqrt{3}\, c^3 (2\pi m_e k T_\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \frac{g'}{k^3} e^{-\frac{h\nu - \chi_{0,k}}{k T_\varepsilon}}\,, \tag{20.22}$$

wobei für das BALMER-Kontinuum $k = 2$ ist.

Da die Änderung des Korrektionsfaktors g' mit der Frequenz verhältnismäßig klein ist, folgt aus (20.22), daß die Intensität des Rekombinationsleuchtens jenseits der Seriengrenze (für Wasserstoff) proportional $e^{-\frac{h\nu}{k T_\varepsilon}}$ abnimmt. Folglich können wir aus dem Vergleich der Beobachtungen und dieses theoretischen Gesetzes T_ε bestimmen.

Bestimmungen von T_ε nach der dargelegten Methode mit genügender Genauigkeit liegen nicht vor; aus zahlreichen Beobachtungsdaten (siehe z. B. Fußnote auf Seite 340) folgt jedoch, daß T_ε innerhalb der Protuberanzen etwa 5000–8000° beträgt.

Wir weisen darauf hin, daß wir hier nur von der kinetischen Temperatur der Elektronen gesprochen haben. Im allgemeinen führt aber die Materie in einer Protuberanz, ähnlich wie in den Sternatmosphären, auch eine turbulente Bewegung aus. Die bisher vorliegenden Daten sind jedoch noch recht dürftig. So findet W. P. WJASANIZYN in seiner zitierten Arbeit auf Grund eines umfangreichen Materials aus dem quadratischen Mittelwert eine Turbulenzgeschwindigkeit (in Richtung des Sehstrahls) von der Größenordnung 10 km/sec. Andere Autoren stellen dagegen keine merkliche Turbulenz fest. Dennoch muß – nach den Bewegungen der Knoten der leuchtenden Materie zu urteilen – in den Protuberanzen eine Turbulenz auftreten (siehe S. 332/333). Für die endgültige Lösung dieses Problems sind noch weitere Beobachtungen erforderlich.

Jetzt behandeln wir kurz das Problem der chemischen Zusammensetzung der Materie, aus der die Protuberanzen bestehen. Eingehende quantitative Untersuchungen liegen hierüber noch nicht vor. Die durchgeführten Untersuchungen über den allgemeinen Charakter der Protuberanzenspektren und insbesondere die Arbeiten von W. A. KRAT (siehe Fußnote auf S. 347) zeigen jedoch, daß die Protuberanzen praktisch die gleiche chemische Zusammensetzung besitzen wie die Chromosphäre und die Photosphäre. Überdies darf man auf Grund der vorliegenden Angaben behaupten, daß überhaupt sämtliche Gebilde der Sonnenatmosphäre (Chromosphäre, Korona usw.) die gleiche relative Häufigkeit der verschiedenen Elemente aufweisen. Für einige Gebilde (die Sonnenkorona, siehe § 22) bestätigt sich diese Behauptung direkt durch die quantitative Analyse der Spektren.

Diese Gleichartigkeit der chemischen Zusammensetzung bei den verschiedenen Gebilden in der Sonnenatmosphäre muß das Ergebnis eines „durchmischenden" Einflusses von turbulenten Strömen sein. Daher ist z. B. eine gewisse Verschiedenheit zwischen den Spektren der ruhenden Protuberanzen und den Spektren der Fleckprotuberanzen zweifellos auf unterschiedliche Anregungsbedingungen und möglicherweise auf einen allgemeinen Unterschied in der Zahl der emittierenden Atome zurückzuführen.

Die Hypothese über die Identität der chemischen Zusammensetzung der Photosphäre und der Protuberanzen ermöglicht es, die relative Häufigkeit des Heliums in der Sonnenatmosphäre aus den Emissionslinien eines Protuberanzenspektrums zu ermitteln. Im gewöhnlichen Sonnenspektrum sind bekanntlich keine Heliumlinien vorhanden.

Diese Rechnungen kann man z. B. mit Hilfe der Formel (20.14), natürlich unter Beachtung der gemachten kritischen Bemerkungen, ausführen.

Nach (20.14) schreiben wir den Ausdruck für $n_{r,k}$ zweimal: einmal für den neutralen Wasserstoff und ein zweites Mal für das neutrale Helium, wobei wir alle auf das Helium bezogenen Größen mit einem Stern versehen. Dann erhalten wir für $n_{0,s}^* : n_{0,k}$

$$\frac{n_{0,s}^*}{n_{0,k}} = \frac{n_1^*}{n_1} \frac{g_{0,s}^*}{g_{0,k}} \frac{u_1}{u_1^*} e^{-\frac{\chi_{0,k} - \chi_{0,s}^*}{kT}}. \qquad (20.23)$$

Wir wählen jetzt zwei Linien mit kleinem $\chi_{0,k}$ und $\chi_{0,s}^*$ aus und bestimmen aus den Beobachtungen für diese Linien $n_{0,s}^* : n_{0,k} \approx N_{0,s}^* : N_{0,k}$. Hierauf führen wir

in (20.23) dieses Verhältnis und die wahrscheinlichste Temperatur T ein. Dann erhalten wir das Verhältnis $n_1^* : n_1$. Wenn wir ferner nach dieser oder jener Methode den Ionisationszustand des Wasserstoffs und des Heliums ermittelt haben, können wir aus dem gefundenen Verhältnis $n_1^* : n_1$ auch das Verhältnis der Gesamtzahl der Wasserstoff- und Heliumatome, d. h. das Verhältnis

$$n^* : n = (n_2^* + n_1^* + n_0^*) : (n_1 + n_0) \qquad (20.23')$$

berechnen.

Die betrachtete Methode ist von verschiedenen Autoren angewendet worden. A. B. SEWERNY[1]) benutzte für die beiden Linien die Linie $H\alpha$ und die Linie $\lambda = 10830$ Å des Orthoheliums. Die Beobachtungen wurden mit einem Polarisations-Interferenzfilter des Astrophysikalischen Observatoriums auf der Krim durchgeführt.

Aus analogen Untersuchungen (A. B. SEWERNY, A. UNSÖLD) ergab sich, daß tatsächlich die Häufigkeit des Heliums im Vergleich zum Wasserstoff in den Protuberanzen, und folglich in der Photosphäre, praktisch die gleiche ist wie in den Photosphären der zu anderen Klassen gehörenden Sterne.

8. Die mögliche Deutung der in den Protuberanzen beobachteten Erscheinungen

Wir gehen jetzt kurz auf die Deutung der auffallendsten Erscheinungen ein, die für die Entstehung und die Entwicklung der Protuberanzen charakteristisch sind.

Wir wenden uns zunächst dem Mechanismus zu, auf Grund dessen innerhalb der verhältnismäßig heißen und verdünnten Korona kühlere und dichtere Materie in Form von Protuberanzen entstehen kann, und auch dem umgekehrten Prozeß – dem Zerfall einer Protuberanz. Wir erinnern, daß die Entstehung von leuchtender Materie in dem Bereich der Korona (Strahlen und Knoten der Protuberanz) gewissermaßen „aus dem Nichts" eine der charakteristischen Eigenschaften der gewöhnlichen koronalen Protuberanzen, der Koronawolken und einiger anderer Fleckprotuberanzen ist.

Zweifellos ist das erwähnte Auftreten von leuchtender Materie auf dem dunkleren Hintergrund der Korona auf die Verdichtung der Koronamaterie unter dem Einfluß gewisser „fokussierender" Faktoren, die anscheinend elektromagnetischen Charakter besitzen, zurückzuführen.

Allerdings ist die kinetische Temperatur der Koronamaterie (etwa 1000000°) sehr viel höher als die kinetische Temperatur der Protuberanzen (etwa 5000 bis 8000°). Diese Abkühlung der Koronamaterie bei ihrer Verdichtung zu Protuberanzen ist jedoch leicht zu erklären. Der Verdichtungsprozeß hat in Über-

---

[1]) A. B. SEWERNY, Versuch einer Phosphorophotographie der Sonnenprotuberanzen im infraroten Licht. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR **76**, 189, 1951 (А. Б. Северный, Опыт фосфорофотографирования солнечных протуберанцев в инфракрасных лучах. Доклады Академии наук СССР **76**, 189, 1951).

einstimmung mit (8.38) eine Zunahme der Rekombinationen (Vergrößerung des Produktes $n_e n_{r+1}$) und demnach eine erhöhte Abgabe von Strahlungsenergie an die Umgebung und somit eine Abkühlung der Koronamaterie zur Folge. Insbesondere könnte durch Kondensationsprozesse der Materie (die „impulsiven", kurzzeitigen Charakter besitzen) die von A. B. SEWERNY festgestellte Helligkeitszunahme der Knoten in einer Protuberanz bei den plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen erklärt werden.

Bezüglich der Abschwächung des Leuchtens der Materie in den Protuberanzen ist auf zwei mögliche Faktoren hinzuweisen:

1. Die Ausdehnung der Knoten und der übrigen Bestandteile, aus denen sich die Protuberanzen bei ihrer Bewegung zusammensetzen. Infolge der Ausdehnung verkleinert sich p_e, die Ionisation der Atome nimmt zu, und gleichzeitig werden die Rekombinationen verringert (die z. B. die Helligkeit der Wasserstoff- und Heliumlinien bestimmen). Dies alles führt natürlich zu einer Abnahme des Leuchtens der Protuberanzen in den Emissionslinien.

2. A. B. SEWERNY hat als erster die Ansicht vertreten (siehe Fußnote Seite 332), daß eine „Erwärmung" der Protuberanzen durch die an sie grenzende Korona möglich ist (Prozeß der Wärmeleitung). Diese Erwärmung hat ebenfalls eine Zunahme der Ionisation der Atome in der Protuberanz zur Folge. Am wirksamsten ist dieser Faktor in Verbindung mit dem ersten Faktor, der Abnahme der Materiedichte in der Protuberanz. In diesem Fall wird tatsächlich das Eindringen von Elektronen aus der Korona mit hohen Geschwindigkeiten in das Innere der Protuberanz erleichtert.

Was die verhältnismäßig lange Lebensdauer der Protuberanzen gewisser Klassen betrifft, so spielen hier magnetische Kraftlinien offenbar eine bestimmte Rolle, da sie das Eindringen der in der Korona vorhandenen Elektronen (die eine sehr hohe kinetische Temperatur besitzen und dadurch die Protuberanzen ionisieren können) in das Innere der Protuberanzen verhindern.

Wir wenden uns jetzt dem kompliziertesten Problem der Physik der Protuberanzen zu: der Frage nach den Kräften, die die Protuberanzen tragen und in Bewegung versetzen. Bedauerlicherweise ist aber dieses Problem zur Zeit noch wenig erforscht. Trotzdem müssen wir einige Seiten dieses Fragenkomplexes betrachten.

Wir beginnen mit der Frage nach den stützenden Kräften für die Materie in den Protuberanzen. Wir könnten die verhältnismäßig stabile Existenz gewisser Protuberanzen (z. B. der ruhenden Protuberanzen) dadurch zu erklären versuchen, daß wir von der Hypothese ausgehen, die Materie in diesen Protuberanzen befinde sich im Zustand des durch die Gleichung (7.1) beschriebenen hydrostatischen Gleichgewichtes.

Wenn wir die Zustandsgleichung der Gase in der Gestalt

$$p = \frac{R}{\mu} \varrho T \tag{20.24}$$

schreiben und innerhalb der Protuberanzen $T = \text{const}$ annehmen, was infolge

der kleinen mittleren optischen Dicke in genügendem Maße gerechtfertigt ist, erhalten wir die Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht in der Form

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{g\mu}{RT} dh. \tag{20.25}$$

Hierbei haben wir für den Augenblick einen möglichen Einfluß des Strahlungsdruckes vernachlässigt.

Die Integration von (20.25) ergibt

$$\varrho = \varrho_0 e^{\frac{g\mu}{RT}h}, \tag{20.26}$$

wobei ϱ_0 die Materiedichte an der Basis der Protuberanz bedeutet. Hierbei ist zu beachten, daß bei uns h zum Sonnenmittelpunkt hin anwächst.

Wenn wir für T eine Reihe von Werten zwischen festen Grenzen annehmen, können wir das Gesetz (20.26) mit den Ergebnissen vergleichen, die die Beobachtungen für die Dichteänderungen e i n e s beliebigen Elementes in allen Ionisationsstufen ergeben (da alle Elemente in einer Protuberanz eine gleiche Verteilung zeigen). Vergleiche dieser Art ergeben stets, daß die höhenmäßige Ausdehnung der Protuberanzen beträchtlich größer ist, als man nach (20.26) erwarten müßte. Dies bedeutet, daß außer dem Gradienten des Gasdruckes noch irgendwelche andere, vom Sonnenmittelpunkt fortgerichtete Kräfte den Gravitationskräften entgegenwirken. Lange Zeit hat man angenommen, daß diese Kraft im Strahlungsdruck – sowohl im allgemeinen als auch im selektiven – zu suchen sei. Man versuchte mit Hilfe des Strahlungsdruckes nicht nur die beträchtliche Höhe der Protuberanzen, sondern auch ihre Bewegung (z. B. die „Explosion" und die nachfolgende Bewegung der eruptiven Protuberanzen von der Sonne fort) zu erklären. Da diese Frage für das betrachtete Problem von großer Wichtigkeit ist, gehen wir etwas ausführlicher auf sie ein. Wir zeigen, daß der Strahlungsdruck als „Träger" und auf die Bewegung der Protuberanzen offenbar keinen entscheidenden Einfluß ausübt.

Erstens folgt diese Behauptung unmittelbar aus der Berechnung der Größe des Strahlungsdruckes auf die Materie der Protuberanzen. Hierbei interessiert uns im wesentlichen der Strahlungsdruck auf die Atome des häufigsten Elementes, des Wasserstoffs. Wenn der Strahlungsdruck nur bei irgendeinem anderen Atom, z. B. dem Kalzium, von Bedeutung wäre, müßten die Kalziumatome die riesige Zahl der Wasserstoffatome (die die Zahl der Ca-Atome um das $5 \cdot 10^5$-fache übertrifft) mit sich fortreißen (oder als „Träger" für sie dienen); dadurch erweist sich die Gesamtwirkung des Strahlungsdruckes auf die Gesamtmaterie als außerordentlich klein.

Der auf die Wasserstoffatome in den Protuberanzen ausgeübte Strahlungsdruck umfaßt den selektiven Strahlungsdruck in den Frequenzen der zur Lyman-Serie gehörigen Linien und den durch den Frequenzbereich des Lyman-Kontinuums bestimmten Strahlungsdruck.

Mit Hilfe des allgemeinen Ausdruckes (7.5) kann man den Strahlungsdruck auf ein Atom eines beliebigen Elementes leicht berechnen. Wir führen in (7.5)

vermöge (5.20) und (5.22) die Größen n und k_ν ein und erhalten für die an einem Atom angreifende Kraft des Strahlungsdruckes F' den Ausdruck

$$F' = \frac{dp'}{n\,dh} = \frac{\pi \int\limits_0^\infty H_\nu k_\nu \, d\nu}{c}. \tag{20.27}$$

Damit die vorgegebenen Atome sich unter der Einwirkung des Strahlungsdruckes und der entgegengesetzt wirkenden Schwerkraft im Gleichgewicht befinden, ist notwendig, daß die Gleichung

$$m g_\odot = \frac{\pi \int\limits_0^\infty H_\nu k_\nu \, d\nu}{c} \tag{20.28}$$

erfüllt ist, wobei m die Masse eines vorgegebenen Atoms ist.

Wir betrachten zunächst den durch das LYMAN-Kontinuum bewirkten Strahlungsdruck auf die Wasserstoffatome. Wenn wir in (20.28) $m = m_{\mathrm{H}}$ und $H_\nu = B_\nu(T)$ setzen, wobei B_ν durch die Formel (3.11) gegeben wird, und für k_ν die Formel (5.24) benutzen, finden wir leicht, daß (20.28) bei $T \approx 11\,000°$ erfüllt ist. (Die untere Integrationsgrenze in (20.28) ist hierbei gleich ν_1, der Grenzfrequenz der LYMAN-Serie). Um somit in diesem Fall das Gleichgewicht der Protuberanzen erklären zu können, müßten wir voraussetzen, daß die Sonne unmittelbar jenseits der Grenze der LYMAN-Serie anomal stark emittiert. [Wenn jenseits der Grenze der LYMAN-Serie die Strahlung der Sonne unmittelbar von der Oberfläche der Photosphäre ausginge (bei fehlender Chromosphäre), entspräche nach Tabelle 13 die Strahlung einer Temperatur $T \approx 4400°$]. Anomalien dieser Art bestehen tatsächlich (siehe §§ 21 und 22). Sie sind jedoch beträchtlich kleiner und entsprechen einer Temperatur, die etwa gleich 6500° ist, was durch Beobachtungen über der Ionosphäre bestätigt wird. Außerdem würden bei $T = 11\,000°$ in den Protuberanzen hauptsächlich ionisierte Wasserstoffatome vorhanden sein, und dies würde ebenfalls den Strahlungsdruck stark vermindern, weil dieser nur auf neutrale Wasserstoffatome wirkt und letztere alle übrigen und dabei die Hauptmasse der Protonen mit sich forttragen müßten.

Wir wenden uns dem selektiven Strahlungsdruck zu. Die Wirkung der Photosphärenstrahlung allein ist hier völlig unzureichend. In den Linien der BALMER-Serie ist uns der Strom der Photosphärenstrahlung bekannt. Den Strahlungsdruck auf die im zweiten Anregungszustand befindlichen Atome können wir leicht berechnen. Die Anzahl der im zweiten Anregungszustand befindlichen Atome ist jedoch so klein, daß die durch den selektiven Strahlungsdruck in den Frequenzen der Linien der BALMER-Serie einem neutralen Wasserstoffatom mitgeteilte mittlere Beschleunigung im Vergleich mit der Schwerebeschleunigung verschwindend klein ist. Im Bereich der LYMAN-Serie ist die Photosphärenstrahlung dagegen durch die vorhandenen Absorptionslinien dieser Serie stark geschwächt. Eine beträchtliche Verstärkung des auf die Protuberanzen einwirkenden Strahlungsdruckes könnte die Emission in den Linien

$L\alpha$, $L\beta$, ... der Chromosphäre ergeben. Jedoch ist die optische Dicke der Protuberanzen in der Linie $H\alpha$ gewöhnlich größer oder vergleichbar mit Eins. Letzteres bedeutet, daß die optische Dicke der Protuberanzen in den Linien $L\alpha$, $L\beta$, ... außerordentlich groß ist. Dann ist aber der Strom der Chromosphärenstrahlung im Innern der Protuberanzen sehr klein, und dadurch wird die Höhe der Protuberanzen wieder sehr klein.

Außer diesen Schwierigkeiten, die sich aus den Rechnungen ergeben, liegt noch eine Reihe von Tatsachen vor, die sich aus den Beobachtungen ergeben und gegen die Hypothese eines großen Strahlungsdruckes in den Protuberanzen sprechen. Wir zählen kurz einige dieser Tatsachen auf.

1. Das Ausschleudern von eruptiven Protuberanzen tritt in Gebieten auf, in denen gewöhnlich weder in der Photosphäre noch in der Chromosphäre Störungen beobachtet werden, während man erwarten müßte – wenn das Ausschleudern unter der Einwirkung des Strahlungsdruckes stünde –, daß dies hauptsächlich an Stellen erhöhter Intensität der ultravioletten Strahlung, d. h. über den Fackeln (Flocculi) und überhaupt über den aktiven Gebieten der Sonne, auftritt (wir sprechen hier nicht von den mit den chromosphärischen Eruptionen in Verbindung stehenden Protuberanzen). Dagegen beobachtet man in den Protuberanzen über Fackeln, in denen Sonnenflecke auftreten, am häufigsten absteigende (!) Bewegungen der Materie (bei den meisten Protuberanzen der Sonnenflecke).

2. Die Entstehung der dichteren (auf dem Hintergrund des dunkleren Gebietes der Korona) leuchtenden Materie in den koronalen Fleckprotuberanzen, in den Koronawolken usw., und ihre Bewegung nach unten auf die Chromosphäre zu hat mit der Hypothese von der Entstehung der Protuberanzen aus der Chromosphäre infolge des Strahlungsdruckes nichts gemeinsam. Es ist überaus schwierig, anzunehmen, daß bei der Entstehung der Koronawolken die Schwerkraft und die vom Strahlungsdruck herrührenden Kräfte genau im Gleichgewicht stehen.[1] Es ist klar, daß der Mechanismus der Entstehung einer Koronawolke in keinerlei Beziehung zum Strahlungsdruck steht.

Außer den erwähnten Schwierigkeiten könnte man noch zahlreiche andere angeben. Außerdem vermag die Hypothese vom Strahlungsdruck eine Reihe von spezifischen Eigenschaften der Bewegung und des Verhaltens der Protuberanzen nicht zu erklären. Zu diesen Eigenschaften gehören:

1. Die Bewegung von Materieklümpchen und Strömen in den Protuberanzen gewisser Klassen längs anscheinend vollkommen „fixierter" gekrümmter oder gerader Bahnen;

2. die Existenz von Anziehungszentren in der Chromosphäre (oder unter ihr);

3. der Austausch von Materie zwischen zwei in Wechselwirkung stehenden Protuberanzen;

4. die Umwandlung von Protuberanzen einer Klasse in die einer anderen;

---

[1]) Wir erinnern, daß eine Koronawolke bei ihrem Auftreten stets in derselben Höhe bleibt.

5. der Verdichtungsprozeß der leuchtenden Materie im Raum der Korona;

6. das Herausschleudern und die darauf erfolgende Rückkehr von leuchtender Materie auf – was besonders wichtig ist – derselben Bahn im Falle der rückkehrenden Protuberanzen usw.

Wie sind die aufgezählten und die übrigen Eigenschaften der Protuberanzen zu erklären? Zahlreiche Gründe sprechen dafür, daß diese Eigenschaften in dieser oder jener Form von elektromagnetischen Feldern bestimmt werden, die in der Sonnenatmosphäre auftreten (siehe § 18). Diese Felder müssen das Gleichgewicht, die Bewegung der Materie in den Protuberanzen längs gekrümmter Bahnen, die Existenz der Anziehungszentren, die Kondensationsprozesse der Koronamaterie usw. bestimmen.

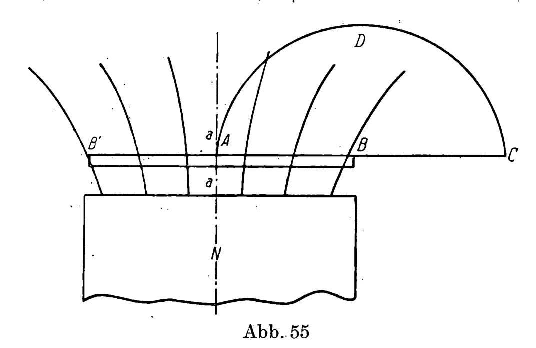


Abb. 55

Diese allgemeinen Erwägungen sind allerdings bisher noch sehr wenig ausgearbeitet worden. Doch besteht über das Auftreten von elektromagnetischen Feldern in der Sonnenatmosphäre und ihren großen Einfluß auf die Bewegung der ionisierten Materie nicht der geringste Zweifel. Überhaupt ist die Berücksichtigung der elektromagnetischen Felder ein völlig neues und zugleich äußerst wichtiges Kapitel der Sonnenphysik.

Bisher besitzen wir noch keine durchentwickelte Theorie der Protuberanzen. Aus diesem Grunde behandeln wir nur eines der möglichen Modelle.

Alfvén geht von der sogenannten *unipolaren Induktion* aus. Diese Erscheinung kann man sich an einem einfachen Modell (Abb. 55) klarmachen.

Die leitende Scheibe BB' rotiert in einem Magnetfeld um die parallel zum Feld gerichtete Achse aa. Nach (18.36) erzeugt die Bewegung der Materie in ihr das Feld $\mathfrak{E}' = \frac{1}{c}\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}$, das in die Richtung des Radius der Scheibe zeigt. Die Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und B ist gleich

$$V = \frac{1}{c}\int\limits_A^B (\mathfrak{v} \times \mathfrak{H})\,d\mathfrak{s}.$$

Wenn man diese Punkte durch die leitende Kontur $ADCB$ verbindet, fließt in dieser ein Strom. Ein ähnlicher Mechanismus kann auch auf der Sonne existieren. Bekanntlich beobachtet man über den Sonnenflecken gewöhnlich eine Bewegung der Gasmassen (Evershed-Effekt), wobei die Corioliskraft eine

tangentiale Geschwindigkeitskomponente hervorruft. Diese Bewegung, die unter der Einwirkung von hydrodynamischen Kräften vonstatten geht, ruft eine Potentialdifferenz hervor. Als Kontur, die die Punkte A und B miteinander verbindet, dient die magnetische Kraftlinie ADC (weil die Leitfähigkeit der Chromosphäre quer durch das Magnetfeld wegen der geringen Dichte praktisch gleich Null ist) und der Abschnitt CB der Photosphäre, wo die Leitfähigkeit quer zu H wegen der großen Materiedichte groß genug ist. Wenn wir $v = 10^4$ cm/sec, $H = 200$ Oersted und $AB = 5 \cdot 10^9$ cm annehmen, ist $V = 10^8$ V. Ein Teil der Spannung kann eine Entladung in den Schichten der Photosphäre und der Rest einen Strom in der Chromosphäre hervorrufen.

Alfvén nimmt an, daß ein ähnlicher Mechanismus die Entstehung der schnell veränderlichen Protuberanzen erklären kann, deren Bewegung in einem Fleck endet (z. B. die koronalen Fleckprotuberanzen).

Die Entstehung einer Protuberanz stellt sich Alfvén folgendermaßen vor: Der längs einer Kraftlinie verlaufende Strom erzeugt ein eigenes Magnetfeld in Gestalt konzentrischer Ringe. Bekanntlich versuchen sich die magnetischen Kraftlinien stets zusammenzuziehen. Mit anderen Worten, die Wechselwirkung von parallelen Strömen führt dazu, daß sich die Materie, aus der die Korona zusammengesetzt ist, auf die Achse des Stromes zusammenzieht. Die Kompression ionisierter Materie verstärkt die Strahlung und führt zur Abkühlung. Dichte Klümpchen, die sich gebildet haben, bewegen sich längs der Kraftlinien unter der Einwirkung der Schwerkraft zur Photosphäre. Außerdem kann die Bewegung durch einen Druckgradienten hervorgerufen werden, der durch eine ungleichmäßige Kompression an den verschiedenen Teilen einer Kraftlinie entstanden ist.

Bei quantitativen Berechnungen ist darauf zu achten, daß die längs der Entladungsachse fließende Stromdichte nicht durch den Ohmschen, sondern durch den induktiven Widerstand bestimmt wird, da die Selbstinduktion von derart ausgedehnten Konturen sehr groß ist.

Wir bemerken, daß man die hydrodynamischen Kräfte nicht vernachlässigen darf – wenn sie auch die Bewegungen der Protuberanzen nicht erklären können –, weil sie den Bewegungscharakter bestimmen und sekundäre Erscheinungen hervorrufen. Es ist möglich, daß die regellosen Geschwindigkeiten in den ruhenden Protuberanzen und in den Koronawolken gerade durch hydrodynamische Kräfte hervorgerufen werden.

Abschließend betonen wir, daß außer der theoretischen Bearbeitung der beobachteten Erscheinungen, die bei der Bewegung und dem Gleichgewicht der Protuberanzen auftreten, noch eine überaus umfangreiche Beobachtungsarbeit zu leisten ist.

So ist z. B. die Frage zu klären, in welchem Maße die auf den photographischen Platten registrierten Bewegungen leuchtender Materie reale Ortsveränderungen sind und nicht eine einfache Verschiebung der Kondensationsbereiche und folglich der Helligkeit in der Korona darstellen. Dieses Problem ist auf die Weise zu untersuchen, daß man gleichzeitig die Protuberanzen photographiert und ihre Radialgeschwindigkeiten bestimmt. Aus vorliegenden Untersuchungen scheint hervorzugehen, daß wir es in den meisten Fällen mit realen

Bewegungen der Materie zu tun haben. Bis jetzt sind aber sehr wenige Untersuchungen dieser Art angestellt worden.

Es ist ferner mit allen Mitteln der Zusammenhang zwischen der Bewegung der Protuberanzen und den Bedingungen ihres Leuchtens auf analoge Art zu untersuchen, wie es in der oben zitierten Untersuchung von A. B. SEWERNY geschehen ist.

Schließlich ist es von außerordentlichem Interesse, aufzuklären, ob irgendein sichtbarer Zusammenhang zwischen den Protuberanzen und der unter ihnen gelegenen Chromosphäre (oder Photosphäre) besteht. So ist z. B. bekannt, daß auf den Hα-Spektroheliogrammen die Filamente eine helle Basis (in Gestalt eines Saumes) mit einer Breite von einigen Bogensekunden besitzen, die unmittelbar an das Filament angrenzt und über ihre gesamte Länge zu sehen ist.

§ 21. Die Chromosphäre. Die Flocculi. Die chromosphärischen Eruptionen

1. Die beobachtungsmäßige Untersuchung der Verteilung der emittierenden Atome als Funktion der Höhe

Die Chromosphäre ist die direkte Fortsetzung der äußersten Schichten der Sonnenphotosphäre, die man bedingt als umkehrende Schicht bezeichnet.

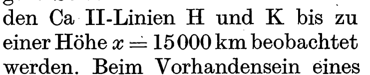
Als *Basis der Chromosphäre* bezeichnet man dasjenige Niveau der Sonnenatmosphäre, wo für den Beobachter, der den Rand der Sonnenscheibe betrachtet, das gewöhnliche Sonnenspektrum mit den Absorptionslinien in ein Emissionslinienspektrum übergeht, das dem Linienspektrum der Protuberanzen ähnelt.

Unterhalb der Basis der Chromosphäre ist die optische Dicke der Sonnengase längs der Visierrichtung in den Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums größer als Eins, wobei hier $I_\nu\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \approx B_\nu(T_0)$ mit T_0 als Grenztemperatur der Sonnenphotosphäre. In der Basis der Chromosphäre ist die optische Dicke längs der Visierrichtung von der Größenordnung Eins.

Die Chromosphäre selbst ist höher gelegen. Sie ist dadurch charakterisiert, daß sie in den Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums durchsichtig ist. Dies ist die Grundeigenschaft der Chromosphäre, die auch für die hellen Linien ihres Spektrums maßgebend ist. Erhitzte Gase, die in den Frequenzen des kontinuierlichen Spektrums durchsichtig sind, müssen ein Linienspektrum ergeben (wenn sich die Gase natürlich nicht auf einen helleren Hintergrund projizieren). Das Emissionslinienspektrum der Chromosphäre ist qualitativ dem Protuberanzenspektrum ähnlich. Auf Grund der relativen Intensitäten seiner überaus zahlreichen Linien entspricht das Chromosphärenspektrum dem Absorptionsspektrum eines Sternes von früherem Typ als die Sonne (dG3). Im Spektrum der Chromosphäre sind ebenso wie in den Spektren der Protuberanzen die Linien von He I und die He II-Linie 4686 Å vorhanden. Folglich sind

die Chromosphärengase besonderen Bedingungen unterworfen, die sich von den in der Sonnenphotosphäre herrschenden Bedingungen unterscheiden.

Das Studium dieser Bedingungen ist eine der Hauptaufgaben der Physik der Sonnenchromosphäre. Eine weitere Aufgabe ist die Untersuchung des Gesetzes der Änderung der Materiedichte in der Chromosphäre mit der Höhe x (von der Basis der Chromosphäre aus gerechnet). Im Gegensatz zu der Sonnenphotosphäre können wir dieses Gesetz hier unmittelbar aus den Beobachtungen ermitteln (das gleiche kann man auch in bezug auf die Korona durchführen). Dies ist aus dem Grunde von besonderer Wichtigkeit, weil – wie wir sehen werden – die Gase in der Sonnenchromosphäre eine völlig anomale Verteilung zeigen. So kann z. B. die Emission in den Ca II-Linien H und K bis zu einer Höhe $x = 15000$ km beobachtet werden. Beim Vorhandensein eines Gravitationsgleichgewichtes, das durch die Formel (20.26) mit $T = T_0 \approx 4630°$ beschrieben wird, müßte die Materiedichte in der Entfernung 15000 km aber praktisch auf Null abnehmen, und folglich wäre es unmöglich, eine Ca II-Emission in dieser Höhe festzustellen.



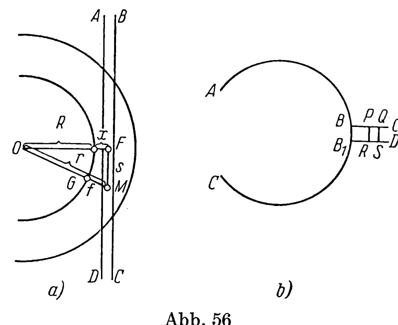


Abb. 56

Im folgenden beschäftigen wir uns mit dem Gesetz der Dichteänderung der Chromosphärengase mit der Höhe. Es sei I_{ik} oder einfach I die von 1 cm² der Projektion der Chromosphäre auf das Himmelsgewölbe in 1 sec und pro Raumwinkeleinheit emittierte Energie in der Linie, die dem Übergang $k \to i$ entspricht. Diese Energie wird durch Übergänge $k \to i$ bestimmt, die in dem Zylinder *ABCD* vor sich gehen (siehe Abb. 56a). Er liegt in Richtung des Sehstrahls in der Höhe x über der Basis der Chromosphäre und besitzt den Querschnitt 1 cm². Offenbar ist diese Energie die Gesamtintensität in der gesamten Linie, d. h. das über alle Frequenzen im Innern der Linie genommene Integral $\int I_\nu d\nu$. Es sei ferner j' der auf 1 cm³ bezogene Koeffizient der Gesamtemission. Die Aufgabe besteht darin, aus dem beobachtungsmäßig gefundenen Gesetz, das die Änderung von $I(x)$ mit x angibt, die Abhängigkeit der Größe $j'(x)$ von x oder $j'(r)$ von r, wobei r der Abstand des betrachteten Punktes vom Sonnenmittelpunkt ist, zu finden, d. h., von der beobachteten, aus der Flächeneinheit der Projektion der Chromosphäre austretenden Strahlung auf die von dem Einheitsvolumen ausgehende Strahlung überzugehen. Wenn wir $j'(r)$ gefunden haben, können wir auch das Gesetz für die Änderung der Zahl der emittierenden Atome mit x oder r ermitteln.

Um die gestellte Aufgabe zu lösen, machen wir folgende Voraussetzung: Wir nehmen an, daß die Chromosphäre kugelsymmetrisch in bezug auf den Sonnenmittelpunkt ist. Ferner nehmen wir an, daß in den Emissionslinien keine

Selbstabsorption auftritt. (Von der Berücksichtigung der Selbstabsorption wird später die Rede sein.)

Es sei ABB_1C die momentane Lage des Mondrandes (Abb. 56b), der allmählich die Sonne bedeckt. Wir betrachten 1 cm des Mondrandes BB_1 und bezeichnen die Strahlungsenergie aller Atome, die sich auf den nach einer Seite ins Unendliche erstreckenden Streifen CBB_1D projizieren, in der betrachteten Spektrallinie mit $E(x)$, wobei x die Höhe der Projektion des Mondrandes über der Basis der Chromosphäre ist. Diese Funktion $E(x)$ ermittelt man mit Hilfe photometrischer Messungen von Linienintensitäten zu verschiedenen Zeitpunkten während einer Sonnenfinsternis, d. h. bei verschiedenen Höhen des Mondrandes über der Basis der Chromosphäre (die Spektralaufnahmen werden mit breitem Spalt ausgeführt). Offenbar gewinnt man die oben eingeführte Gesamtintensität $I(x)$, die von der auf der Abb. 56b dargestellten Einheitsfläche $PQRS$ der Projektion bestimmt wird, durch Differentiation aus $E(x)$

$$I(x) = -\frac{\partial E(x)}{\partial x}. \tag{21.1}$$

Wir führen die längs des Zylinders $ABCD$ gezählte Koordinate s ein (in Abb. 56a ist $s = FM$) und erhalten für $I(x)$ im Falle eines Mediums, das für seine Eigenstrahlung durchlässig ist, den Ausdruck

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} j'(r)\, ds. \tag{21.2}$$

Andererseits ist

$$\left.\begin{aligned} s &= \sqrt{r^2 - (R + x)^2}, \\ ds &= \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2 - (R + x)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{21.3}$$

Folglich ist

$$I(x) = 2\int_{R+x}^{\infty} \frac{j'(r)\, r\, dr}{\sqrt{r^2 - (R + x)^2}}. \tag{21.4}$$

An Stelle von r führen wir die Höhe f über der Basis der Chromosphäre ein (in Abb. 56a ist $f = GM$). Dann ist

$$I(x) = 2\int_{x}^{\infty} \frac{j'(f)\,(R + f)\, df}{\sqrt{(R + f)^2 - (R + x)^2}}. \tag{21.5}$$

Die Chromosphäre ist ein Gebilde von verhältnismäßig geringer Ausdehnung, so daß für $x > 15000$ km j' praktisch gleich Null ist. Daher können wir im Innern der gesamten Chromosphäre f und x gegenüber R vernachlässigen und

finden als Ergebnis

$$I(x) = \sqrt{2R}\int_x^\infty \frac{j'(f)\,df}{\sqrt{f-x}}. \tag{21.6}$$

Dies ist eine ABELsche Gleichung; ihre Lösung wird durch die Gleichung

$$j'(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2R}}\frac{d}{dx}\int_x^\infty \frac{I(f)\,df}{\sqrt{f-x}} \tag{21.7}$$

gegeben.

Die Gleichungen (21.1) und (21.7) gestatten es, aus der Funktion $I(x)$ die Funktion $j'(x)$ zu ermitteln.

Die Reduktion der Beobachtungen zeigt, daß $E(x)$ gewöhnlich in der Gestalt einer Exponentialfunktion

$$E(x) = Ae^{-\beta x} \tag{21.8}$$

oder in Gestalt einer Summe

$$E(x) = A_1 e^{-\beta_1 x} + A_2 e^{-\beta_2 x} \tag{21.9}$$

dargestellt werden kann.

Bisweilen ist auf der rechten Seite der Gleichung (21.9) ein drittes Glied von analoger Bauart hinzuzufügen. Da sich die Approximation (21.8) in den meisten Fällen als genau genug erweist, betrachten wir sie im folgenden. Führen wir (21.8) in (21.1) ein, so erhalten wir

$$I(x) = A\beta e^{-\beta x}. \tag{21.10}$$

Hierauf setzen wir (21.10) in (21.7) ein. Dann finden wir

$$j'(x) = \frac{A\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi R}}\, e^{-\beta x} \tag{21.11}$$

und ebenfalls

$$j'(0) = \frac{A\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi R}}. \tag{21.12}$$

In Tabelle 14 sind die Werte der in die Formel (21.11) eingehenden Konstante β und ebenfalls lg A aufgeführt. Die Angaben sind von W. P. WJASANIZYN aus Spektrogrammen der Finsternis vom Jahre 1941 abgeleitet [36].

Um aus der Tabelle 14 geeignete Folgerungen über die Dichteverteilung der Elemente mit der Höhe ziehen zu können, gehen wir zunächst von j' auf die Zahl der emittierenden Atome in 1 cm³ über. Wenn in 1 cm³ n_k Atome, die eine Emission in einer vorgegebenen Linie mit dem Übergang $k \to i$ bewirken, enthalten sind, gilt wie in (20.1)

$$j' = \frac{n_k A_{ki} h\nu_{ik}}{4\pi}. \tag{21.13}$$

Tabelle 14

Linie	$\beta \cdot 10^{-8}$	lg A	Linie	$\beta \cdot 10^{-8}$	lg A
H, H α	0,90	16,17	Ca, 4227	1,33	14,08
H β	1,20	15,71	Ca II, 3969	0,92	15,76
H γ	1,30	15,48	3934	0,85	15,76
H δ	1,32	15,32	Ti II, 4572	2,60	13,56
H ε	1,30	15,15	4550	1,58	13,95
H 8	1,42	15,07	4564	1,63	13,33
H 9	1,37	14,75	Mn, 4034,5 }		
H 10	1,45	14,60	4033 }	1,96	13,52
H 11	1,46	14,43	4031 }		
H 12	1,47	14,45	Fe, 4384	0,91	13,04
H 13	1,52	14,44	4064	1,28	13,30
H 14	1,60	14,27	4046	1,14	13,53
H 15	1,55	14,15	3860	1,36	14,14
H 16	1,68	14,08	3856	1,69	13,24
H 17	1,70	13,75	Fe II, 5018	1,32	13,55
H 18	2,04	13,60	4924	1,34	13,53
He, 5016	1,69	13,69	4584	1,23	13,30
4922	1,32	13,49	4233	1,54	13,70
4713	1,96	14,33	4523	1,37	12,94
5876	0,88	14,90	Sr II, 4216	1,58	13,90
4472	1,11	14,05	4078	1,60	14,55
4026	0,75	13,48	Ba II, 4934	(2,05)	(14,58)
Mg, 5184	1,64	14,10			
5173 } 5167 }	1,22	13,98			

Folglich erhalten wir nach (21.13) und (21.11)

$$n_k = \frac{4\pi A \beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi R}\, A_{ki} h \nu_{ik}}\, e^{-\beta x}. \tag{21.14}$$

Somit können wir, wenn wir aus den Beobachtungen β und A ermittelt haben und A_{ki} kennen, die räumliche Konzentration der Atome im oberen Anregungszustand als Funktion der Höhe x in der Chromosphäre berechnen.

Unser Hauptinteresse gilt jedoch nicht dem Verhalten der Größe $n_k\ (x)$, die die Konzentration der Atome im k-ten Anregungszustand charakterisiert, sondern dem Verhalten der Funktion $n(x)$, die für die Konzentration aller Atome (oder Ionen) eines vorgegebenen Elementes, in welchem Anregungszustand sie sich auch befinden, charakteristisch ist. Weil sich gewöhnlich die meisten Atome (oder Ionen) eines vorgegebenen Elementes im Grundzustand befinden, ist es von Interesse, sich über das Verhalten der Funktion $n_1(x)$, die die Konzentration der im Grundzustand befindlichen Atome angibt, Klarheit zu verschaffen.

Wenn das Verhältnis $n_k(x) : n_1(x)$, d. h. der Grad der Anregung in der Chromosphäre, nicht mit der Höhe x veränderlich wäre, würde das Verhalten der Funktion $n_k(x)$ auch für das Verhalten der Funktion $n_1(x)$ maßgebend sein, und wir würden die wirkliche Verteilung der Atome eines vorgegebenen Elementes mit der Höhe kennen.

Auf den ersten Blick kann man erkennen, daß die Voraussetzung der Konstanz des Verhältnisses $n_k(x) : n_1(x)$ für die Chromosphäre begründet ist. Betrachten wir einen beliebigen Übergang $k \to i$, z. B. den Übergang $k \to 1$. Eine Selbstabsorption sei in der betrachteten Linie nicht vorhanden. Wir setzen ferner voraus, daß die Atome vom i-ten Zustand in den k-ten Zustand durch von unten in die Chromosphäre gelangende photosphärische Strahlung, die natürlich durch die entsprechende, beim Übergang $i \to k$ entstehende Absorptionslinie geschwächt wird, angeregt werden. Dann ist wegen der Durchsichtigkeit der Chromosphäre innerhalb der betrachteten Linie die Dichte ϱ_{ik} der anregenden Strahlung im Bereich der gesamten Chromosphäre praktisch konstant. Folglich wird sich auch das Verhältnis $n_k(x) : n_1(x)$ nicht merklich ändern.

An dieser Stelle entstehen jedoch einige Schwierigkeiten, die wir zum Teil schon im vorangehenden Paragraphen betrachtet haben. Erstens sind einige Emissionslinien aus dem Chromosphärenspektrum nicht frei von Selbstabsorption. Zweitens spricht die Existenz der He I- und He II-Linien in Chromosphärenspektren (und außerdem zahlreiche andere Umstände) dafür, daß wir es mit anomalen Anregungsbedingungen zu tun haben, die sich mit der Höhe ändern können. Insbesondere ist es möglich, daß in der äußeren Chromosphäre, wo die kinetische Temperatur anomal hoch ist (siehe S. 368), Anregungsprozesse durch Elektronen eine wesentliche Rolle spielen. Immerhin hat man Grund zu der Annahme, daß Anomalien in den Anregungsbedingungen bei hinreichend hohen Anregungspotentialen, die größer als 10 eV sind, auftreten.

Gleichzeitig kann man annehmen (siehe S. 372/373), daß bei den meisten Linien die Anregung der entsprechenden Niveaus durch Strahlung von annähernd konstanter Dichte ϱ_{ik} bewirkt wird; in diesem Fall ist das Verhältnis $n_k : n_1$ ebenfalls näherungsweise konstant.

Bei den Helium- und Wasserstofflinien ist die Situation unbestimmter, jedoch kann sich anscheinend auch hier $n_k : n_1$ in der Chromosphäre nicht mehr als eine Größenordnung ändern. Für das genauere Studium der Fälle mit $\varepsilon_k > 10$ eV ist es erforderlich, die Frage des Anregungsmechanismus der Atome in der Chromosphäre zu klären.

2. Die Selbstabsorption. Das Gesetz der Änderung der Materiedichte mit der Höhe

Das Studium der Selbstabsorption in einigen Linien erfordert ebenfalls eine besondere Beachtung. Die Selbstabsorption verzerrt das Gesetz der Änderung von $j'(x)$ und verringert ebenfalls fiktiv n_k. Im Hinblick hierauf behandeln wir kurz das gegebene Problem.

Wir betrachten wieder den Zylinder $ABCD$ (Abb. 56a), der in Richtung des Sehstrahls orientiert und in der Höhe x über der Basis der Chromosphäre gelegen ist. Es sei N_i die Anzahl der Atome, die in diesem Zylinder enthalten sind und dem unteren, i-ten Niveau der emittierenden Atome mit den Übergängen $k \to i$ entsprechen. Dann können wir von der Gleichung (20.9) Gebrauch machen. Wir schreiben sie folgendermaßen um:

$$\lg R_{ik} = \lg I_{ik} - \lg \overline{P}_\nu = \lg \int (1 - e^{-s_\nu N_i})\, d\nu. \tag{21.15}$$

Wenn wir für N_i verschiedene kontinuierlich anwachsende Größen vorgeben, können wir für diese N_i das Integral auf der rechten Seite von (21.15) ausrechnen.[1]) Als Ergebnis erhalten wir eine „Wachstumskurve", die eine Beziehung zwischen N_i und R_{ik} herstellt. In dem Bereich der Kurve, wo N_i klein ist, $X_0 = N_i s_{\nu_0} \ll 1$, ist R_{ik} proportional $N_i f_{ik}$. Im Übergangsgebiet kann man eine Interpolationsformel benutzen, in der R_{ik} proportional $\sqrt{\ln N_i f_{ik}}$ ist; im letzten Bereich, wo N_i (und X_0) sehr groß ist, ist R_{ik} proportional $\sqrt{N_i f_{ik}}$.

Wir setzen jetzt voraus, daß ein Gesetz von der Gestalt (21.14) gilt:

$$n_i = n_i^0 e^{-\beta f}. \tag{21.16}$$

Hier ist n_i^0 die Größe n_i in der Basis der Chromosphäre, wobei wir an Stelle von x im Exponenten f eingeführt haben.

Wir entnehmen der Abb. 56a, daß

$$f = \sqrt{(R + x)^2 + s^2} - R \approx x + \frac{1}{2}\frac{s^2}{R}, \tag{21.17}$$

und erhalten für N_i:

$$N_i = \int_{-\infty}^{+\infty} n_i ds = \sqrt{\frac{2\pi R}{\beta}}\, n_i^0 e^{-\beta x} = N_i^0 e^{-\beta x}, \tag{21.18}$$

wobei

$$N_i^0 = \sqrt{\frac{2\pi R}{\beta}}\, n_i^0 \tag{21.19}$$

die Zahl N_i in der Basis der Chromosphäre ist.

Somit besitzt im Falle der Gültigkeit der Formel (21.16) das Gesetz der Änderung der Größe (21.18) die gleiche exponentielle Gestalt.

Unter Benutzung von (21.18) können wir aus der theoretischen Abhängigkeit zwischen R_{ik} und N_i die Abhängigkeit zwischen R_{ik} und x ermitteln, wobei

---

[1]) Über eine ausführliche Darstellung von analogen Rechnungen siehe [2, S. 182–185]. Hierbei ist angenommen, daß der Absorptionskoeffizient durch die Strahlungsdämpfung und den Doppler-Effekt bestimmt wird. Den Einfluß der Stoßdämpfung können wir wegen der geringen Dichte der Chromosphäre vernachlässigen.

die Form der graphischen Darstellung durch den Parameter β bestimmt wird. Mit anderen Worten, wir haben eine Schar theoretischer „Wachstumskurven", die vom Parameter β abhängen. Dieser Parameter spielt die gleiche Rolle wie der Parameter Z in der Theorie der Wachstumskurven für die Absorptionslinien (siehe § 12).

Wir setzen jetzt voraus, daß $\overline{P}_\nu$ in der ganzen Chromosphäre konstant ist. Dann können wir, nachdem I_{ik} für verschiedene Höhen x aus den Beobachtungen bestimmt ist, eine empirische Wachstumskurve konstruieren (die lg I_{ik} mit lg x in Beziehung setzt), deren Normierung auf der lg R_{ik}-Achse genau bis auf den (einstweilen noch unbekannten) Summanden lg $\overline{P}_\nu$ festgelegt ist. Nachdem wir die empirische Wachstumskurve ermittelt haben, versuchen wir, die beste Übereinstimmung mit einer zu der Schar der theoretischen Wachstumskurven gehörenden Kurve zu erzielen. Hierdurch werden der Parameter β und N_i^0 und $\overline{P}_\nu$ bestimmt. Diese Methode zur Bestimmung von β, N_i^0 und $\overline{P}_\nu$ ist völlig analog der Auffindung der entsprechenden Z, N_i und v_0 in der Theorie der Wachstumskurven.

Die auf die angegebene Weise ermittelten Größen β und N_i^0 sind schon von dem Einfluß der Selbstabsorption befreit. Wir können sie dazu benutzen, um nach Formel (21.19) die Zahl n_i^0 der Atome in 1 cm³ auf dem der Basis der Chromosphäre entsprechenden Niveau zu bestimmen.

Die grundlegende Voraussetzung für die vorliegende Methode ist die Konstanz der Anregungsfunktion $\overline{P}_\nu$ in der gesamten Chromosphäre. Wenn wir näherungsweise den Verlauf der Abhängigkeit der Funktion P_ν von x kennen würden, gewänne die Methode in beträchtlichem Maße an Strenge. Bei der Anwendung der betrachteten Methode muß man ebenfalls die Änderung der Turbulenzgeschwindigkeit v_t in der Chromosphäre mit der Höhe berücksichtigen. Endlich muß man beachten, daß das Gesetz (21.16) in einigen Fällen nur sehr angenähert gültig ist.

Mit Hilfe der beschriebenen Methode hat man festgestellt, daß die Zahl der im zweiten Anregungszustand über 1 cm² der Basis der Chromosphäre befindlichen Atome gleich $2 \cdot 10^{12}$ beträgt[1]), wenn auch diese Zahl anscheinend zu groß ist, da die Zunahme der Turbulenzgeschwindigkeit mit der Höhe (siehe S. 374) nicht berücksichtigt wurde.

Die Berücksichtigung der Selbstabsorption ändert gewöhnlich die direkt aus den Beobachtungen ermittelten β nur unbedeutend. Diese Änderungen sind bei den stärksten Linien des Chromosphärenspektrums, den Ca II-Linien H und K, am größten. In diesem Fall vergrößert sich das in Tabelle 14 stehende β etwa um das Doppelte. Meistens ist die Korrektion wegen der „Selbstabsorption" jedoch kleiner. Unter Beachtung unserer Ausführungen und der an früherer Stelle von uns gemachten Bemerkungen über die näherungsweise Konstanz des Verhältnisses $n_k : n_1$ verweisen wir auf die Angaben der Tabelle 14 und beachten hierbei die Formel (21.14). Wir vergleichen die in dieser Tabelle

---

[1]) G. CILLIÉ and D. MENZEL, The physical state of the solar chromosphere. Harvard Circ. 410, 1935.

stehenden β mit den β_g, die sich aus der Anwendung der Formel des hydrostatischen Gleichgewichtes (20.26) ergeben. Letztere schreiben wir folgendermaßen:

$$n(x) = n^0 e^{-\frac{g\mu}{RT}x} = n^0 e^{-\beta_g x}. \tag{21.20}$$

Wenn wir für die Temperatur der Chromosphäre die Grenztemperatur der Sonne $T = 4630°$ einsetzen, finden wir, daß für Kalzium $\beta_g = 284{,}3 \cdot 10^{-8}$ und für Wasserstoff $\beta_g = 7{,}15 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}^{-1}$ gilt.

Somit sind die aus den Beobachtungen ermittelten β (Tabelle 14) beträchtlich kleiner als die β_g. Besonders tritt dies bei dem Vergleich von β und β_g für Kalzium hervor, wo $\beta_g \approx 190 \cdot \beta$ ist (β ist mit Berücksichtigung der Selbstabsorption für Ca von der Größenordnung $1{,}50 \cdot 10^{-8}$).

Diesen Sachverhalt darf man jedoch nicht als einen Einfluß der Ionisation, die mit der Höhe zunimmt, erklären (d. h. dadurch, daß die Verzögerung der Dichteabnahme der Kalziumionen mit der Höhe auf Kosten einer schnelleren prozentualen Zunahme der Ionen gegenüber den neutralen Atomen vonstatten geht). Aus den Intensitäten der Resonanzlinien kann man schließen, daß der Prozentsatz der neutralen Ca-Atome gegenüber dem Prozentsatz der Ionen in der Chromosphäre verschwindend klein ist und daß daher die Zunahme der Zahl der Ionen auf Kosten der Zahl der neutralen Atome sich nicht merklich auf die Ionendichte auswirken kann. Die Abnahme der CaII-Atome mit der Höhe infolge Ionisation kann aber nur den beobachteten Wert von β erhöhen. Das gleiche gilt auch für Wasserstoff. Allerdings liegen Gründe für die Annahme vor, daß anomale Strahlungsbedingungen, insbesondere die Zunahme der Intensität durch Rekombinationen mit der Höhe infolge zunehmender Ionisation des Wasserstoffs, eine anomale Verteilung des Wasserstoffs (kleines β) hervorrufen können. Jedoch muß die chemische Zusammensetzung aller Gebilde der Sonnenatmosphäre gleich sein, da in ihr durchmischende turbulente Strömungen vorhanden sind (siehe § 20). Doch dann muß β für den Wasserstoff unter Berücksichtigung aller (neutralen und ionisierten) H-Atome genauso groß sein wie für die anderen Elemente und besonders für Ca. Auch in diesem Fall ist β für H beträchtlich kleiner als β_g; es ist gleich $7{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}^{-1}$.

Folglich wirken in der Chromosphäre außer den gewöhnlichen elastischen Kräften eines erwärmten Gases noch zusätzliche Kräfte der Schwerkraft entgegen. Bevor wir uns jedoch mit einer möglichen Deutung dieser Tatsache beschäftigen, machen wir uns noch mit anderen für den physikalischen Zustand der chromosphärischen Gase charakteristischen Daten bekannt.

3. Die Elektronenkonzentration. Die Elektronentemperatur

Zunächst wollen wir die Frage nach der Elektronenkonzentration n_e untersuchen. Man kann n_e erstens aus der Formel (15.1) bestimmen. Auf das bei der Anwendung von (15.1) zu benutzende T für die verschiedenen Schichten der Chromosphäre werden wir später eingehen. Zweitens kann man unter der

Voraussetzung, daß auch in der Chromosphäre die meisten freien Elektronen durch die Ionisation des Wasserstoffs entstehen, n_e durch Formel (20.16) bestimmen. Daß diese Voraussetzung begründet ist, siehe S. 369/370.

Drittens können wir n_e auch aus der Formel (20.22) bestimmen. Aus dieser Formel folgt, daß der auf 1 cm³ bezogene Emissionskoeffizient j'_ν für das Rekombinationsleuchten gleich

$$j'_\nu = n_e^2 \frac{2^6 \pi^2 h e^6 R}{3\sqrt{3}\, c^3 \,(2\pi m_e k T_\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \frac{g'}{k^3} e^{-\frac{h\nu - \chi_{0,k}}{k T_\varepsilon}} \tag{21.21}$$

ist.

Wenn wir aus den Beobachtungen mit Hilfe der Formel (21.11) $j'_\nu(x)$ für das Balmer-Kontinuum (oder Paschen-Kontinuum) bestimmt haben, können wir nach (21.21) n_e bei bekanntem T_e ermitteln. (Mit dieser Methode kann man n_e auch für Protuberanzen bestimmen. Zu diesem Zweck muß s, die Dicke der Protuberanz in der vorgegebenen Richtung, aus Formel (20.22) bekannt sein.) Am besten führt man dies für Frequenzen aus, die in der Nähe der Seriengrenze liegen, wo $h\nu \approx \chi_{0,k}$ ist und folglich ein Fehler in dem angenommenen Wert von T_ε nur in die im Nenner der rechten Seite von (21.21) stehende Größe $T_\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ eingeht. Auch hier wird angenommen, daß die Zahl der freien Elektronen in der Chromosphäre im wesentlichen durch die Ionisation des Wasserstoffs bestimmt wird. Die Berücksichtigung der durch die Ionisation der Metalle entstehenden Elektronen vergrößert den Wert n_e.

Mit Hilfe der beschriebenen Methode fand man, daß n_e in der Basis der Chromosphäre von der Größenordnung $2 \cdot 10^{11}-5 \cdot 10^{11}$ und p_e bei $T_\varepsilon \approx 5000°$ von der Größenordnung 0,1–0,3 bar ist.

Mit zunehmender Höhe x nimmt die Elektronenkonzentration verhältnismäßig langsam ab. In der Höhe $x = 4000$ km besitzt n_e die Größenordnung $2 \cdot 10^{10}$, in der Höhe $x = 10\,000$ km die Größenordnung $2 \cdot 10^9$ und in der Höhe $x = 13\,000$ km die Größenordnung 10^9.

Wir wenden uns jetzt dem nächsten Parameter zu, der Elektronentemperatur T_ε. Eine der möglichen Methoden zur Bestimmung von T_ε für die Chromosphäre wie auch für die Protuberanzen ist das Studium der Energieverteilung im Rekombinationsleuchten des Wasserstoffs jenseits der Grenzen der Balmer- und der Paschen-Serie. Die Ausgangsformel ist die Formel (21.21), nach der $j'_\nu = C e^{-\frac{h\nu}{k T_\varepsilon}}$ ist, wobei C eine gewisse Konstante bedeutet. Aus dem Vergleich dieses Gesetzes mit den Beobachtungen finden wir T_ε. Von Menzel und Cillié nach dieser Methode ausgeführte Messungen ergeben für die Basis der Chromosphäre einen Wert von etwa 5000°. W. A. Krat[1]) erhielt nach derselben Methode für Höhen von 7000 bis 8000 km $T_\varepsilon \approx 6200°$.

---

[1]) W. A. Krat, Das Spektrum der Chromosphäre und der schwachen Protuberanzen. Mitteilungen des Astronomischen Hauptobservatoriums Nr. 147, 1, 1951 (В. А. Крат, О спектре хромосферы и слабых протуберанцев. Известия ГАО, No. 147, 1, 1951).

Eine zweite Methode, die eine gewisse Vorstellung von dem Verlauf von T_ε innerhalb der Chromosphäre zu geben vermag, ist die Untersuchung der von der Sonne emittierten Radiostrahlung. Die allgemeinen Grundzüge dieser Methode werden im folgenden Paragraphen behandelt. An dieser Stelle legen wir nur kurz die Ergebnisse der entsprechenden Beobachtungen dar.

Bedauerlicherweise ist für die niedrigsten Schichten der Chromosphäre die Bestimmung von T_ε in dem Wellenlängenbereich der bisher benutzten Radiowellen nicht möglich (die starke Absorption der Radiowellen verhindert dies). Glaubwürdige Ergebnisse erhält man für Höhen, die größer als 3000–5000 km sind. Es zeigt sich, daß in einer Höhe von 5000 km die kinetische Temperatur T_ε etwa 6000° beträgt. Mit zunehmender Höhe wächst sie zunächst langsam, dann aber schnell an. In der Höhe $x \approx 10000$ km beträgt T_ε etwa 20000–30000°. In Höhen von etwa 15000 km ist T_ε schon sehr groß und übersteigt möglicherweise 100000°.

Für eine relativ niedrige Temperatur T_ε in der Basis der Chromosphäre sprechen noch andere Tatsachen. So würde ein hohes T_ε in den niedrigen Schichten der Chromosphäre zu einem sehr großen Überschuß an ultravioletter Strahlung in der Chromosphäre führen, was den Beobachtungen in der Ionosphäre widerspricht. Ferner müßten wir beim Vorhandensein eines großen T_ε in der Basis der Chromosphäre im Chromosphärenspektrum gewisse verbotene Linien beobachten, es sind aber keine vorhanden. Der Wert von 30000° für T_ε in der Basis der Chromosphäre, der von vielen Autoren „begründet" worden ist, hätte zur Folge, daß das Spektrum der Chromosphäre dem Spektrum eines Sterns vom Typ B oder O ähnlich sein müßte, was ebenfalls den Beobachtungen vollkommen widerspricht.

Somit können wir annehmen, daß die kinetische Temperatur der unteren Schichten der Chromosphäre relativ niedrig ist und nur in den Höhen, die 8000–10000 km übersteigen, größer als 10000° ist. Dies ist eine äußerst wichtige Tatsache für die Physik der Chromosphäre.

4. Die Ionisation der Atome

Wir betrachten jetzt das Problem der Ionisation der Atome in der Chromosphäre. Es liegt auf der Hand, daß im Hinblick auf den relativ niedrigen Wert von n_e in der Chromosphäre nach (5.11) der Ionisationsgrad höher sein muß als in den äußeren Schichten der Photosphäre. In Wirklichkeit ist er noch höher als aus der Anwendung von (5.11) folgt. Dies kann man allein aus dem Vorhandensein der He II-Linie 4686 Å im Spektrum der Chromosphäre schließen. Hierbei sind die beobachteten Anomalien um so größer, je höher das entsprechende Ionisationspotential ist. Wir erinnern daran, daß die Protuberanzen das gleiche Verhalten zeigen.

Wir betrachten die Ionisation des Wasserstoffs in den unteren Schichten der Chromosphäre (bis zu einer Höhe von 2000 km). Zunächst zeigen wir, daß die Elektronen in der Chromosphäre tatsächlich durch Ionisation des Wasserstoffs entstehen.

Auf Grund der Beobachtungen und der früher angestellten Überlegungen hinsichtlich der Selbstabsorption können wir die Konzentration der CaII-Atome in der Höhe $x = 0$, die sich im Grundzustand befinden, d. h. die Zahl dieser Atome in 1 cm^3, berechnen. Nach MENZEL und CILLIÉ ist sie gleich $3 \cdot 10^8$. Außerdem kann man diese Zahl wie gewöhnlich näherungsweise mit der Konzentration der in sämtlichen Anregungszuständen befindlichen Atome des CaII identifizieren.

Andererseits zeigt der Vergleich des Spektrums der unteren Schichten der Chromosphäre mit den Spektren der gewöhnlichen Sterne, daß hinsichtlich der relativen Intensitäten der Metallinien das erstere – grob gesprochen – den Spektren der Sterne vom Typ gF5 ähnelt. (Eine genaue Zuordnung vorzunehmen ist nicht möglich, weil beispielsweise der Typ dieser Schichten in bezug auf die Metallinien später und in bezug auf die Heliumlinien früher als gF5 ist.) In den Atmosphären der zu diesem Typ gehörenden Sterne befinden sich die Metalle hauptsächlich im einfach ionisierten Zustand. Daher haben wir allen Grund zu der Annahme, daß sich auch in den unteren Schichten der Chromosphäre die Metalle vorwiegend im einfach ionisierten Zustand befinden. Hieraus folgt insbesondere, daß die Zahl der durch die Ionisation von Ca erzeugten freien Elektronen in 1 cm^3 für die Basis der Chromosphäre gleich der eben angegebenen Zahl $3 \cdot 10^8$ ist. Benutzen wir diese Zahl und berücksichtigen wir, daß sich alle Metallatome vorwiegend im einfach ionisierten Zustand befinden, so können wir mit Hilfe der Tabelle 1 die Zahl der freien Elektronen berechnen, die durch die Ionisation aller Metallatome entstehen. [Das Element, das sich am besten für solche Rechnungen „eignet", ist das Eisen, bei dem das zweite Potential relativ groß, nämlich 16,5 eV, ist. Die Voraussetzung, daß $n\,(\mathrm{FeIII}) : n\,(\mathrm{FeII}) \ll 1$ ist, ist in noch stärkerem Maße gerechtfertigt als für Kalzium. Zuverlässige Werte für n (FeII) liegen jedoch zur Zeit noch nicht vor.] Hierbei erhält man Werte, die um ein bis zwei Größenordnungen kleiner sind als die unmittelbar aus den Beobachtungen ermittelten Werte n_e. Außerdem ist der angegebene Wert $n_1\,(\mathrm{CaII}) = 3 \cdot 10^8$ zu groß, weil bei seiner Auffindung nicht das Anwachsen der Turbulenzgeschwindigkeit in der Chromosphäre mit der Höhe berücksichtigt worden ist. Folglich muß noch irgendeine zusätzliche Elektronenquelle existieren. Es ist klar, daß diese Quelle nur der Wasserstoff sein kann. Im Hinblick hierauf können wir annehmen, daß $n_e \approx n\,(\mathrm{HII})$ ist, wobei n (HII) die Zahl der Protonen in 1 cm^3 ist.

Wir gehen von diesen Überlegungen und von der Konstanz der relativen chemischen Zusammensetzung aller Schichten der Sonnenatmosphäre aus und können dann den Ionisationsgrad des Wasserstoffs in der unteren Chromosphäre ausrechnen [33, § 31]. Wir können unter der Annahme, die im Einklang mit unseren Ausführungen steht, daß $n\,(\mathrm{CaII}) = 3 \cdot 10^8$ für die Basis der Chromosphäre praktisch die Gesamtzahl der Ca-Atome in 1 cm^3 angibt, nach Tabelle 1 $n(\mathrm{H})$, die Gesamtzahl der Wasserstoffatome in 1 cm^3, ausrechnen. Andererseits kennen wir $n(\mathrm{H\,II}) \approx n_e$. Folglich können wir unmittelbar das Verhältnis $n(\mathrm{H\,II}) : n(\mathrm{H})$, d. h. den Ionisationsgrad x_{H} des Wasserstoffs an der Basis der Chromosphäre, berechnen. Für andere Höhen (die unteren Schichten der Chromosphäre) können wir n(Ca II) aus der Formel (21.16) bestimmen,

in der man β unter Berücksichtigung der Selbstabsorption berechnen muß. Aus entsprechenden Rechnungen geht hervor, daß x_H an der Basis der Chromosphäre etwa 0,02–0,03 und in der Höhe $x = 1500$ km schon etwa 0,5 beträgt. In noch größeren Höhen liegt x_H in der Nähe von Eins. Somit ist in den untersten Schichten der Chromosphäre der Wasserstoff vorwiegend neutral, und hier „liefert" wegen seiner großen prozentualen Häufigkeit der Wasserstoff praktisch alle freien Elektronen. Jedoch ist auch hier die Ionisation des Wasserstoffs hundertmal größer, als sich nach der Formel (5.11) mit $T = 5000°$ und $n_e \approx 2 \cdot 10^{11}$ cm^{-3} berechnet. Mit wachsender Höhe nimmt diese Anomalie zu. Es ist klar, daß die Gleichung $n_e \approx n$(H II) mit zunehmender Höhe immer genauer wird, da die Elektronen in der gesamten Chromosphäre hauptsächlich durch die Ionisation des Wasserstoffs entstehen.

Grundlegend für die betrachtete Methode ist die Voraussetzung über die Konstanz der chemischen Zusammensetzung der gesamten Sonnenatmosphäre. Bei den Metallen wird die Ähnlichkeit der chemischen Zusammensetzung der Photosphäre und der Chromosphäre unmittelbar durch Beobachtungen bestätigt. Insbesondere spricht das Auftreten der schweren Atome, wie La, Ce, Pr usw., in der Chromosphäre dafür, daß durchmischende Ströme auch in der Chromosphäre einen entscheidenden Einfluß besitzen.

Wir wenden uns jetzt dem Helium zu. Die Gesamtzahl der Heliumatome in 1 cm^3 für die unteren Schichten der Chromosphäre kann man nach der gleichen Methode ermitteln, die von den bekannten Größen n(Ca II) $\approx n$(Ca) und der Tabelle 1 Gebrauch macht. Hierbei setzen wir erneut voraus, daß die chemische Zusammensetzung in allen Höhen der Chromosphäre gleich und mit der chemischen Zusammensetzung der Photosphäre identisch ist.

Die Konzentration n(He II) kann man mit Hilfe der Formel (20.14) finden. Wir können nämlich das Orthohelium als ein gewisses Element mit dem Ionisationspotential 4,7 eV ansehen, da die Triplett- und Singulettsysteme des Heliums nicht kombinieren. Bei einem derart kleinen Wert des Ionisationspotentials (und folglich auch der Anregungspotentiale) kann die Anwendung der „Gleichgewichtsformel" (20.14) keine merklichen Fehler hervorrufen, weil die Anomalien bei Energien von größenordnungsmäßig 10 eV beginnen. Somit können wir nach der Bestimmung von $n_{0,k}$ aus den absoluten Intensitäten der Heliumtripletts nach (20.14) $n_1 = n$(He II) bestimmen, wenn wir die oben angegebenen Werte für n_e annehmen und für T etwa 5000–6000° einsetzen.

Schließlich können wir das Verhältnis n(He III) : n(He II) ebenso wie bei den Protuberanzen aus der Formel (20.18) erhalten, wobei $n_1 : n_2 = n$(He II) : n(He III) ist. Hierbei sind natürlich die in bezug auf die Anwendbarkeit der Formel (20.18) gemachten kritischen Bemerkungen zu beachten.

Unter Zugrundelegung unserer Ausführungen können wir die Ionisation des Heliums auf den verschiedenen Niveaus der Chromosphäre berechnen. Entsprechende Rechnungen unter Verwertung der vorliegenden Beobachtungen führen zu Ergebnissen, die den bei Wasserstoff gefundenen analog sind:

1. Bis zu den Höhen von einigen tausend Kilometern macht das Verhältnis n(He) : n(He II) einige Größenordnungen aus, d. h., in diesen Höhen ist das Helium vorwiegend neutral.

2. Der gefundene Ionisationsgrad ist in allen Schichten der Chromosphäre höher, als aus der Ionisationsformel (5.11) folgt. Hierbei ist dieser Überschuß für die zweite Ionisation größer als für die erste (Zunahme der Anomalie mit wachsendem χ_r).

3. Die Zunahme der Ionisation mit der Höhe geht schneller vor sich, als durch die Abnahme von n_e mit der Höhe bedingt sein könnte.

Somit müssen wir sowohl beim Wasserstoff als auch beim Helium erstens für die anomal hohe Ionisation der Atome dieser Elemente und zweitens für das Anwachsen dieser Anomalie mit wachsendem chromosphärischem Niveau eine Erklärung finden (die gleichen Anomalien müssen auch bei den ionisierten Metallen auftreten, deren zweites Ionisationspotential groß genug ist). Die aufgezählten Tatsachen können keine Folge der anomal hohen kinetischen Temperatur der Chromosphäre und ihres Anwachsens mit der Höhe sein, weil – wie wir gesehen haben – die kinetische Temperatur der unteren Schichten der Chromosphäre verhältnismäßig klein ist. Der Einfluß der Stöße kann nur in den äußeren Schichten der Chromosphäre von Bedeutung sein.

Nach I. S. Schklowski können die erwähnten Tatsachen zum großen Teil (ebenso wie bei den Protuberanzen) durch das Ionisationsvermögen der ultravioletten Strahlung der Sonnenkorona erklärt werden. Der Wasserstoff wird in den weiter außen liegenden Schichten der Chromosphäre durch die harte monochromatische Strahlung der Koronalinien (Ne VIII, $\lambda = 776$ Å; Mg X, $\lambda = 625$ Å) ionisiert. Beim Helium dagegen findet sowohl der Wert des Verhältnisses n(He) : n(He II) und n(He II) : n(He III) an der Basis der Chromosphäre als auch das Gesetz der Änderung dieses Wertes mit der Höhe auf Grund der Photoionisation durch die „kontinuierliche“ Komponente der ultravioletten Koronastrahlung, die durch Rekombination freier Elektronen mit Protonen und α-Teilchen aus der Korona erzeugt wird, und durch einzelne Emissionslinien in fernem Ultraviolettbereich des Koronaspektrums ihre Erklärung.

Jedoch ist anscheinend die Ionisation durch die Koronastrahlung nicht groß genug, um beim Wasserstoff den großen Wert für das Verhältnis n(H II) : n(H I) in der unteren Chromosphäre zu erklären. Die Ursache hierfür ist darin zu suchen, daß die optische Dicke der unteren Chromosphäre jenseits der Grenze der Lyman-Serie (wo die Wahrscheinlichkeit für die Photoionisation des Wasserstoffs maximal ist) sehr groß ist und die entsprechende Koronastrahlung nur in sehr abgeschwächtem Zustand durch diese Schichten hindurchdringt.

Worauf ist die anomal starke Ionisation des Wasserstoffs in der unteren Chromosphäre dann zurückzuführen? Es ist fürs erste noch schwierig, diese Frage zu beantworten. Wir weisen jedoch auf folgende Möglichkeit hin. Aus den Beobachtungen ergibt sich, daß die Chromosphäre kein kompaktes Gebilde ist. Sie besteht aus einzelnen aufwärts strebenden „Halmen“, was insbesondere die Beobachter dazu veranlaßte, das Aussehen der Chromosphäre („von der Seite“ betrachtet) mit einer brennenden Steppe zu vergleichen. (Diese Ähnlichkeit wird noch durch den Umstand unterstrichen, daß die erwähnten „Halme“ keine stationären Gebilde sind. Sie ändern häufig ihre Nei-

gung gegen die Normale, und überhaupt ändert sich ähnlich der Granulation die feine Struktur der Chromosphäre fortwährend.) Andererseits zeigen die in den Koronalinien (hauptsächlich in der Linie 5303 Å) durchgeführten Beobachtungen, daß aus der Chromosphäre glühende Materie in die Korona geschleudert wird, die die Temperatur der Korona, d. h. größenordnungsmäßig eine Million Grad, besitzt. Es ist durchaus möglich, daß diese Materie auch den Raum zwischen den erwähnten „Halmen" der Chromosphäre ausfüllt. Infolge ihrer geringen Dichte kann diese „Koronamaterie" das allgemeine Spektrum der Chromosphäre nicht merklich ändern. Die Elektronen jedoch, die eine überaus hohe mittlere kinetische Energie besitzen, diese entspricht einer Million Grad, können in die „Halme" der Chromosphäre (in ihre äußeren Teile) eindringen und dort eine anomale Ionisation des Wasserstoffs und Heliums hervorrufen. Diese Hypothese muß aber noch weiter ausgearbeitet werden.

5. Der Anregungsmechanismus der Atome

Wir betrachten jetzt die Frage, welche Prozesse für das Leuchten der Chromosphäre in den einzelnen Spektrallinien verantwortlich sind.

Die Lösung des vorliegenden Problems wird dadurch erschwert, daß der Faktor, der die Ionisation des Wasserstoffs in den unteren Schichten der Chromosphäre bewirkt, unbekannt ist. Dieser Faktor wird auch auf die Anregungsprozesse der anderen Atome einen Einfluß ausüben. Wie schwierig das vorliegende Problem ist, geht daraus hervor, daß die Intensität der Heliumlinien bei einigen Finsternissen in einer bestimmten Höhe über der Basis der Chromosphäre ein Maximum besaß und oberhalb und unterhalb dieser Höhe abfiel.

Drei Quellen des chromosphärischen Leuchtens sind denkbar:

1. Streuung der Photosphärenstrahlung an den Atomen der Chromosphäre;
2. Rekombinationsprozesse mit nachfolgenden Kaskadenübergängen;
3. Anregung der Atome durch Stöße.

Wir können annehmen, daß wenigstens in einigen Fällen, insbesondere für Wasserstoff und für Helium, die Rekombinationsprozesse die Hauptquelle für das Leuchten der Atome in den unteren Schichten der Chromosphäre sind. Hierfür spricht das ziemlich intensive Leuchten des chromosphärischen Wasserstoffs jenseits der Grenze der Balmer-Serie, das natürlich reinen Rekombinationscharakter besitzt. Außerdem ergibt beim Wasserstoff und Helium die Streuung der Photosphärenstrahlung im Vergleich zu der beobachteten Energiemenge in den entsprechenden Linien eine viel zu geringe Energie. Zugleich können infolge des relativ kleinen T_ε (und niedrigen n_e) die Stöße in der unteren und mittleren Chromosphäre keine wesentliche Rolle spielen.

Eines der Hauptmittel für die Lösung des betrachteten Problems ist die Untersuchung der Verteilung der emittierenden Atome auf die Quantenzustände. Beim Wasserstoff ist dies insbesondere die Frage nach der relativen Intensität der Linien in der Balmer-Serie (oder Paschen-Serie). Wir er-

mitteln aus den Beobachtungen die Folge der Verhältnisse $I(\mathrm{H}\alpha):I(\mathrm{H}\beta):I(\mathrm{H}\gamma):\cdots$ und müssen diese Folge (das sogenannte *Dekrement*) mit den Ergebnissen vergleichen, die diese oder jene Theorie liefert. Diese wiederum muß auf der Lösung von Gleichungen vom Typ (20.11)–(20.13) fußen. Doch auch hier begegnet man ernsten Schwierigkeiten. Erstens sind für viele Übergänge ϱ_{ik} und C_{kf}, die in die erwähnten Gleichungen eingehen, unbekannt. Zweitens sind die ersten Glieder der Balmer-Serie (Hα, Hβ, Hγ) durch Selbstabsorption verzerrt, deren genaue Berechnung bisher noch nicht durchgeführt worden ist. (Die Selbstabsorption in den Linien Hα und Hβ hat zur Folge, daß ihre maximalen Intensitäten in den Grenzen von $x = 0$ bis $x = 3000$–4000 km sehr schwach mit der Höhe veränderlich sind.) Überdies treten noch zahlreiche weitere Komplikationen auf; insbesondere können in der äußeren Chromosphäre bei den Anregungsprozessen die Stöße eine große Rolle spielen (großes T_ε) usw.

Bei den Metallen ist man sich über den relativen Einfluß des Rekombinationsleuchtens und der Streuung der Photosphärenstrahlung bisher noch völlig im unklaren. Anscheinend spielt der zweite Faktor eine bedeutendere Rolle. Wird nämlich die Anregung der Atome durch die Photosphärenstrahlung bewirkt, so wird das Verhältnis der Äquivalentbreiten ein und derselben Linie der „umkehrenden Schicht" und der Chromosphäre (für die Chromosphäre die Emissionslinie) nicht von dem Anregungspotential des unteren Niveaus der Linie abhängen. Die von W. A. Krat (siehe Fußnote auf S. 347) an den Fe I- und Ti II-Linien (an dem Material der Finsternis des Jahres 1945) durchgeführten Messungen ergeben, daß in der Tat eine derartige Abhängigkeit nicht existiert.

Natürlich ist hier noch eine umfangreiche Arbeit zu leisten.

6. Das Gleichgewicht in der Chromosphäre

Jetzt müssen wir die Frage nach dem Gleichgewicht der Chromosphäre behandeln. Wir haben gesehen, daß in der Sonnenchromosphäre außer den gewöhnlichen elastischen Kräften der erwärmten Gase und der Gravitation noch irgendwelche zusätzliche Kräfte wirksam sind, die vom Sonnenmittelpunkt weg, d.h. nach außen, gerichtet sind.

Als erstes erhebt sich die Frage, ob sich die Wirkung dieser Kräfte über die ganze Chromosphäre erstreckt (möglicherweise auch auf die äußeren Schichten der Photosphäre) oder ob sie nur auf einige Gebiete beschränkt ist. Wie I. S. Schklowski[1]) nachgewiesen hat, ist die Annahme begründet, daß der Einfluß der zusätzlichen Kräfte in den untersten Schichten der Chromosphäre bis zu Höhen von der Größenordnung 1000 km praktisch gleich Null ist.

Tatsächlich sind die in Tabelle 14 aufgeführten Werte von β gewisse Mittelwerte über die Höhe. Überdies müssen die Beobachter – wie wir schon erwähnt

[1]) I. S. Schklowski, Zur Frage der anomalen Dichteverteilung in der Chromosphäre. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, 68, 829, 1949 (И. С. Шкловский, К вопросу об аномальном распределении плотностей в хромосфере. Доклады Академии наук СССР **68**, 829, 1949).

haben – in der Formel für $E(x)$ sehr häufig zwei Glieder berücksichtigen, so daß $E(x)$ die Gestalt (21.9) annimmt. Entsprechend ändert sich auch die Form der Abhängigkeit $n(x)$ von x. Nach den Angaben von zahlreichen Beobachtern [2, S. 458, 459] kann man die entsprechende Formel für $n(x)$ (im Mittel für viele Elemente) folgendermaßen schreiben:

$$n(x) = n^0 (0{,}982\, e^{-5{,}9 \cdot 10^{-8} x} + 0{,}018\, e^{-2{,}6 \cdot 10^{-8} x}). \tag{21.22}$$

Wildt gibt auf Grund einiger Finsternisbeobachtungen für Fe und Ti ebenfalls eine ähnliche Formel an. Im Mittel (unter Berücksichtigung der Beobachtungsfehler usw.) ergibt sich, daß der Exponent β_1 im ersten Glied dieser Ausdrücke vom Typ (21.22) in der Nähe von β_g für Wasserstoff bei $T \approx 4600$ bis 5000° liegt. Dies kann man so deuten, daß der Wasserstoff in den untersten Schichten der Sonnenchromosphäre durch die gewöhnlichen elastischen Kräfte der erwärmten Gase getragen wird. Infolge der Durchmischung der Sonnengase befolgen die Metalle ebenfalls dieses Gesetz. Wir weisen darauf hin, daß die aus den Beobachtungen ermittelten β für He und H in den untersten Schichten der Chromosphäre sich sehr stark von denjenigen β unterscheiden können, die die Metalle ergeben. Sowohl die Strahlung des Heliums als auch die Strahlung des Wasserstoffs zeigen in der Chromosphäre ein völlig anomales Verhalten, so daß man den zu langsamen Intensitätsabfall in den Linien der erwähnten Elemente mit der Höhe vollständig durch die Zunahme des Einflusses der Rekombinationen mit der Höhe erklären kann. Hierfür spricht das Auftreten eines Maximums für das Heliumleuchten in einer gewissen Höhe über der Basis der Chromosphäre. Es ist klar, daß dieses Maximum das Ergebnis zweier entgegengesetzt wirkender Faktoren ist: der Zunahme des Emissionsvermögens der He-Atome mit der Höhe und der Abnahme der Konzentration der He-Atome mit der Höhe.

Wenn die angestellten Überlegungen über das Gleichgewicht der untersten Schichten der Chromosphäre sich durch weitere Untersuchungen bestätigen, können wir mit großer Gewißheit behaupten, daß die Verteilung der Photosphärengase mit der Höhe hauptsächlich durch die gewöhnliche Elastizität des erwärmten Gases und die Gravitation bestimmt wird [Gleichung (20.25)].

Das eben Gesagte bezieht sich nur auf Höhen bis zu 1000 km. Wenn wir dagegen bei Höhen von der Größenordnung 1000 km beginnen, treten gewisse zusätzliche Kräfte in Aktion, durch die die Chromosphäre getragen wird. Hierbei betonen wir noch einmal, daß man das „Getragenwerden" der Chromosphäre nicht dadurch erklären kann, daß man in das Gesetz des hydrostatischen Gleichgewichtes (21.20) eine genügend hohe Temperatur T einführt. Wir haben gesehen, daß die kinetische Temperatur der unteren und sogar der mittleren Chromosphäre tatsächlich verhältnismäßig niedrig ist.

Wir wenden uns der Behandlung der Natur dieser Kräfte zu.

Als Hauptkraft, die die Chromosphäre trägt, führte Milne den Strahlungsdruck auf die Ca II-Atome ein. Auf Grund der Formel (20.28) durchgeführte Rechnungen zeigen, daß der auf die Ca II-Atome ausgeübte Strahlungsdruck in den äußeren Schichten der Chromosphäre praktisch mit der an diesen Atomen

angreifenden Schwerkraft genau im Gleichgewicht steht. Aus zahlreichen Gründen und in erster Linie aus dem Grunde, daß die Anzahl der Kalziumatome in der Chromosphäre (wie in allen Bereichen der Sonnenatmosphäre) um das $5 \cdot 10^5$fache kleiner ist als die Anzahl der Wasserstoffatome, erwies sich jedoch diese Theorie als nicht stichhaltig. Über eine Kritik der MILNEschen Theorie siehe [10, S. 116–117].

Zahlreiche Autoren bringen die Kräfte, die die Chromosphäre tragen, mit Turbulenzprozessen in der Chromosphäre in Verbindung. Die Untersuchung der Breiten der Chromosphärenlinien, die von vielen Beobachtern durchgeführt worden ist (O. A. MELNIKOW, W. P. WJASANIZYN, A. UNSÖLD und anderen), zeigt, daß diese gewöhnlich größer sind, als man beim Auftreten einer rein thermischen Bewegung der Atome zu erwarten hätte. Hieraus zog man den Schluß, daß sich die Materie der Chromosphäre in einer Turbulenzbewegung befindet, wobei die mittlere Turbulenzgeschwindigkeit größenordnungsmäßig 10–20 km/sec beträgt. Für das Auftreten von Turbulenzbewegungen in den äußeren Schichten der Chromosphäre spricht auch die komplizierte Faserstruktur dieser Schichten. Man hat Gründe zu der Annahme, daß die Turbulenzgeschwindigkeit mit der Höhe x anwächst. Hierfür spricht die Tatsache, daß die schwachen Linien, in denen man Strahlung bis zu Höhen $x \approx 1000$ km beobachtet, eine Turbulenzgeschwindigkeit zeigen, die nicht größer als 2 km/sec ist.

Wenden wir uns jetzt der Formel (21.20) zu. Je größer $\frac{RT}{\mu}$, d.h., je größer das Quadrat der mittleren Teilchengeschwindigkeit ist, um so größer wird die Ausdehnung der Atmosphäre bei vorgegebener Gegenwirkung der Schwerkraft. Wenn zu der thermischen Bewegung der Teilchen noch eine Turbulenzbewegung mit der Geschwindigkeitsverteilung $e^{-\left(\frac{v}{v_t}\right)^2}$ (für eine Komponente) hinzukommt, geht nach (11.29) die Gleichung (21.20) in die folgende über:

$$n(x) = n^0 e^{-\frac{gx}{\frac{RT}{\mu} + \frac{v_t^2}{2}}}. \tag{21.23}$$

In diesem Fall besitzt die Größe β des Exponentialgesetzes (21.16) die Gestalt

$$\beta = g\left\{\frac{RT}{\mu} + \frac{v_t^2}{2}\right\}^{-1}. \tag{21.24}$$

Wenn wir im Hinblick auf die große Wasserstoffhäufigkeit $\mu = 1$ setzen und ebenfalls $T = 4800°$ und $v_t = 15$ km/sec annehmen, erhalten wir $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}^{-1}$. Dieser Wert liegt recht gut in der Nähe der Größe β, die in Tabelle 14 von W. P. WJASANIZYN aufgeführt ist. (Beim Wasserstoff und Helium sind – wie wir schon erwähnt haben – die Größen β durch die Abhängigkeit des Emissionsvermögens von der Höhe entstellt. Außerdem sind die starken Linien, ähnlich den Ca II-Linien H und K, durch die Selbstabsorption verzerrt.)

Der vorliegende Mechanismus für das Getragenwerden der Chromosphärengase ist von zahlreichen Autoren betrachtet worden; A. B. SEWERNY[1]) betrachtet in seiner Arbeit eine Turbulenzgeschwindigkeit v_t, die sich proportional der Höhe x ändert. An Stelle der Gleichung (7.1) geht er von folgender Gleichgewichtsgleichung aus:

$$\frac{d}{dx}\left(\varrho v_t^2 + \frac{R}{\mu}\,\varrho T\right) = -g_e \varrho, \tag{21.25}$$

wobei ϱv_t^2 die REYNOLDSsche Spannung und g_e die effektive Schwerebeschleunigung ist (effektiv in dem Sinne, daß sie einen möglichen Einfluß des Strahlungsdruckes berücksichtigt). Die Integration von (21.25) ergibt auch die Abhängigkeit der Dichte ϱ von der Höhe x.

Grundlegend bei der Betrachtung dieses Mechanismus ist die Frage nach der Natur der Kräfte, die eine beständige Turbulenzbewegung in der Chromosphäre unterhalten, d.h., man muß wissen, woher die Energien kommen, die bei der Aufrechterhaltung der Turbulenzbewegungen verbraucht werden. In ihrer Arbeit über die Natur der Kräfte, die die Turbulenz der Chromosphäre bewirken, weisen A. I. LEBEDINSKI und L. E. GUREWITSCH[2]) auf die Unzulänglichkeit der früher angenommenen Quellen für die Turbulenzbewegungen hin und führen einen neuen Mechanismus an, in dem die Kräfte des Magnetdruckes (siehe § 18) die Hauptrolle spielen. Diese Kräfte entstehen durch die Bewegung der Granula in dem allgemeinen Magnetfeld der Sonne. Hierbei ergibt es sich jedoch, daß die Ausdehnung der Chromosphäre von der Feldstärke des allgemeinen Magnetfeldes der Sonne abhängt. Gleichzeitig zeigt – nach den vorliegenden Daten zu schließen – das Magnetfeld beträchtliche zeitliche Änderungen; dies widerspricht der relativen Konstanz der Höhe der Chromosphäre.

Wir lehnen den Mechanismus der Turbulenz zum Tragen der Chromosphäre nicht völlig ab, weisen aber gleichzeitig auf eine andere Möglichkeit hin. Wir haben schon erwähnt, daß die Chromosphäre aus einzelnen strahlenförmigen Halmen besteht, die in ihrem Aussehen kleinen Protuberanzen ähneln. Andererseits haben wir gesehen, daß die Kräfte, die die Protuberanzen tragen, allen Angaben nach rein elektromagnetischen Charakter besitzen. Dagegen ist der Einfluß der Turbulenzbewegungen beim Tragen der Protuberanzen (zum mindesten bei einigen Typen) praktisch gleich Null. Davon kann man sich an zahlreichen Untertypen der Protuberanzen, die in dem Raum der Korona entstehen und sich nach unten bewegen, überzeugen.

---

[1]) A. B. SEWERNY, Über den Turbulenzzustand der Sonnenchromosphäre. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 58, 1617, 1947 (А. Б. Северный, О турбулентном состоянии солнечной хромосферы. Доклады Академии наук СССР 58, 1617, 1947).

[2]) L. E. GUREWITSCH und A. I. LEBEDINSKI, Eine Theorie der Chromosphäre. Journal für experimentelle und theoretische Physik 20, Heft 6, 566, 1950 (Л. Е. Гуревич и А. И. Лебединский, Теория хромосферы. Журнал экспериментальной и теоретической физики 20, Вып. 6, 566, 1950).

Wenn zwischen den Protuberanzen und den chromosphärischen Strahlen tatsächlich eine physikalische Verwandtschaft besteht (hierfür sprechen z.B. die chromosphärischen Eruptionen, die in letzter Zeit von E. J. Bugoslawskaja, W. Roberts und anderen untersucht worden sind), können die chromosphärische Materie wie die Protuberanzen durch die gleichen Kräfte getragen werden.

Bisher haben wir unseren Schlußfolgerungen über die Chromosphäre stets Beobachtungen zugrunde gelegt, die am Rand der Sonnenscheibe vorgenommen worden sind. Nunmehr wenden wir uns der Behandlung der Erscheinungen in der Chromosphäre zu, die man in der Projektion auf die Sonnenscheibe beobachtet.

7. Physik der Flocculi

Wenn wir den genügend engen zweiten Spalt des Spektroheliographen auf die Mitte einer beliebigen starken Linie des Sonnenspektrums einstellen, können wir mit Hilfe der Spektroheliogramme die Chromosphäre untersuchen, die sich auf die Sonnenscheibe projiziert, da die zentralen Bereiche gewisser intensiver Absorptionslinien des Sonnenspektrums in den Schichten der Chromosphäre entstehen.

Derartige Beobachtungen ergaben, daß die Randverdunkelung in der Strahlung der Chromosphäre geringer ist als in den Bereichen des kontinuierlichen Spektrums, die den entsprechenden Linien benachbart sind.

Von größtem Interesse ist das Studium der Chromosphärenstrahlung in den aktiven Gebieten der Sonnenoberfläche. Wir verweisen den Leser bezüglich der Beschreibung dieser Frage auf die entsprechende Literatur ([20, S. 87], [34, S. 167–180], [2, S. 484–495]) und betrachten hier nur einige Probleme, die prinzipiellen Charakter besitzen.

Am häufigsten benutzt man für das Studium der aktiven Gebiete in der Chromosphärenstrahlung die Ca II-Linien H und K und die Linie Hα. Wir werden uns auch sofort mit ihnen beschäftigen.

Die in den zentralen Bereichen der erwähnten Linien aufgenommenen Spektroheliogramme weisen in den aktiven Gebieten der Sonne helle Flecke auf (einzelne helle Punkte kann man auch außerhalb der aktiven Gebiete beobachten. Von ihnen wollen wir aber nicht sprechen). Diese Erscheinung ist leicht zu erklären, wenn wir uns der Betrachtung der Linienkonturen von H, K und Hα in den aktiven Gebieten der Sonne zuwenden, die auf der Sonnenoberfläche vorwiegend mit den Fackeln (natürlich einschließlich der Sonnenflecke) zusammenfallen.

Die Kontur der Hα-Linie in den Fackelgebieten ist in Abb. 51 durch die ausgezogene Linie dargestellt, wobei nach unseren Ausführungen am Ende des § 19 die eigentliche Chromosphärenstrahlung durch die Fläche a, b, c bestimmt sein muß. Die Kontur b, c (punktierte Linie) ist eine hypothetische Kontur der Hα-Linie im Fackelspektrum.

Die Intensität im Punkte c in Abb. 51 ist ziemlich unbestimmt, da die Größe

$a c$, d.h. die von der Chromosphäre selbst herrührende Energie, unbekannt ist. Die gleiche Unbestimmtheit tritt auch in den ungestörten Gebieten der Photosphäre auf. Auch hier ist der relative Einfluß der Chromosphäre und der äußersten Bereiche der „umkehrenden Schicht“ auf die Entstehung der beobachteten zentralen Intensität bei den Linien $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$, ... unbekannt.

Die Kontur der K-Linie hat in einem über einer Fackel aufgenommenen Spektrum das in Abb. 57 dargestellte Aussehen. (Die gleiche Kontur besitzt auch die Linie H.) Den hellen Kern in der Mitte der K-Linie bezeichnet man als K_2-Linie, die zentrale Einsenkung in diesem Kern als K_3-Linie. Die Kontur K_1 ist schließlich die Kontur der eigentlichen Absorptionslinie, die zu der Fackel selbst gehört. Die untere gestrichelte Kontur in Abb. 57 ist die Kontur der K-Linie in den benachbarten ungestörten Gebieten der Photosphäre.

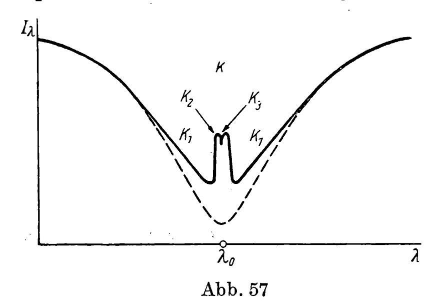


Abb. 57

Aus den Abbildungen 51 und 57 folgt unmittelbar, daß die Fackeln in den zentralen Bereichen der Linien H, K und $H\alpha$ wirklich heller sein müssen als die benachbarten Gebiete der ungestörten Photosphäre. Da der betrachtete Strahlungsüberschuß (überschüssig über die gewöhnliche Strahlung, die von den ungestörten Stellen ausgeht) von den chromosphärischen Schichten hervorgerufen wird und ihr Ausdehnungsbereich im allgemeinen mit den Fackeln zusammenfällt, nennt man die entsprechenden hellen Gebiete, die in den Spektroheliogrammen auftreten, *chromosphärische Fackeln*. Häufig bezeichnet man sie auch als *Flocculi* oder als *Fackelflächen*.

Im Hinblick auf die Deutung der Spektroheliogramme in den Linien H, K und $H\alpha$ weisen wir auf folgenden wichtigen Umstand hin. Die Beobachtungen ergeben nämlich, daß die Schichten der Chromosphäre, deren Strahlung wir wahrnehmen, um so höher gelegen sind, je näher man den zweiten Spalt des Spektroheliographen an die Linienmitte heranbringt. Vom physikalischen Standpunkt aus ist dies leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, daß der selektive Absorptionskoeffizient zur Linienmitte hin anwächst. Aus diesem Grunde hat die optische Dicke der Chromosphärengase in der Linienmitte ein Maximum, und die Strahlung aus den tieferen Schichten der Chromosphäre dringt nicht zu uns hindurch.

Die Hauptfragen, die sich bei der Deutung der Spektroheliogramme in H, K und $H\alpha$ ergeben, sind die folgenden: Welches sind die Quellen für die überschüssige Energie, die von den Gasen der Chromosphäre in den zentralen Bereichen der erwähnten Linien emittiert wird? Welches sind die Ursachen für die Linienverbreiterung dieser zusätzlichen Chromosphärenstrahlung? Auf welche Weise entsteht das zentrale Minimum K_3 in dem hellen Kern K_2? Wie stehen die Flocculi mit den tiefergelegenen Fackeln in Verbindung? Außer diesen Fragen sind noch andere von Interesse, z.B. die Frage nach der Her-

kunft der Wasserstoffwirbel in der Umgebung von Sonnenflecken usw. Auf diese Fragen werden wir jedoch hier nicht eingehen.

Wir beginnen mit der Betrachtung der Quelle für die überschüssige Energie, die von den Flocculi emittiert wird. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Die in den Flocculi emittierte Energie entsteht infolge von Fluoreszenzprozessen.

2. Die chromosphärischen Flocculi sind Gebiete, die stärker erwärmt sind als die benachbarten Bereiche der ungestörten Chromosphäre.

Die theoretischen Grundlagen für den ersten Mechanismus sind von V. A. Ambarzumjan ausgearbeitet worden [10, S. 76–80]. Er hat als erster dem Umstand Beachtung geschenkt, daß es für genügend große Werte von Q in Formel (14.29) in der Nähe der Linienmitte ein derartiges Intervall von Werten η_ν gibt, daß bei Erfülltsein der Ungleichungen $\eta_\nu \gg 1$ und $\eta_\nu \varepsilon_\nu \ll 1$ auch die Ungleichung $\eta_\nu \varepsilon Q \gg 1$ erfüllt ist. Dementsprechend nimmt r_ν die Gestalt

$$r_\nu \approx \varepsilon \eta_\nu Q \frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{\eta_\nu} + \frac{2}{3}\sqrt{3}} \frac{B_\nu(T_0)}{B_\nu(T_E)} \tag{21.26}$$

an.

Aus diesem Ausdruck folgt, daß hier r_ν mit zunehmendem η_ν wächst, d.h. kontinuierlich in dem Maße größer wird, wie man sich der Linienmitte nähert. Mit anderen Worten, in der Mitte der Absorptionslinie befindet sich eine Emissionslinie.

Unsöld hat auf die zweite Möglichkeit hingewiesen, die eine Temperaturinversion in der Chromosphäre zur Voraussetzung hat. In jüngster Zeit ist diese Hypothese von W. A. Krat [20, S. 87] und anderen untersucht worden.

Offensichtlich schließen die beiden angegebenen Mechanismen einander nicht aus. Für das Studium der physikalischen Eigenschaften der Bereiche, in denen Flocculi auftreten, ist es jedoch von größter Wichtigkeit, darüber eine Entscheidung zu treffen, welcher Mechanismus in jedem einzelnen Fall vorherrscht. Wir führen, indem wir einer Darstellung von E. R. Mustel folgen [35], die entsprechenden Rechnungen durch.

Um unsere Aufgabe zu konkretisieren, stellen wir die Frage, welcher Strahlungsmechanismus in den Linien H und K und in den Linien der Balmer-Serie im Spektrum der Flocculi ausschlaggebend ist: Rekombination oder anregende Stöße.

Wir vergleichen zunächst die Strahlung in den Linien K und Hα, wobei wir in beiden Fällen die durch Rekombination auf das obere Niveau erzeugte Strahlung als ausschlaggebenden Mechanismus ansehen. Nach (5.48) ist das Verhältnis der Zahl der Einfänge auf die entsprechenden Niveaus gleich

$$A = \frac{[N_{f\to 2}]_{\mathrm{K}}}{[N_{f\to 3}]_{\mathrm{H}\alpha}} \approx \frac{N(\mathrm{Ca\,III})}{N(\mathrm{H\,II})} \cdot \frac{[\varphi(T_\varepsilon)]_{\mathrm{K}}}{[\varphi(T_\varepsilon)]_{\mathrm{H}\alpha}}, \tag{21.27}$$

wobei N (Ca III) die Zahl der zweifach ionisierten Ca-Atome über 1 cm² der von einem Flocculum eingenommenen Fläche und N (H II) entsprechend die Zahl der Protonen ist. Die Funktion $\varphi(T_\varepsilon)$ ist die Photorekombinationswahrscheinlichkeit, die nur von der kinetischen Temperatur des Elektronengases abhängt:

$$n_e \varphi(T_\varepsilon) = \int_0^\infty \beta_\nu v \, d n_e, \qquad (21.28)$$

wobei β_ν der effektive Rekombinationsquerschnitt ist, der durch die Gleichung (5.55) definiert ist. Wir merken hierbei an, daß in Übereinstimmung mit (5.52) sich n_e auf der rechten Seite von (21.27) herauskürzt.

Der zu erwartende mittlere Wert für die Elektronentemperatur der Flocculi liegt zwischen 5000° (Grenztemperatur der Photosphäre) und 10000°. Die Funktion $\varphi(T_\varepsilon)$ hängt jedoch nur in sehr schwachem Maße von T_ε ab. Daher begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir $T_\varepsilon = 7500°$ setzen. In diesem Fall ergibt sich

$$[\varphi(T_\varepsilon)]_{\mathrm{K}} \approx 1{,}68 \cdot 10^{-13}, \; [\varphi(T_\varepsilon)]_{\mathrm{H}\alpha} \approx 5{,}0 \cdot 10^{-14}. \qquad (21.28')$$

Mit anderen Worten, es ist $A \approx 3{,}4 \, \{N \text{ (Ca III)} : N \text{ (H II)}\}$.

Wenn das Ionisationspotential für Ca II und H gleich wäre, würde das Verhältnis N (Ca III) : N (H II) in einem Flocculum etwa gleich der relativen Häufigkeit von Ca und H, d.h. größenordnungsmäßig gleich $2 \cdot 10^{-6}$–$5 \cdot 10^{-6}$ sein. (Die Zahl der neutralen Ca-Atome ist gegenüber der Zahl der Ca II-Atome in der Chromosphäre und in noch stärkerem Maße in den Flocculi verschwindend klein.) In Wirklichkeit ist dieses Potential bei Ca II um $\Delta\chi = 1{,}7$ eV kleiner als beim Wasserstoff, und folglich muß Ca II stärker ionisiert sein als der Wasserstoff. Es ist jedoch klar, daß in diesem Fall der Ionisationsgrad von Ca II (da die Differenz $\Delta\chi = 1{,}7$ eV relativ klein ist) den Ionisationsgrad des Wasserstoffs um nicht mehr als eine oder im äußersten Fall um zwei Größenordnungen übersteigen kann. Dann ist das Verhältnis A etwa gleich 10^{-3}. Wenn folglich die Strahlung in der K-Linie durch Rekombinationsprozesse bestimmt wäre, würde die Helligkeit der Hα-Linie die der K-Linie um drei Größenordnungen übertreffen. Dies steht zu den Beobachtungen im Widerspruch, weil beide Helligkeiten von der gleichen Größenordnung sind. Auf diese Weise muß die Strahlung in der K_2-Linie in den Flocculi durch Stöße der Ca II-Atome mit Elektronen bestimmt werden. Daß wir es hier nicht mit Rekombinationen zu tun haben, wird auch durch andere Rechnungen bestätigt.

Wir berechnen näherungsweise die Temperaturbedingungen, die für das Entstehen der beobachteten Strahlung in der K_2-Linie (oder H_2) erforderlich sind. Im Gleichgewichtszustand muß die Zahl $N^{\mathrm{st}}_{1\to 2}$ der anregenden Stöße gleich der Zahl $N_{2\to 1}$ der aus demselben Volumen austretenden Quanten sein. Die Zahlen $N^{\mathrm{st}}_{1\to 2}$ und $N_{2\to 1}$ mögen sich auf einen Zylinder beziehen, der sich über 1 cm² Grundfläche eines Flocculums erhebt. Dann erhalten wir nach der allgemeinen

Formel (8.21)

$$N_{1\to 2}^{\mathrm{st}} = N_1(\mathrm{Ca\,II})\, n_e \bar{q}_{12} \left(\frac{8\,k\,T_\varepsilon}{\pi m_e}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\varepsilon_{12}}{k\,T_e}\right) e^{-\frac{\varepsilon_{12}}{k T_\varepsilon}}, \tag{21.29}$$

wobei N_1 (Ca II) die Zahl der Ca II-Atome im ersten Zustand ebenfalls über 1 cm² Grundfläche eines Flocculums, $\bar{q}_{12}$ der mittlere effektive Querschnitt für anregende Stöße, den wir vorläufig zu 10^{-16} cm² annehmen, und endlich ε_{12} die Anregungsenergie sind. Den Wert $N_{2\to 1}$ können wir unmittelbar aus den Beobachtungen bestimmen. Diese zeigen, daß die Strahlungsintensität in der K_2-Linie schwach vom Winkel ϑ abhängt. Mit anderen Worten, diese Intensität ist praktisch über der gesamten Scheibe konstant:

$$N_{2\to 1} \approx 4\pi \int I_\lambda \frac{d\lambda}{h\nu}, \tag{21.30}$$

wobei sich die Integration über die gesamte K_2-Linie (oder H_2) erstreckt.

Die Bestimmung von N_1 (Ca II) aus der ausgemessenen Kontur der K_2-Linie kann mit Hilfe der Formel (20.3) geschehen, die unter der Voraussetzung der Konstanz des Verhältnisses $P_\nu = j_\nu : s_\nu$ die Gestalt

$$I_\nu = \bar{P}_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}) \tag{21.31}$$

oder, wenn s_ν von der Tiefe unabhängig ist,

$$I_\nu = \overline{P_\nu} (1 - e^{-N \bar{s}_\nu}) \tag{21.32}$$

annimmt.

Der Absorptionskoeffizient $\bar{s}_\nu$ für die Linien K_2 und H_2 wird im wesentlichen durch den DOPPLER-Effekt bestimmt. Hierbei sind zwei Grenzfälle zu betrachten:

1. Die Strahlung in den Linien K_2 und H_2 entsteht vorwiegend in den unteren Schichten der Chromosphäre;
2. sie entsteht in den hohen Schichten der Chromosphäre.

Im ersten Fall können wir die Turbulenz vernachlässigen, und die Breite $\Delta\lambda_D$ wird durch rein thermische Bewegungen bestimmt. Im zweiten Fall muß man auch die turbulenten Bewegungen berücksichtigen, deren Geschwindigkeiten – wie wir schon gesagt haben – größenordnungsmäßig gleich 15 km/sec sind.

Im ersten Fall ergibt die „Anpassung" der theoretischen Formel (21.32) an die Beobachtungen die Zahlen N_1 (Ca II) $\approx 10^{16} - 2 \cdot 10^{16}$. Im zweiten Fall erhält man N_1 (Ca II) $\approx 2 \cdot 10^{13}$.

Für n_e können wir als Maximalwert $5 \cdot 10^{11}$ annehmen. Dabei entspricht $n_e \approx 10^{12}$ den schwachen und $n_e \approx 3 \cdot 10^{12}$ den starken chromosphärischen Eruptionen.

Ferner kann T_ε in den Flocculi 7500° nicht beträchtlich übersteigen. Eine Temperaturerhöhung in der Chromosphäre (in ihren unteren und mittleren Schichten) bis 10000° würde, insbesondere in der Nähe des Maximums der

Sonnentätigkeit, wenn die von den Flocculi eingenommene Fläche bisweilen nur um eine Größenordnung kleiner ist als die Gesamtfläche der Sonnenscheibe, eine überaus starke Zunahme der Ionisation der Ionosphäre, eine starke Vergrößerung der Radiostrahlung usw. herbeiführen. Daher nehmen wir fürs erste $T_\varepsilon = 7500°$ an.

Wenn wir die angegebenen Zahlenwerte benutzen, finden wir, daß bei N_1 (Ca II) $= 2 \cdot 10^{16}$ die Größe $N^{\text{st}}_{1\to 2} = 2{,}5 \cdot 10^{18}$ und bei N_1 (Ca II) $= 2 \cdot 10^{13}$ gleich $2{,}5 \cdot 10^{15}$ ist. Andererseits erhalten wir für ein mittleres Flocculum mit einer zentralen Restintensität der Linien K_2 und H_2 von etwa 0,3 auf Grund von (21.30) für $N_{2\to 1}$ den Wert 10^{18}. Aus dem Vergleich der erhaltenen Angaben folgt, daß erstens die Kalzium-Flocculi in den unteren Schichten der Chromosphäre mit geringer Turbulenz gelegen sind (es ist leicht zu zeigen, daß diese Schlußfolgerung auch bei unendlich hoher Temperatur erhalten bliebe) und daß zweitens die Temperatur $T_\varepsilon \approx 7500°$ zur Erzeugung der notwendigen Strahlung in den Linien K_2 und H_2 völlig ausreicht.

Die erste der genannten Folgerungen stimmt mit den unmittelbaren Messungen überein, die für die K_2-Flocculi eine Höhe von 1300 km ergeben. Was die zweite Folgerung anbetrifft, so ist folgendes zu bemerken: Die vorliegenden Daten zeigen, daß bei der Gruppe der Erdalkalien, zu der die Ca II-Atome gehören, $\bar{q}$ für die Resonanzlinien beträchtlich größer ist als der gewöhnliche gaskinetische Querschnitt, der größenordnungsmäßig 10^{-16} cm² beträgt, und Werte von 10^{-15}–10^{-14} cm² annehmen kann. In diesem Fall erniedrigt sich bedeutend die zur Erzeugung der beobachteten Strahlung in der K_2-Linie notwendige Temperatur bis auf Werte von 5000°–6000°. Aus zahlreichen Überlegungen ergibt sich, daß diese Temperaturen der Wirklichkeit erheblich näher kommen als die Temperatur 7500°.

Wenden wir uns nun der Frage nach der Herkunft der zentralen Linien K_3 und H_3 zu. Ihr Auftreten muß mit dem schnellen Abfall von P_ν in den Flocculi nach außen zusammenhängen. Man kann sich leicht durch unmittelbare, auf die Formel (20.3) zurückgehende Rechnungen davon überzeugen, daß diese Erscheinung tatsächlich zum Auftreten eines dunklen Kerns führt. Dieser Schluß stimmt mit den schon zitierten Resultaten von Waldmeier (siehe § 19) überein, der gefunden hat, daß in den Fackeln, d.h. unmittelbar unter den Flocculi, beginnend mit der mittleren optischen Dicke $\tau \approx 0{,}6$, die Größe P_ν ebenfalls nach außen hin abnimmt. Somit scheinen die Flocculi und Fackeln nicht nur infolge ihrer benachbarten Lage zueinander, sondern auch wegen der allgemeinen thermischen Bedingungen in Verbindung zu stehen.

Wir betrachten jetzt die Frage, wodurch die Strahlung in der Hα-Linie der Flocculispektren bestimmt wird. Diese Frage ist bei weitem komplizierter als die gleiche Frage bei den Ca II-Linien H_2 und K_2. Für den Vergleich des Einflusses der Rekombinationen und der Anregung durch Stöße muß N_1 (H), die Zahl der neutralen Wasserstoffatome im Grundzustand über 1 cm² Grundfläche eines Flocculums, bekannt sein. (Die Zahl der anregenden Stöße im zweiten Niveau ist sehr klein.) Wie man leicht einsieht, ist aber die Bestimmung dieser Größe mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Wenn das

untere Niveau des Flocculums ungefähr mit dem unteren Niveau der ungestörten Chromosphäre zusammenfällt, zeigen die Rechnungen, daß die Rekombinationen und die anregenden Stöße bei $T_\varepsilon \approx 7500°$ für die Erzeugung der Hα-Strahlung etwa den gleichen Einfluß besitzen. Wir haben aber gesehen, daß T_ε in den Flocculi anscheinend niedriger als 7500° ist. In diesem Fall muß der Einfluß der Rekombinationen größer sein als der Einfluß der anregenden Stöße. Dies erklärt möglicherweise auch das mitunter sehr verschiedene Aussehen der Flocculi, die in den Linien Hα und K_2 aufgenommen sind. Daß bei der Hα-Linie die Rekombinationen und nicht die Stöße der Hauptfaktor sind, wird auch durch die folgenden Überlegungen nahegelegt:

1. Die große zentrale Restintensität der Hα-Linie in den gewöhnlichen, ungestörten Gebieten der Sonnenscheibe (etwa 0,20) ist ohne Zweifel durch Rekombination bedingt. Die anregenden Stöße können in den unteren und den mittleren Schichten der Chromosphäre keinen bedeutenden Einfluß besitzen (verhältnismäßig niedrige T_ε und n_e). Dies spricht dafür, daß überhaupt in der Chromosphäre (und in ihren „gestörten" Gebieten) die Rekombinationen zu den Hauptfaktoren zählen.

2. Selbst in den ungestörten Bereichen der Sonne ist die Ionisation der Chromosphäre anomal hoch, und noch größer ist sie in den Gebieten der Flocculi. In Übereinstimmung mit der Formel (19.16) bedeutet dies, daß jenseits der Grenze der Lyman-Serie Q aus dem Ausdruck (14.30) sehr groß sein kann. Zugleich muß für die Hα-Linie auch ε relativ groß sein (während diese Größe bei den Linien H und K, wie wir gesehen haben, außerordentlich klein ist). Folglich muß hier der Einfluß der Einfänge auf das dritte Niveau tatsächlich groß sein.

Wir wenden uns jetzt der letzten Frage zu, der Frage nach der Entstehung der erhöhten kinetischen Temperatur in den Flocculi und der anomalen Ionisation des Wasserstoffs.

Man könnte annehmen, daß diese Erscheinungen mit der anomal starken Strahlung der Korona über den Fackeln (und den Flocculi) zusammenhängen. Die anomal starke ultraviolette Koronastrahlung ionisiert den Wasserstoff in der Chromosphäre, was seinerseits eine Erhöhung der kinetischen Temperatur der Elektronen zur Folge hat. Wir müssen jedoch beachten, daß mit den Flocculi physikalisch auch die tiefer gelegenen Fackeln zusammenhängen. Für die letzteren kann aber die erwähnte „Ultraviolett-Theorie" keine Realität besitzen, da die optische Dicke der Fackeln im ultravioletten Spektralbereich sehr groß ist.

Im Gegensatz zu unseren obigen Ausführungen können wir annehmen, daß die anomalen Bedingungen in den Flocculi, der anomale Temperaturgradient in den Fackeln (Strahlungs- und konvektives Gleichgewicht fehlen dort), die anomale Ionisation von Ca II und anderer Elemente in den Fackeln, also all dies durch die Einlagerung von sehr heißer Koronamaterie, die neben der Chromosphärenmaterie mit niedriger Temperatur existiert, in die fraglichen Gebiete hervorgerufen wird. Der Einfluß der Koronamaterie auf die Materie von niedriger Temperatur muß sich am stärksten bei den hohen Anregungs- und Ioni-

sationsenergien äußern. Dies ist auch wirklich der Fall. Eine solche Koexistenz zweier verschiedener „Phasen" des Zustandes der Materie beobachtet man z. B. in den Protuberanzen. Die aufgestellte Hypothese stimmt damit überein, daß die monochromatische Koronastrahlung gerade über den Fackelgebieten beträchtlich stärker ist.

8. Die chromosphärischen Eruptionen

Zum Schluß dieses Paragraphen gehen wir kurz auf die chromosphärischen Eruptionen ein. Als *chromosphärische Eruption* bezeichnet man eine fast plötzliche Helligkeitszunahme von einzelnen Bereichen der Sonnenoberfläche, die man am häufigsten in der $H\alpha$-Linie beobachtet, die aber auch in gewissen anderen Linien des Sonnenspektrums, z. B. in den Linien von He I, Ca II, Fe II, Si II, Ti II, Sr II, Sc II usw., auftreten. Eine Verstärkung des kontinuierlichen Spektrums im Bereich einer Eruption wird sehr selten beobachtet.

Die Eruptionen treten in Gebieten auf, die von hellen Flocculi – in der Regel in der Nähe von Sonnenflecken – eingenommen werden. Die von einer Eruption eingenommene Fläche ist in den verschiedenen Fällen unterschiedlich und erreicht 0,005 der Sonnenscheibe.

Anscheinend ist die gesamte Materie, die die Erscheinung der Eruption bewirkt, innerhalb der Chromosphäre lokalisiert. Es ist jedoch möglich, daß in vielen Fällen die Materie einer Eruption über der Chromosphäre (in Gestalt einer „Protuberanz") gelegen ist.

Die Helligkeitszunahme geht bei einer Eruption sehr schnell vor sich, während sich der Helligkeitsabfall (mit wenigen Ausnahmen) langsamer vollzieht.

Die Linienkontur von $H\alpha$ im Spektrum einer Eruption ist in Abb. 51 dargestellt. Diese Abbildung entspricht einer Eruption von mäßiger Helligkeit. Bei starken Eruptionen kann die Helligkeit der zentralen Umkehr um das Anderthalbfache oder mehr als das Doppelte die Helligkeit des benachbarten Spektrums übertreffen.

Das Studium der Spektren der Eruptionen zeigte, daß die helle Umkehr in $H\alpha$ und in anderen Linien nicht gegenüber der normalen Lage der entsprechenden Linien verschoben ist. Mit anderen Worten, die leuchtende Materie in einer Eruption besitzt keine merkliche Radialgeschwindigkeit. Möglicherweise findet in einigen Fällen eine Bewegung der Materie über der Photosphäre in einem sehr frühen Stadium der Entstehung der Eruption statt, jedoch bringt die kurze Zeitdauer dieses Stadiums große Beobachtungsschwierigkeiten mit sich.[1]) Die Eruptionen sind auch in der horizontalen Ebene unbewegliche Gebilde.

Aus den Gebieten, in denen eine hinreichend helle Eruption erscheint, tritt gewöhnlich eine Protuberanz (oder mehrere) aus, die man zur Klasse der rückkehrenden Protuberanzen zählen kann. Es zeigt sich nämlich, daß sich die ausgeschleuderte Materie mit großer Geschwindigkeit bis zu einer gewissen Höhe

[1]) Über einen derartigen Fall siehe H. DODSON and R. MACMATH. The limb flare of may 8, 1951. Astrophysical Journal **115**, 78, 1952.

aufwärts bewegt und hierauf auf derselben Bahn nach unten zurückkehrt. In der Projektion auf die Sonnenscheibe ist diese Materie im Lichte der Hα-Linie als dunkler Fleck auf dem helleren Hintergrund der Scheibe sichtbar. Bisweilen kehrt jedoch die fortgeschleuderte Materie nicht zurück.

Gewöhnlich sind die chromosphärischen Eruptionen von einer plötzlichen Unterbrechung des Empfanges der kurzen Radiowellen begleitet. Wenn außerdem die Eruption in den zentralen Gebieten der Sonnenscheibe stattfindet (vom Mittelpunkt der Sonnenscheibe nicht mehr als 45° abweichend) und wenn sie genügend hell ist, beobachtet man etwa 24 Stunden nach dem Auftreten der Eruption eine Störung des Magnetfeldes der Erde und eine Störung der Funkverbindung.

Nach dieser kurzen Vorbemerkung betrachten wir einige Probleme der Physik der chromosphärischen Eruptionen. Zunächst wenden wir uns den Linien der BALMER-Serie im Spektrum der Eruptionen zu.

Aus den Beobachtungen geht hervor, daß im Spektrum von genügend starken Eruptionen praktisch alle Linien der BALMER-Serie eine helle Umkehr erfahren. Am stärksten ist sie bei Hα. Bei sehr hellen Ausbrüchen erstreckt sich diese Umkehr in Hα auf einen großen Wellenlängenbereich, so daß die Gesamtbreite der „Flügel" dieser Umkehr 16 Å erreicht. In der Abb. 58 a ist die Kontur der Hα-Strahlung für die große chromosphärische Eruption vom 5. VIII. 1949 dargestellt. Sie ist von A. B. SEWERNY und E. R. MUSTEL aus Spektren abgeleitet worden, die sie am Astrophysikalischen Observatorium auf der Krim aufgenommen haben. Diese Kontur (ihre „rote" Hälfte) wurde dadurch ermittelt, daß man die Intensität der Hα-Strahlung im Spektrum der ungestörten Bereiche der Sonnenoberfläche von den in der Eruption beobachteten subtrahierte. Wir sehen, daß sich die Flügel der Hα-Linie in Emission bis zu 6–7 Å, von der Linienmitte aus gerechnet, erstrecken. Die Linien Hβ, Hγ,... sind in den Spektren der Eruptionen beträchtlich schmaler. In Abb. 58b sind die Konturen der Emissionslinien Hε und H 2 im Spektrum derselben Eruption dargestellt. Die Gesamtbreite von Hε beträgt hier nur etwa 2–3 Å. Mit dem Buchstaben (H) ist hier die Strahlung bezeichnet, die von der bei dem Ausbruch emporgeschleuderten rückkehrenden Protuberanz in der H-Linie erzeugt wird.

Im Zusammenhang mit den dargelegten Tatsachen erheben sich zwei grundlegende Fragen: erstens, wodurch ist die überaus starke Verbreiterung der Emissionslinie Hα in den Ausbrüchen bedingt, und zweitens, weshalb sind die Emissionslinien Hβ, Hγ,... schmaler als die Linie Hα? E. R. MUSTEL und A. B. SEWERNY[1]) haben gezeigt, daß die Flügel der Hα-Linie in Emission durch die gewöhnliche Strahlungsdämpfung, während die Verbreiterung der Linien Hγ, Hδ, Hε, ... durch den DOPPLER- und den STARK-Effekt hervorgerufen werden.

---

[1]) E. R. MUSTEL und A. B. SEWERNY, Untersuchung von Spektren einer großen chromosphärischen Eruption auf der Sonne. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR **80**, 867, 1951 (Э. Р. Мустель и А. Б. Северный, Исследование спектров большой хромосферной вспышк на Солнце. Доклады Академии наук СССР **80**, 867, 1951).

Diese Annahme erklärt die Konturen aller erwähnten Linien in den Eruptionsspektren vollständig (mit Ausnahme der Linienmitte von Hγ, Hδ, Hε, wo man durch die Voraussetzung über die Konstanz von P_ν mit der Tiefe beträcht-

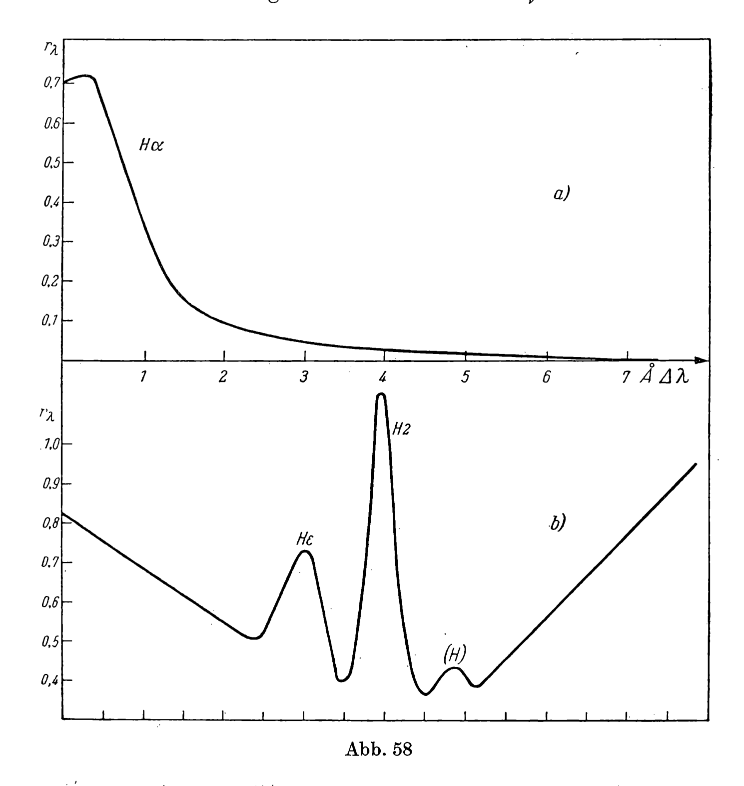


Abb. 58

liche Fehler begeht). Hierbei erwies es sich als notwendig, die Selbstabsorption in den zentralen Teilen der Linien zu berücksichtigen, die bei der Linie Hα besonders stark ist.

Die theoretischen Konturen wurden mit Hilfe der Formel (21.32) berechnet. Im Falle der Dämpfung und des DOPPLER-Effektes (für Hα) bestimmt sich der Koeffizient s_ν durch die Formel (11.39), in die $\Delta\nu_D$ als Parameter eingeht.

Andererseits wird s_ν für die Linien Hγ, Hδ, Hε durch das gleichzeitige Wirken des DOPPLER- und des STARK-Effektes bestimmt.[1] Auf diese Weise

[1] Über eine Tabelle der s_ν-Werte für die Linien Hα–Hδ siehe S. VERWEJ, The stark effect of hydrogen in stellar spectra. Publ. Astron. Inst. Amsterdam, Nr. 5, 1936.

müssen wir die Gesamtheit der Emissionskonturen Hα, Hβ, Hγ, Hδ, Hε, ... durch eine geeignete Wahl dreier Parameter erklären: N_2, n_e und $\Delta\nu_D$, wobei N_2 die Zahl der Wasserstoffatome im zweiten Anregungszustand über 1 cm^2 der unteren Grundfläche der Eruption ist.

Für die Eruption vom 5. VIII. 1949 ergab es sich, daß in den hellsten Stellen $N_2 = 1{,}3 \cdot 10^{16}$ und $n_e \approx 3 \cdot 10^{12}$ war; $\Delta\nu_D$ entsprach einer Temperatur $T \approx 11000°$.

Wenn wir die absolute Strahlungsintensität in den Linien Hα, Hβ, ... kennen, können wir auch N_3, N_4, ..., d.h. die Zahl der emittierenden Atome in den entsprechenden Quantenzuständen, bestimmen. Als Beispiel betrachten wir die Linie Hα.

Nach (20.1) bestimmt sich die Gesamtintensität in Hα wie folgt:

$$I_{23} = \frac{N_3 A_{32} h\nu_{23}}{4\pi}, \tag{21.33}$$

wobei hier der Fall mit fehlender Selbstabsorption gemeint ist.

Wenn für Emissionsprozesse (wie auch für Absorptionsprozesse) die Strahlungsdämpfung und der DOPPLER-Effekt maßgebend sind, wird das Gesetz, das die Verteilung der emittierten Energie I_{23} mit der Frequenz angibt, durch die Formel (11.39) bestimmt. Nach den im Hinblick auf diese Formel gemachten Ausführungen nimmt das gesuchte Gesetz für den Fall $a \ll 1$ die Gestalt

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Delta\nu_D}\left[e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2} + \frac{\delta_{ik}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Delta\nu_D}{(\nu-\nu_0)^2}\right] \tag{21.34}$$

an, wobei

$$\int_0^\infty \varphi(\nu)\,d\nu = 1. \tag{21.35}$$

Somit ist I_ν für eine beliebige Frequenz ν gleich

$$I_\nu = \frac{N_3 A_{32} h\nu_{23}}{4\pi\sqrt{\pi}\,\Delta\nu_D}\left[e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2} + \frac{\delta_{ik}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Delta\nu_D}{(\nu-\nu_0)^2}\right]. \tag{21.36}$$

Für die äußersten Bereiche der Flügel spielt das erste Glied überhaupt keine Rolle. In diesem Fall besitzt I_ν die Gestalt

$$I_\nu = \frac{N_3 A_{32} h\nu_{23}}{4\pi^2}\frac{\delta_{ik}}{(\nu-\nu_0)^2}. \tag{21.37}$$

Wenn wir demnach aus den Beobachtungen in den Flügeln I_ν ermitteln, können wir N_3 bestimmen. Für die Eruption vom 5. VIII. 1949 fand man auf diese Weise $N_3 \approx 3 \cdot 10^{14}$. Dieser Wert ist ungefähr um zwei Größenordnungen größer als in der gewöhnlichen Chromosphäre.

Der Vergleich der Energien, die in der Linie Hα in einer Eruption und in der Chromosphäre emittiert werden, zeigt, daß die Erhöhung dieser Energie in

einer Eruption das unmittelbare Ergebnis des Anwachsens von n_e ist und daß dieses entsprechend (21.21) eine Zunahme der Zahl der Rekombinationsprozesse nach sich zieht. Somit haben wir es bei einer Eruption einfach mit einer verstärkten Ionisation des Wasserstoffs zu tun.

Weil in den hellen Eruptionen N_2 sehr groß ist, strahlen die Eruptionen in der Linie Lα eine große Energiemenge aus, die völlig ausreicht, um die beobachteten Änderungen im Zustand der Erdionosphäre hervorzurufen. Außerdem sind die Intensität und die Breite der Linie Lα in den hellen Eruptionen so beschaffen, daß unter der Einwirkung des Strahlungsdruckes aus den Gebieten der Eruptionen Wasserstoffatome mit großer Geschwindigkeit (bis zu 1000–3000 km/sec) ausgeschleudert werden.

Die von einer Eruption im ultravioletten Spektralbereich emittierte Energie kann die Atome in der umkehrenden Schicht ionisieren. Dies ist durch Ergebnisse von E. R. Mustel und A. B. Sewerny[1]) unmittelbar bestätigt worden.

Die Frage nach der Herkunft der Eruptionen ist bisher noch nicht geklärt. Wir können jedoch auf zwei Möglichkeiten hinweisen:

1. Eine Eruption ist ihrer Natur nach eine elektrische Entladung in der Chromosphäre; dies führt zu einer Erhöhung der Elektronentemperatur und zu einer verstärkten Ionisation des Wasserstoffs.

2. Eine Eruption ist ein plötzliches Emporsteigen von Koronamaterie von unten her in die Chromosphäre und eine verstärkte Ionisation der Chromosphäre im Bereich der Eruption (siehe das gleiche bei den Flocculi).

Welche dieser beiden Hypothesen der Wirklichkeit am meisten entspricht, ist fürs erste schwer zu sagen. Hierzu sind noch weitere Untersuchungen erforderlich.

§ 22. Die Korona und die Radiostrahlung der Sonne

1. Allgemeine Beschreibung und Spektren

Den Teil der Sonnenatmosphäre, der am weitesten nach außen liegt und die größte Ausdehnung besitzt, die *Korona*, konnte man lange Zeit nur bei totalen Sonnenfinsternissen beobachten. Dies erklärt sich daraus, daß die Flächenhelligkeit der Korona etwa um das Millionenfache geringer ist als die Helligkeit der Photosphäre. Auf photographischen Aufnahmen besitzt die Korona eine komplizierte Struktur. Wie A. P. Hanski gezeigt hat, hängt die Form der Korona von der Phase im Zyklus der Sonnentätigkeit ab: im Maximum umgibt die Korona die Sonnenscheibe fast gleichmäßig, während sie im Minimum

[1]) E. R. Mustel und A. B. Sewerny, Spektralphotometrie von chromosphärischen Eruptionen. Mitteilungen des Astrophysikalischen Observatoriums auf der Krim **5**, 3, 1950 (Э. Р. Мустель и А. Б. Северный, Спектрофотометрия хромосферных вспышек. Известия Крымской астрофизической обсерватории **5**, 3, 1950).

an den Polen abgeplattet ist. Die allgemeine Koronahelligkeit ändert sich nach W. B. NIKONOW und E. K. NIKONOWA[1]) ebenfalls mit der Phase. Für die Korona ist eine strahlenförmige Struktur charakteristisch. Es heben sich besonders hervor die *Polstrahlen*, die in ihrer Form den Kraftlinien einer magnetisierten Kugel ähneln, die kräftigen *geraden Strahlen* über den Fackeln mit chromosphärischen Eruptionen an der Basis und die *Strahlen über den Flecken*, die an ihrer Basis von den Flecken nach den Seiten hin abgelenkt werden und sich oben wiederum annähern. Die Protuberanzen sind gewöhnlich von kuppelförmigen Hüllen umgeben, über denen sich *helmartige Strahlen* erheben. Diese spalten sich wiederum in *Strahlen* auf, zwischen denen eine geringe Materiedichte vorhanden ist. Die Struktur der Korona ist von sowjetischen Forschern eingehend untersucht worden [38], [39].

Die Farbe der Korona ist im großen und ganzen etwa dieselbe wie die der Sonne. G. A. TICHOW stellte jedoch fest, daß die äußeren Bereiche der Korona gegenüber der Photosphäre (mit Ausnahme der Strahlen) leicht gerötet sind.

Das Spektrum der inneren Bereiche der Korona ist ein kontinuierliches Spektrum, in dem sich helle Linien überlagern; gegenwärtig sind 24 Koronalinien bekannt.

Die Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Korona ist angenähert dieselbe wie die der Sonne. Aus den hellen Linien ragen besonders die grüne Linie 5303 Å und in einzelnen Bereichen die rote Linie $\lambda = 6374$ Å hervor. Diese Linien sind so hell, daß es LYOT im Jahre 1930 gelang, sie bei Beobachtungen der inneren Korona außerhalb einer Finsternis aufzufinden. Während der Beobachtungen wurden sorgfältige Maßnahmen getroffen, um das Streulicht der Sonne im Instrument zu verringern. Der Koronograph selbst wurde im Gebirge aufgestellt, um die Störungen durch das Streulicht der Atmosphäre herabzusetzen.

Die Beobachtungen außerhalb von Finsternissen zeigten, daß die grüne und die rote Linie in gesonderten Bereichen der Korona stark sind, die man als *grüne* und *rote Bereiche* bezeichnet. Sie sind um die aktiven Gebiete der Sonne konzentriert, wobei ihr Zusammenhang mit den Flecken und anderen Gebilden auf der Sonnenoberfläche deutlich ausgeprägt ist. In höheren Breiten ($\varphi > 60°$) beobachtet man die grüne Linie selten. An den Polen verschwindet auch die rote Linie.

In der äußeren Korona (im Abstand 0,2–0,3 $R_\odot$ von der Sonnenoberfläche) werden die Emissionslinien im Vergleich zum kontinuierlichen Spektrum schwächer, und es treten Absorptionslinien auf, die etwa die gleiche Breite wie im Sonnenspektrum, doch eine viel geringere Tiefe besitzen. Aus empirischen Überlegungen hat man gefunden, daß man das Koronaspektrum als Über-

---

[1]) W. B. NIKONOW und E. K. NIKONOWA, Absolute lichtelektrische Photometrie der Sonnenkorona während der totalen Sonnenfinsternis vom 9. Juli 1945. Mitteilungen des Astrophysikalischen Observatoriums auf der Krim I, 83, 1947 (В. Б. Никонов и Е. К. Никонова, Абсолютная электрофотометрия солнечной короны во время полного солнечного затмения 9 июля 1945г., Известия Крымской астрофизической обсерватории I, 83, 1947).

lagerung zweier Spektren auffassen kann: der FRAUNHOFERschen Komponente, in der die Absorptionslinien die gleiche Tiefe wie im Sonnenspektrum besitzen, und der Nicht-FRAUNHOFERschen-Komponente, in der überhaupt keine Absorptionslinien auftreten.

Die Energieverteilung in der Nicht-FRAUNHOFERschen Komponente des Spektrums ist etwa gleich der Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Sonne, wobei im violetten Spektralbereich eine gewisse Intensitätsabnahme festgestellt wird. Die Koronastrahlung ist zum Teil polarisiert. Gegenwärtig nimmt man als fest gesichert an, daß die Nicht-FRAUNHOFERsche Strahlung der Korona durch die Streuung des Lichtes der Photosphäre an freien Elektronen zustande kommt. Bekanntlich streut ein freies Elektron den Bruchteil ds_e der auffallenden Strahlung in eine vorgegebene Richtung

$$ds_e = \frac{e^4}{2m^2c^4}(1 + \cos^2\theta)\,d\omega. \tag{22.1}$$

Der effektive Gesamtquerschnitt oder der Streukoeffizient ist gleich

$$s_e = \int d\,s_e = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2, \tag{22.2}$$

so daß s_e nicht von der Wellenlänge abhängt. Das gestreute Licht ist vollständig polarisiert, wenn der Ablenkungswinkel des Quants von der ursprünglichen Richtung, der Streuwinkel, $\theta = 90°$ beträgt, und es ist nicht polarisiert, wenn $\theta = 0$ oder $\theta = 180°$ ist. Bei den übrigen Werten von θ tritt nur eine teilweise Polarisation auf.

Mit wachsendem Abstand von der Sonnenoberfläche nähert sich θ 90°, und die Polarisation der Nicht-FRAUNHOFERschen Komponente vergrößert sich.

Die Korona besteht aus ionisierten Gasen, die als ganzes neutral sind, da wegen der hohen Leitfähigkeit der Sonnenatmosphäre sich keine merkliche Raumladung ausbilden kann. Die negativen Ladungen der Elektronen kompensieren genau die positiven Ladungen der Ionen. Dies sind hauptsächlich Protonen, da die Sonnenatmosphäre in der Hauptsache aus Wasserstoff besteht. Über die chemische Zusammensetzung der Korona werden wir weiter unten sprechen.

Das Fehlen von Absorptionslinien im Spektrum der inneren Korona erklärt sich aus der Verschmierung der Linien, die durch die große DOPPLER-Verbreiterung bei der Streuung des Lichtes an den schnell bewegten Elektronen hervorgerufen wird.

Tatsächlich streut jedes Elektron die Strahlung nichtselektiv, wenn es gegenüber der Quelle (Sonne) und dem Beobachter ruht. Wenn sich das Elektron bewegt, unterscheidet sich die Frequenz des gestreuten Lichtes von der Frequenz der auffallenden Strahlung um eine Größe, die durch die Geschwindigkeit des Elektrons relativ zur Sonne und zum Beobachter bestimmt wird. Für die Verschmierung der schwachen Linien reicht eine Geschwindigkeit aus, die der Grenztemperatur der Sonne, d. h. 5000°, entspricht. G. A. SCHAIN

[37] hat jedoch gezeigt, daß man selbst in der inneren Korona von den stärksten Linien H und K von Ca II keine Spur beobachtet. Wie man leicht nachrechnen kann, ist für eine derartige Verschmierung eine Dispersion der Elektronengeschwindigkeiten erforderlich, die einer kinetischen Temperatur von mehr als 600000° entspricht.

Die FRAUNHOFERsche Komponente der Koronastrahlung wird durch Streuung des Sonnenlichtes an kleinen, festen Staubpartikeln hervorgerufen, die sich im interplanetaren Raum bewegen. Die Streuung des Sonnenlichtes an diesen Staubpartikeln erzeugt das Zodiakallicht. In unmittelbarer Nähe der Sonne können diese Staubpartikeln nicht existieren, da sie verdampfen. Die trotzdem zu beobachtende Helligkeitszunahme der FRAUNHOFERschen Komponente der Korona in Richtung zur Sonne (in der inneren Korona beobachtet man – ungeachtet ihrer größeren Helligkeit – die FRAUNHOFERsche Komponente nicht, da die Helligkeit der Elektronenkomponente dort in viel stärkerem Maße anwächst) erklärt sich aus dem besonderen Charakter der Streuung [4, S. 68]. Die Streuindikatrix besitzt ein scharfes Maximum in Richtung des auf die Staubpartikeln einfallenden Lichtes. Daher sehen wir das Licht, das an den zwischen der Sonne und der Erde befindlichen Staubpartikeln gestreut wird. Um die Staubpartikeln zu „erkennen", die einen großen Winkelabstand von der Sonne besitzen, müssen wir das Licht auffangen, das unter einem großen Winkel gestreut wird. Der „effektive Querschnitt" dieser Streuung ist aber sehr klein.

Eine analoge Theorie, die gegenwärtig allgemein anerkannt ist, vermag die beobachteten Eigenschaften der FRAUNHOFERschen Komponente der Koronastrahlung gut zu erklären: Die Unabhängigkeit der Helligkeit vom Positionswinkel, der langsame Helligkeitsabfall mit der Entfernung, die leichte Rötung gegenüber der Farbe der Sonne, das Fehlen einer Polarisation. Somit emittiert die Korona selbst nur die Nicht-FRAUNHOFERsche Komponente. Diese werden wir im folgenden behandeln.

2. Die Elektronenkonzentration

Es ist selbstverständlich, daß wir uns die Aufgabe stellen müssen, die Elektronenkonzentration zu ermitteln, die die beobachtete Helligkeit des kontinuierlichen Spektrums der Korona bestimmt. Bedauerlicherweise liegen nur wenige Koronabeobachtungen vor, die für eine photometrische Bearbeitung geeignet sind.

BAUMBACH untersuchte photometrisches Beobachtungsmaterial von 10 Finsternissen und leitete eine über alle Beobachtungen und alle Positionswinkel gemittelte Helligkeitsverteilung der Korona (unter Einschluß der FRAUNHOFERschen Komponente) in Abhängigkeit von ϱ, der Entfernung vom Sonnenmittelpunkt in Einheiten des Sonnenradius, ab.

Diese Verteilung wird durch die empirische Formel

$$I(\varrho) = \frac{0{,}0532}{\varrho^{2,5}} + \frac{1{,}425}{\varrho^{7}} + \frac{2{,}565}{\varrho^{17}} \tag{22.3}$$

dargestellt. Als Einheit wurde der millionste Teil der Helligkeit in der Mitte der Sonnenscheibe gewählt. Da die Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Sonne und der Korona nahezu gleich ist, gilt die Beziehung (22.3) für alle Frequenzen im sichtbaren Spektralbereich.

Die Koronahelligkeit ist in starkem Maße sowohl von der Phase des Zyklus der Sonnenaktivität als auch vom Positionswinkel abhängig; daher gibt (22.3) nur einen genäherten mittleren Wert für $I\ (\varrho)$ an.

Die Flächenhelligkeit (Intensität) $I\ (\varrho)$ und der Emissionskoeffizient für das Einheitsvolumen $j(r)$ stehen über eine Integralgleichung zueinander in Beziehung:

$$I(\varrho) = \int_{-\infty}^{\infty} j(r)\, dy, \tag{22.4}$$

wenn man die Korona als kugelsymmetrisch und die Streuung als isotrop annimmt (d.h. die Abhängigkeit ds_e von θ vernachlässigt). Durch Auflösung der Integralgleichung (22.4), die der Gleichung (21.6) ähnlich ist, und unter Berücksichtigung der größeren Ausdehnung der Korona finden wir für $j(r)$ den Ausdruck

$$j(r) = \frac{0{,}0304}{r^{3,5}} + \frac{1{,}452}{r^8} + \frac{4{,}157}{r^{18}}. \tag{22.5}$$

Gleichzeitig kann man $j(r)$ die Gestalt

$$j(r) = s_e R_\odot n_e(r) \int \frac{I_\odot d\omega}{4\pi} \tag{22.6}$$

geben. Der Faktor $R_\odot$ (der Sonnenradius in Zentimetern) tritt auf der rechten Seite deshalb auf, weil wir als Längeneinheit den Sonnenradius benutzt haben. Die Integration ist über φ von 0° bis 2π und bei der zweiten sphärischen Koordinate ψ von 0° bis ψ_0, dem halben Winkel, unter den man die Sonne von dem in der Entfernung r vom Sonnenmittelpunkt gelegenen Punkt P aus sieht, zu erstrecken. Für die Intensität $I_\odot$ der einfallenden Strahlung setzen wir den Ausdruck (4.34) an, der die Randverdunkelung der Sonne berücksichtigt:

$$I_\odot = I_\odot^0 (1 - u + u \cos\vartheta). \tag{22.7}$$

Aus weiteren Rechnungen erhielt BAUMBACH für $n_e(r)$ folgende Formel

$$n_e(r) = \frac{1}{R_\odot \dfrac{8\pi e^4}{3m^2c^4}} \times \frac{\dfrac{0{,}0304}{r^{3,5}} + \dfrac{1{,}45}{r^8} + \dfrac{4{,}16}{r^{18}}}{\dfrac{1}{2} I_\odot^0 \left\{(1-u)\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{r^2}}\right) + \dfrac{1}{2} u \left[1 - r\left(1 - \dfrac{1}{r^2}\right) \ln \sqrt{\dfrac{r+1}{r-1}}\right]\right\}}, \tag{22.8}$$

die er, indem er $u = 0{,}8$ annahm (photographischer Spektralbereich), durch die einfachere Interpolationsformel

$$n_e(r) = 10^8\left(\frac{0{,}036}{r^{1,5}} + \frac{1{,}55}{r^6} + \frac{2{,}99}{r^{16}}\right) \tag{22.9}$$

ersetzte. Wir sehen, daß die Dichte in der Korona sehr langsam mit der Entfernung abfällt.

Die Angaben BAUMBACHs haben später zahlreiche Korrektionen erfahren. VAN DE HULST schloß aus der Gesamthelligkeit der Korona die FRAUNHOFERsche Komponente, die nicht zur Korona gehört, aus und berechnete $n_e(r)$ mit einem neuen Wert für $I(\varrho)$. In der äußeren Korona sind die Abweichungen seiner Ergebnisse von den früheren recht beträchtlich.

A. F. BOGORODSKI und N. A. CHINKULOWA[1]) haben eine Berechnung von $n_e(r)$ unter Beachtung der Abhängigkeit ds_e von θ vorgenommen. Die Berechnungen sind mit großen mathematischen Schwierigkeiten verbunden. Daher werden wir sie nicht ausführlich behandeln.

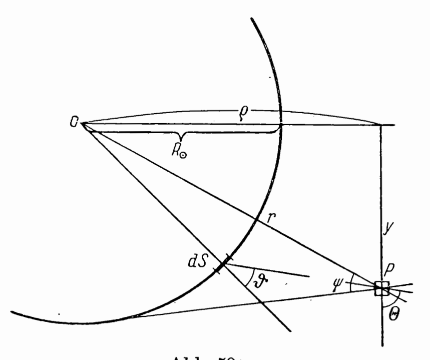


Abb. 59

Ein Volumenelement der Korona von 1 cm³, das sich im Punkte P befindet (Abb. 59), empfange von dem Element ds der Photosphäre die Strahlung $I_\odot d\omega$. Dann streut es pro Raumwinkeleinheit in Richtung zum Beobachter die Energiemenge

$$\frac{e^4}{2\,m^2 c^4}\, n_e(r)\, I_\odot(1 + \cos^2\theta)\,\frac{d\omega}{4\pi}\,. \tag{22.10}$$

Die gesamte Energiemenge, die von der Volumeneinheit der Korona in die Raumwinkeleinheit in Richtung zum Beobachter gestreut wird, erhalten wir durch Integration:

$$j(r) = \frac{e^4}{2m^2c^4}\, n_e(r)\, R \int I_\odot(1 + \cos^2\theta)\,\frac{d\omega}{4\pi}\,, \tag{22.11}$$

wobei sich die Integration über den Raumwinkel erstreckt, unter dem man die Sonne von dem gegebenen Punkt der Korona aus sieht.

[1]) A. F. BOGORODSKI und N. A. CHINKULOWA, Über die Verteilung der Elektronendichte in der Sonnenkorona. Publikationen des Kiewer Astronomischen Observatoriums Nr. 4, 3, 1950 (А. Ф. Богородский и Н. А. Хинкулова, О распределении электронной плотности в солнечной короне. Публикации Киевской астрономической обсерватории, No. 4, 3, 1950).

Diese Gleichung ist der Gleichung (22.6) analog.

Unter Benutzung von (22.4) und nach der Lösung von komplizierten Integralgleichungen fanden die Autoren die in der zweiten Spalte der Tabelle 15 aufgeführten Werte von $n_e(r)$.

Tabelle 15

r	Korona mit kugelsymmetrischer Dichteverteilung	„Maximale" Korona	„Minimale" Korona	
			äquatorial	polar
1,00	$519 \cdot 10^6$	$227 \cdot 10^6$	$403 \cdot 10^6$	$174 \cdot 10^6$
1,03	—	178	316	127
1,06	—	132	235	87,2
1,1	156	90,0	160	53,2
1,2	74	39,8	70,8	16,3
1,3	41,4	21,2	37,6	5,98
1,5	18,3	8,3	14,8	1,41
1,7	8,8	4,0	7,11	0,542
2,0	3,36	1,58	2,81	0,196
2,6	0,73	0,374	0,665	0,040
3,0	—	0,176	0,313	0,017
4,0	—	0,050	0,090	0,004

Die Abweichung dieser Ergebnisse von den Ergebnissen von VAN DE HULST erreichen 30% im Sinne einer Vergrößerung von n_e. Jedoch auch diese Angaben stellen immerhin nur eine grobe Näherung dar, da sich die Dichte der Korona in Wirklichkeit mit der Zeit und dem Positionswinkel ändert.

Sich auf die Arbeit von W. B. NIKONOW über die Änderung der Gesamthelligkeit der Korona stützend, bemühte sich VAN DE HULST von diesen Näherungen freizukommen. Er betrachtet gesondert eine „maximale" und eine „minimale" Korona und setzt das Verhältnis ihrer Gesamthelligkeiten zu 1,84 an. Er setzt die „maximale" Korona als kugelsymmetrisch voraus und nimmt an, daß die „minimale" Korona aus einem äquatorialen Anteil, der 0,7 eines Längenkreises beträgt, und aus polaren Gebieten besteht.

Nach einer kritischen Durchsicht der Ausgangsdaten von BAUMBACH und unter Verwendung der während der Sonnenfinsternis vom Jahre 1923 ermittelten Verhältnisse der Helligkeiten der äquatorialen und polaren Gebiete der Korona leitet VAN DE HULST aus diesen Angaben die Helligkeit der „maximalen" Korona und der Äquatorgebiete der „minimalen" Korona ab. Die FRAUNHOFERsche Komponente der Strahlung wurde ausgeschlossen, und auf Grund der Ausmessungen der photographischen Aufnahmen von der Finsternis vom Jahre 1900 erhielt er das Gesetz für den Helligkeitsabfall mit ϱ für das Polgebiet.

Aus allen diesen Angaben berechnete VAN DE HULST $n_e(r)$ für die „maximale" Korona und für das Äquator- und das Polgebiet der „minimalen" Korona. Bei den Berechnungen ist die Abhängigkeit s_e von θ berücksichtigt worden. Die Ergebnisse sind in der dritten, vierten und fünften Spalte der Tabelle 15 aufgeführt.

Da VAN DE HULST die letzte Beobachtung von NIKONOW nicht kannte, wurde von ihm ein zu kleiner Wert für das Helligkeitsverhältnis der maximalen und der minimalen Korona angenommen. Daraus erklärt sich anscheinend der systematische Unterschied zwischen seinen Angaben und denen von BOGORODSKI–CHINKULOWA. Außerdem hat VAN DE HULST nicht die Beobachtungen vom Jahre 1940 benutzt, als die Koronahelligkeit viel größer war als die von ihm angenommene mittlere Helligkeit der minimalen Korona. Außer n_e hat VAN DE HULST den Polarisationsgrad für die Korona im Maximum und im Minimum in Abhängigkeit von ϱ berechnet. Der Vergleich mit den Beobachtungen zeigt eine Übereinstimmung im Verlauf der Abhängigkeit; die quantitativen Abweichungen erklären sich anscheinend aus den oben erwähnten Gründen.

Für die anomal starke Ausdehnung der Korona konnte man lange Zeit keine Erklärung finden. Wenn sich die Korona bei der Grenztemperatur der Sonne im hydrostatischen Gleichgewicht befände, würde ihre Ausdehnung 100 km betragen. Im Jahre 1947 berechnete ALFVÉN unter der Voraussetzung, daß sich die Korona tatsächlich im hydrostatischen Gleichgewicht befindet (die Richtigkeit dieser Voraussetzung wurde später durch zahlreiche Untersuchungen bestätigt), die Temperatur T_K aus der beobachteten Dichteverteilung, wobei er annahm, daß die Korona aus ionisiertem Wasserstoff besteht. Er erhielt für T_K ungefähr den Wert $T_K = 1000000°$, wobei die Temperatur in der äußeren Korona allmählich mit der Entfernung abnimmt. Seine Überlegungen sind – in aller Kürze – die folgenden:

Der Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht kann man ohne Berücksichtigung des Strahlungsdruckes folgende Gestalt geben:

$$\frac{dp}{dr} = -g\varrho. \tag{22.12}$$

Da nach der erwähnten Hypothese die Korona nur aus Wasserstoffatomen besteht, die überdies noch völlig ionisiert sind, ist die Gesamtzahl der Teilchen in 1 cm³ gleich $2\,n_e$. Daher ist

$$p = 2n_e k T, \quad \varrho = n_e m_{\mathrm{H}}. \tag{22.13}$$

Aus diesen Formeln kann man leicht die Temperatur aus der beobachteten Dichteverteilung der Korona bestimmen. Die Berücksichtigung des Auftretens anderer Elemente (Helium usw.) in der Korona ändert das Ergebnis nur unbeträchtlich.

3. Die Identifizierung der Koronalinien

Lange Zeit wurden die Emissionslinien der inneren Korona dem hypothetischen Element Koronium zugeschrieben. Mit der Vervollständigung des MENDELEJEWschen Periodensystems wurden mehr und mehr Versuche unternommen, diese Linien mit den Linien schon bekannter Elemente zu identifizieren. Im Jahre 1939 fand GROTRIAN, daß die Wellenzahlen der verbotenen Übergänge zwischen den Unterniveaus des Grundzustandes von F X und F XI nahezu gleich den Wellenzahlen von zwei Koronalinien sind. Später führte EDLÉN [4, S. 7] eine umfangreiche Untersuchung zur Identifizierung der übrigen Koronalinien durch. Er nahm mit einem Vakuumspektrographen die Spektren der in einer Funkenentladung hochionisierten Elemente im fernen Ultraviolett auf. Hierbei ermittelte er die Wellenlängen der aufgelösten Linien, leitete aus diesen Linien ein Termschema ab und bestimmte aus dem fertigen Termschema die Wellenlängen der verbotenen Übergänge zwischen benachbarten Niveaus. Auf diese Weise sind noch zwei Linien mit Übergängen im Ca XII und Ca XIII identifiziert worden. Es glückte ihm nicht, Linien noch höher ionisierter Elemente experimentell zu erhalten. Daher ging EDLÉN dazu über, die Größe der Multiplettaufspaltung in den verschiedenen isoelektronischen Folgen (den Folgen von Ionen mit wachsender Atomnummer und Ionisationsstufe, die die gleiche Anzahl an Elektronen besitzen) theoretisch zu extrapolieren. Auf diese Weise wurden die Termdifferenzen der hochionisierten Ionen bestimmt und mit den beobachteten Wellenlängen verglichen.

Hierbei wurden 19 von 24 Linien mit den Linien von hochionisierten Ionen identifiziert (wie SCHKLOWSKI gezeigt hat [33, § 14], ist die Linie 5694,4 falsch identifiziert; in der Tabelle ist sie als nicht identifiziert angegeben). Eine vollständige Aufzählung der Koronalinien mit ihren Identifizierungen ist in Tabelle 16 angegeben.

In der zweiten, dritten und vierten Spalte sind die bei Finsternissen (GROTRIAN und G. A. SCHAIN [37]) und außerhalb von Finsternissen (LYOT) gewonnenen Meßergebnisse für die relativen Linienintensitäten aufgeführt. In der sechsten Spalte sind die Übergangswahrscheinlichkeiten, in der siebenten das Anregungspotential des Ausgangsniveaus (die Linie 7059,6 Å entsteht bei Übergängen zwischen den Unterniveaus des zweiten Zustandes) und in der achten das auf die vorangehende Ionisationsstufe bezügliche Ionisationspotential angegeben.

Als Bestätigung für die Richtigkeit der Identifizierung von EDLÉN kann folgender Sachverhalt dienen. LYOT teilte die beobachteten Linien derart in Gruppen auf, daß die Linien einer Gruppe in einem gegebenen Augenblick eine ähnliche Verteilung längs eines Längenkreises der Sonne zeigen. Unabhängig von ihm teilte G. A. SCHAIN[1]) die Linien in Gruppen nach der gleichzeitigen Zu-

[1]) G. A. SCHAIN, Über die Intensität der Emissionslinien im Koronaspektrum. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 58, 767, 1947 (Г. А. Шайн, Об интенсивности эмиссионных линий в спектре короны. Доклады Академии наук СССР 58, 767, 1947.)

nahme oder Abnahme der Intensität bei verschiedenen Finsternissen ein. Ungeachtet dessen, daß die Gesichtspunkte für die Einteilung in Gruppen vollkommen verschieden sind, erwies sich die Zusammensetzung der Gruppen ungefähr als gleich. Dies bedeutet, daß die Intensität der Linien von den physikalischen Bedingungen und nicht von der chemischen Zusammensetzung abhängt, wobei die Linien einer Gruppe unter gleichen physikalischen Bedingungen das gleiche Verhalten zeigen.

Tabelle 16

λ	Intensität			Identifizierung	A sec^{-1}	$\varepsilon_{r,k}$	χ_r
	Grotrian	Schain	Lyot				
3328	1,0	—	—	Ca XII $2s^2\,2p^5\;{}^2P_{1/2}-{}^2P_{3/2}$	488	3,72	589
3388,1	16	—	—	Fe XIII $3s^2\,3p^2\;{}^1D_2-{}^3P_2$	87	5,96	325
3454,1	2,3	—	—	....	—	—	—
3601,0	2,1	—	—	Ni XVI $3s^2\,3p\;{}^2P_{3/2}-{}^2P_{1/2}$	193	3,44	455
3642,9	—	—	—	Ni XIII $3s^2\,3p^4\;{}^1D_2-{}^3P_1$	18	5,82	350
3800,8	—	—	—	....	—	—	—
3986,9	0,7	4,7	—	Fe XI $3s^2\,3p^4\;{}^1D_2-{}^3P_1$	9,5	4,68	261
4086,3	1,0	1,0	—	Ca XIII $2s^2\,2p^4\;{}^3P_1-{}^3P_2$	319	3,03	655
4231,4	2,6	3,5	—	Ni XII $3s^2\,3p^5\;{}^2P_{1/2}-{}^2P_{3/2}$	237	2,93	318
4311	—	—	—	....	—	—	—
4359	—	—	—	Ar XIV $2s^2\,2p\;{}^2P_{3/2}-{}^2P_{1/2}$	108	2,84	682
4567	1,1	—	—	....	—	—	—
5116,0	4,3	—	2,2	Ni XIII $3s^2\,3p^4\;{}^3P_1-{}^3P_2$	157	2,42	350
5302,9	100	100	100	Fe XIV $3s^2\,3p\;{}^2P_{3/2}-{}^2P_{1/2}$	60	2,34	355
5446	—	—	—	....	—	—	—
5536	—	—	—	Ar X $2s^2\,2p^5\;{}^2P_{1/2}-{}^2P_{3/2}$	106	2,24	421
5694,4	—	—	1,2	....	—	—	—
6374,5	8,1	40,9	18	Fe X $3s^2\,3p^5\;{}^2P_{1/2}-{}^2P_{3/2}$	69	1,94	233
6701,8	5,4	7,7	2,0	Ni XV $3s^2\,3p^2\;{}^3P_1-{}^3P_0$	57	1,85	422
7059,6	—	—	2,2	Fe XV $3s\;3p\;{}^3P_2-{}^3P_1$	—	31,7	390
7891,9	—	—	13	Fe XI $3s^2\,3p^4\;{}^3P_1-{}^3P_2$	44	1,57	261
8024,2	—	—	0,5	Ni XV $3s^2\,3p^2\;{}^3P_2-{}^3P_1$	22	3,39	422
10746,8	—	—	55	Fe XIII $3s^2\,3p^2\;{}^3P_1-{}^3P_0$	14	1,15	325
10798,0	—	—	35	Fe XIII $3s^2\,3p^2\;{}^3P_2-{}^3P_1$	9,7	2,30	325

Aus dem Vergleich dieser Gruppe mit der Tabelle 16 geht hervor, daß die Ionen jeder Gruppe ein annähernd gleiches Ionisationspotential besitzen, von dem der Ionisationsgrad der Atome und das Verhalten der Linien abhängen.

Warum kann man in der Korona verbotene Linien beobachten? Für ihr Auftreten ist erstens eine geringe Materiedichte erforderlich (damit das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen zweiter Art größer ist als die Lebens-

dauer eines Ions in dem entsprechenden metastabilen Zustand) und zweitens eine geringe Strahlungsdichte, die das Atom von dem metastabilen Zustand in einen höheren Zustand versetzt. Die erste Bedingung ist in der Korona erfüllt, da die Wahrscheinlichkeit für verbotene Übergänge verhältnismäßig groß ist. Die zweite Bedingung ist aus dem Grunde erfüllt, weil für die Anregung eines Ions von einem metastabilen Zustand in einen höheren, nichtmetastabilen Zustand eine große Energie von größenordnungsmäßig zehn Elektronenvolt benötigt wird und die Intensität der Sonnenstrahlung im fernen ultravioletten Spektralbereich klein ist.

Worin ist die Ursache für einen so hohen Ionisationsgrad zu suchen?

4. Die Ionisation der Atome in der Korona

Gegenwärtig kann man es als gesichert betrachten, daß die ausnahmsweise hohe Ionisation der Atome in der inneren Korona durch die hohe kinetische Temperatur, die eine Million Grad erreicht, zu erklären ist.

Das Fehlen von Absorptionslinien im Spektrum der inneren Korona und der geringe Dichtegradient sprechen ebenfalls für eine hohe Temperatur der Korona.

Die Emissionslinien in der Korona besitzen eine Halbwertsbreite von etwa 0,5 Å.

Da die Linien „verboten“ sind ($\Delta l = 0$), ist ihre natürliche Breite (δ_{ik}) außerordentlich klein und braucht nicht in Erwägung gezogen werden. Die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Koronamaterie bewegt, übersteigen nicht 5 bis 10 km/sec und vermögen ebenfalls nicht die beobachtete Halbwertsbreite der Linien zu erklären. Aus diesem Grunde liefert nur die thermische Bewegung für die Linienbreite eine Erklärung. Sie entspricht einer Temperatur von mehr als 1000000°.

Endlich sprechen auch die Beobachtungen der Radiostrahlung der Sonne, die wir am Schluß des Paragraphen behandeln, für eine hohe kinetische Temperatur der Korona.

Die große Differenz zwischen der Temperatur der Sonnenstrahlung in der Korona und der kinetischen Temperatur der Korona erklärt die starke Abweichung vom thermodynamischen Gleichgewicht und die Eigenart der physikalischen Prozesse in ihr. Die Verteilung der Atome auf die Ionisations- und die Anregungszustände darf man nicht aus den thermodynamischen Formeln bestimmen, sondern muß sie aus den Stationaritätsbedingungen entsprechender Elementarprozesse ableiten. (Die Anzahl der Prozesse in der einen Richtung ist gleich der Anzahl der Prozesse in der anderen Richtung.)

Für den Wasserstoff, der nur einen Ionisationszustand besitzt, nimmt die Stationaritätsbedingung die Gestalt

$$Z_{\text{ph.i.}} + Z_{\text{st.ion.}} = Z_{\text{ph.rek.}} + Z_{\text{st.rek.}} \tag{22.14}$$

an, wobei die Werte der ersten drei Glieder durch die Gleichungen (8.9), (8.18) und (8.26) gegeben werden. Die Zahl der Dreierstöße ($Z_{\text{st.rek.}}$) ist wegen der ge-

ringen Dichte der Korona klein, und wir können sie vernachlässigen. Der Vergleich der beiden Glieder der linken Seite [ihr Verhältnis wird durch (8.23) gegeben] zeigt, daß unter den Bedingungen der Korona $Z_{\text{st. ion.}} \gg Z_{\text{ph. i.}}$, wenn $\chi_r > 7$–8 eV ist.

Auf diese Weise steht in der Korona Stoßionisation und Rekombination mit Emission eines Quants im Gleichgewicht. Diese Prozesse sind einander nicht entgegengesetzt, und folglich kann die in diesem Fall gültige Ionisationsformel nicht die SAHAsche Formel sein. Insbesondere geht in diese Formel nicht die Konzentration n_e der freien Elektronen ein, weil sowohl die Zahl der durch Elektronenstoß bewirkten Ionisationen als auch die Zahl der Rekombinationen proportional n_e ist. Außerdem wird die Ionisationsformel für die verschiedenen Atome verschieden sein, da der Charakter und die Größe der effektiven Querschnitte $q_{r,k}(v)$ für Stoßionisation von den Eigentümlichkeiten der Atomstruktur abhängen. Die Ionisation des Wasserstoffs und der Metalle in der Korona hat I. S. SCHKLOWSKI untersucht [33, S. 208].

Wir wenden uns der Ionisation des Wasserstoffs zu. Der Querschnitt für die Ionisation eines im Grundzustand befindlichen Wasserstoffatoms, das von einem schnellen Elektron ionisiert wird (dessen Energie das Ionisationspotential beträchtlich übersteigt), ist aus der Quantenmechanik bekannt und beträgt

$$q_0(v) = \frac{2\pi e^4}{m_e v^2 \chi_0} 0{,}285 \ln\left(\frac{2 m_e v^2}{0{,}04 \chi_0}\right). \tag{22.15}$$

Wir setzen $q_0(v)$ in (8.18) ein, integrieren partiell, ersetzen $\frac{1}{2} m_e v_k^2$ durch χ_0 und erhalten

$$Z_{\text{st. ion.}} = n_e n_0 2 \left(\frac{2\pi m_e}{k T_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} 0{,}285 \frac{e^4}{m_e \chi_0} \left[e^{-\frac{\chi_0}{k T_\varepsilon}} \ln 100 + E i_1\left(\frac{\chi_0}{k T_\varepsilon}\right)\right], \tag{22.16}$$

wobei der Integrallogarithmus $E i_1\left(\frac{\chi_0}{k T_\varepsilon}\right)$ durch (6.35) definiert ist. Die Ionisation von den angeregten Niveaus aus berücksichtigen wir nicht, weil die Anregung des Wasserstoffs unter den Bedingungen der Korona gering ist. Die Größe $Z_{\text{ph. rek.}}$ bestimmt sich aus der Gleichung (8.26), wobei β_ν in Übereinstimmung mit (5.55) und (5.24) gleich

$$(\beta_\nu)_k = \frac{g_{0,k} \nu^2 h^2}{u_1 c^2 m_e^2 v^2} \frac{32\pi^2 e^6 R}{3\sqrt{3}\, c h^3 \nu^3 k^5} g' \tag{22.17}$$

ist. Hier ist $g_{0,k} = 2k^2$, ν die bei der Rekombination emittierte Frequenz, die mit der Elektronengeschwindigkeit v über die Beziehung (5.8) verknüpft ist, $u_1 = 1$ für den ionisierten Wasserstoff und $R = \nu_1$ gleich der Grenzfrequenz der LYMAN-Serie, die durch den Ausdruck (5.25) bestimmt ist.

Wenn wir alle diese Größen in (8.28) einführen, die erzwungene Rekombination vernachlässigen $\left(\frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \varrho_\nu \ll 1\right)$ und die Gleichung $\chi_{0,n} = \frac{\chi_0}{n^2}$ benutzen,

können wir diese Gleichung auf die Form

$$Z_{\text{ph. rek.}} = n_e n_1 K T_\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int\limits_{v=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m_e v^2}{2kT_\varepsilon}}}{\frac{\chi_0}{n^2 k T_\varepsilon} + \frac{m_e v^2}{2kT_\varepsilon}} d\left(\frac{\chi_0}{n^2 k T_\varepsilon} + \frac{m_e v^2}{2kT_\varepsilon}\right)$$

$$= n_e n_1 K T_\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\chi_0}{n^2 k T_\varepsilon}} n^{-3} Ei_1\left(\frac{\chi_0}{n^2 k T_\varepsilon}\right) \tag{22.18}$$

mit

$$K = \frac{2^4}{3\sqrt{3}\pi} \frac{8\pi^2 e^2 R^2}{m_e c^3} \frac{h^3}{(2\pi m_e k)^{\frac{3}{2}}} = 3{,}2 \cdot 10^{-6} \tag{22.19}$$

bringen. Für die höheren Serienglieder darf man die erzwungene Rekombination nicht vernachlässigen. Der Wert der Summe wird jedoch vorwiegend durch die ersten Summanden bestimmt.

Wir setzen (22.16) und (22.18) in (22.14) ein, benutzen (5.25) und die Gleichung $\chi_0 = hR$ und finden als Ionisationsformel für den Wasserstoff:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{3\sqrt{3}\,0{,}285}{2^7 \pi^5} \frac{c^3 h^5 k T_\varepsilon}{m e^{10}} \frac{e^{-\frac{\chi_0}{kT_\varepsilon}} \ln 100 + Ei_1\left(\frac{\chi_0}{kT_\varepsilon}\right)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\chi_0}{n^2 k T_\varepsilon}} n^{-3} Ei_1\left(\frac{\chi_0}{n^2 k T_\varepsilon}\right)}. \tag{22.20}$$

Wie wir schon erwähnt haben, hängt die Ionisation von n_e nicht ab. Bei $T_\varepsilon = 625000°$ ist $\frac{n_1}{n_0} \approx 10^6$, bei $T_\varepsilon = 1560000°$ ist $\frac{n_1}{n_0} \approx 3 \cdot 10^6$. Wäre die Ionisation nach der SAHAschen Formel mit $T = T_\varepsilon$ bestimmt worden, so wäre $\frac{n_1}{n_0}$ fast um das 10^6fache größer, und bei $T = 5000°$ wäre $\frac{n_1}{n_0} = 0{,}07$.

Bei einem Atom mit vielen Elektronen, z. B. bei Fe, nehmen die Bedingungen für das Ionisationsgleichgewicht die Gestalt eines Gleichungssystems an, von denen jede die Gleichheit der Anzahl der Elementarprozesse ausdrückt, die zum Auftreten und zum Verschwinden von Atomen in der gegebenen Ionisationsstufe führen.

In diesen Gleichungen kann man wie in (22.15) die Dreierstöße, die Photoionisation (für alle Ionisationszustände außer dem ersten) und die Stoßionisation von angeregten Niveaus aus vernachlässigen.

In die Gleichungen geht der effektive Querschnitt für die Ionisation durch Elektronenstoß ein. Die Aufgabe wird dadurch kompliziert, daß bei hochionisierten Atomen die Ionisationsenergie größer als die mittlere thermische Energie eines Elektrons ist, so daß die Ionisation durch „langsame" Elektronen aus-

geführt wird. Für diesen Fall sind jedoch noch keine genauen Werte des effektiven Querschnitts bekannt.

Wir benutzen die auf klassischen Überlegungen fußende Formel

$$q_r(v) = \frac{\pi e^4}{\frac{m_e v^2}{2}} \frac{1}{\frac{m_e v_1^2}{2} + \chi_r}, \tag{22.21}$$

in der v die Geschwindigkeit des stoßenden Elektrons und v_1 die Geschwindigkeit des vom Atom losgelösten Elektrons bedeuten. In unserem Fall ist $\frac{1}{2} m_e v_1^2 \ll \chi_r$. Diese Formel ergibt annähernd den gleichen Wert für $q_r(v)$ wie auch die Näherungsformel der Quantenmechanik und stimmt auch angenähert mit den empirischen Angaben für Helium überein.

Für die Zahl der Rekombinationen wählen wir den Ausdruck

$$Z_{\text{ph. rek.}} = n_e n_{r+1} K T_\varepsilon^{-\frac{3}{2}} Z^4 \sum_{n=n_1}^{\infty} e^{\frac{Z^2 h R}{n^2 k T_\varepsilon}} n^{-3} E i_1\left(\frac{Z^2 h R}{n^2 k T_\varepsilon}\right), \tag{22.22}$$

der eine Verallgemeinerung von (22.18) auf den Fall eines wasserstoffähnlichen Ions mit der Kernladung Ze darstellt.

In Wirklichkeit sind die von uns betrachteten Ionen nicht wasserstoffähnlich. In diesem Fall kann man Ze als eine gewisse effektive Ladung ansehen, die auf ein Außenelektron wirkt. Im allgemeinen kann die Anwendung von (22.22) auf ein wasserstoffunähnliches Ion zu schweren Fehlern führen. Der Hauptteil der Rekombinationen gelangt jedoch auf angeregte Niveaus. Diese sind aber praktisch wasserstoffähnlich. Die numerische Lösung des Systems der Stationaritätsgleichungen für Fe und Ni zeigt, daß jedem Wert T_ε eine bestimmte, am häufigsten anzutreffende Ionisationsstufe entspricht.

Bei $T_\varepsilon = 600000°$ befindet sich das Eisen in der Hauptsache im Zustand Fe X und bei $T_\varepsilon = 1200000°$ im Zustand Fe XIV. Somit entsprechen diese Temperaturen den „roten" und den „grünen" Koronagebieten. Der Umstand, daß die Beobachtungen bisweilen an ein und derselben Stelle der Korona ein Stärkerwerden sowohl der roten als auch der grünen Linien zeigen, erklärt sich dadurch, daß der Sehstrahl nacheinander durch grüne und durch rote Gebiete hindurchtritt. Aus den Beobachtungen ergibt sich, daß die Emissionsgebiete von Ni XIII und Ni XIV im wesentlichen mit den Emissionsgebieten von Fe XIII und Fe XIV zusammenfallen. Dies findet darin seine Erklärung, daß die Anzahl der entsprechenden Ionen in der betrachteten Ionisationsstufe bei gleichen Temperaturen ihr Maximum erreicht.

5. Die chemische Zusammensetzung der Korona

Die Korona ist für die monochromatische Eigenstrahlung durchlässig, da der Absorptionskoeffizient für die verbotenen Linien klein und die allgemeine optische Dicke der Korona in diesen Linien um viele Größenordnungen kleiner

als Eins ist. Auf diese Weise können wir über die Intensitäten der Emissionslinien auf die Gesamtzahl der Atome schließen, die die gegebene Linie emittieren. I. S. SCHKLOWSKI [33, Kap. III] hat zum erstenmal Rechnungen durchgeführt, die sich mit der chemischen Zusammensetzung der Korona befassen.

Es sei $I_\lambda(\varrho)$ die von 1 cm² der Projektion der Korona in den räumlichen Einheitswinkel emittierte Energie, die über die gesamte Linie integriert ist. Die Beobachtungen liefern gewöhnlich eine Äquivalentbreite $\Delta\lambda(\varrho)$ der Emissionslinie, die sich auf das benachbarte kontinuierliche Spektrum desselben Gebietes der Korona beziehen, d.h. das Intervall des nächstgelegenen kontinuierlichen Spektrums, in dem die gleiche Energie enthalten ist wie in der Linie. Wenn wir die durch (22.3) bestimmte Intensitätsverteilung des kontinuierlichen Spektrums $I(\varrho)$ kennen (hierbei ist es nicht nötig, die FRAUNHOFERsche Komponente der Strahlung auszuschließen, da sich $\Delta\lambda$ auf das gesamte kontinuierliche Spektrum bezieht), finden wir $I_\lambda(\varrho) = \Delta\lambda(\varrho) I(\varrho)$. Eine (22.4) analoge Integralgleichung gestattet, den Emissionskoeffizienten $j_\lambda(r)$ zu berechnen, der seinerseits die Anzahl der Atome bestimmt, die sich im Ausgangszustand $n_k(r)$ befinden:

$$4\pi j_\lambda(r) = n_k(r)\,(A_{ki} + \varrho\nu_{ik} B_{ki})\,h\nu_{ik}. \tag{22.23}$$

Für alle vorliegenden spektralphotometrischen Beobachtungen der monochromatischen Koronastrahlung wurde $n_k(r)$ berechnet. Als Resultat ergab sich, daß $n_k(r)$ bei $r = 1{,}2$ für verschiedene Ionen größenordnungsmäßig gleich zehn Atome in 1 cm³ ist.

Wir gehen im folgenden von der Zahl der angeregten Atome zu der Zahl aller Atome in einem vorgegebenen Ionisationszustand über.

Zu diesem Zweck müssen wir verschiedene Anregungsmechanismen betrachten. Vor allem müssen wir die Anregung durch Elektronenstoß berücksichtigen. Die Zahl $Z_{\text{St. Anr.}}$ dieser Anregungen bestimmt sich aus einer Formel vom Typ (8.18), in der $q_{r,k}(v)$ den effektiven Anregungsquerschnitt bedeutet. Die Berechnung dieser Querschnitte für kleine relative Geschwindigkeiten ist eine überaus schwierige Aufgabe. Wir benutzen eine Formel für die Anregung der Unterniveaus der gleichen Konfiguration O III, die unter Zugrundelegung einer RUSSEL-SAUNDERS-Kopplung berechnet wurde [40, S. 8]. Da in der Korona ebenfalls eine Anregung der Unterniveaus des Grundzustandes auftritt, kann man als erste Näherung annehmen, daß die Grundeigenschaft von O III – der große Wert von $q_{r,k}(v)$, der den gaskinetischen Wert um das Zehnfache übertrifft – auch den Ionen in der Korona zuzuschreiben ist. Der Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen ermöglicht es, diese Voraussetzung zu prüfen. Die Besetzung eines angeregten Niveaus hängt sowohl von den Stoßanregungen als auch von den Rekombinationen mit Kaskadenübergängen auf das gegebene Niveau ab.

Es ist leicht einzusehen, daß $Z_{\text{St. Anr.}} > Z_{\text{St. ion}}$, weil $(q_{r,k})_{\text{Anr.}} > (q_r)_{\text{ion}}$ ist. Daher braucht man die Rekombinationen auf angeregte Niveaus, deren Zahl kleiner als $Z_{\text{St. ion}}$ ist, nicht zu berücksichtigen. Sie sind im Vergleich zu den direkten Anregungen selten.

In der Korona darf man (im Gegensatz zu den Nebeln) die Anregungen, die bei der Absorption der aus der Photosphäre stammenden Strahlung vor sich gehen, nicht vernachlässigen. Die unmittelbare Rechnung (die Größen B_{ik} sind bekannt) zeigt, daß für die Linien $\lambda = 5303$ und $\lambda = 6374$ Å die Photoanregung bei $r > 2\, R_\odot$ vorherrscht, wo n_e schon beträchtlich kleiner ist als in der inneren Korona, aber der Strahlungsstrom nicht so stark abnimmt.

In diesem Fall ist der Emissionskoeffizient für die gesamte Linie $j_\lambda(r)$ in der inneren Korona proportional $n_e n_{r,1}$ und in der äußeren proportional $n_{r,1}$. Wenn sich die (durch T_ε bestimmte) Ionisation und die relative Häufigkeit von Fe nicht mit der Höhe ändern, ist $n_{r,1}$ der Anzahl der Wasserstoffatome in 1 cm³ und folglich n_e proportional. Dies bedeutet, daß in der inneren Korona $j_\lambda(r) \sim n_e^2$ und in der äußeren Korona $j_\lambda(r) \sim n_e \sim j(r)$ ist. Die Beobachtungen zeigen tatsächlich, daß, beginnend mit $r = 2{,}2\, R_\odot$ (wie sich näherungsweise aus der Berechnung ergab), $j(r)$ für $\lambda = 5303$ Å und für „weißes" Licht proportional sind. Dies bestätigt die Richtigkeit des angenommenen Wertes $(q_{r,k})_{\text{Anr.}}$.

Wenn wir den Anregungsmechanismus kennen, können wir die Verteilung der Atome auf die Anregungszustände berechnen und von $n_{r,k}$ auf n_r übergehen. Wenn uns Angaben über die Linien der Atome vorliegen, die sich in mehreren Ionisationszuständen befinden, und wir, von der Ionisationstheorie ausgehend, die Zahl der Atome berechnen, die sich in „unsichtbaren" Ionisationszuständen befinden (getrennt für rote und grüne Gebiete), können wir die chemische Zusammensetzung bestimmen. Die Konzentration von H wird durch $n_e(r)$ angegeben.

Es ergab sich, daß die relative Häufigkeit von Fe und H über die Gesamtdicke der Korona konstant und etwa gleich der Häufigkeit dieser Elemente in der umkehrenden Schicht ist.

Dieses Ergebnis ist von großer Wichtigkeit; es zeigt, daß die Elemente in der Korona durchmischt sind und dort kein Diffusionsgleichgewicht eintritt, bei dem die schwereren Elemente in tiefere Schichten absinken. Anscheinend wird diese Durchmischung durch eine langsame Turbulenzbewegung in der Korona hervorgerufen. Man muß natürlich annehmen, daß in dem Übergangsgebiet der Sonnenatmosphäre, in der Chromosphäre und in den Protuberanzen die Elemente ebenfalls durchmischt sind.

6. Die ultraviolette Strahlung der Korona und der Chromosphäre

Die Emission der Korona bricht nicht an den Grenzen des sichtbaren Spektrums ab, sondern setzt sich nach beiden Seiten hin fort [33, Kapitel V]. Vor allem ist dies die Strahlung jenseits der Grenzen der Hauptserien von H, He, He II und der übrigen Elemente infolge der Rekombinationen. Sie wird durch Formel (8.38) bestimmt.

Außerdem entsteht bei den frei-frei-Übergängen eine Emission. Ihre Intensität ist nur von der Dichte und von der Geschwindigkeit der Teilchen ab-

hängig und wird für den Wasserstoff durch die Formel

$$4\pi j_\nu d\nu = n_1 n_e \frac{k K}{2 R T_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} g^{\mathrm{II}} e^{-\frac{h\nu}{k T_\varepsilon}} d\nu \qquad (22.24)$$

bestimmt.

[Den Ausdruck (22.24) für den Spezialfall des thermodynamischen Gleichgewichtes kann man aus (5.65) und (3.10) ableiten.] Die zweite Quelle für die Emission (frei-frei-Übergänge) von H ist unter den in der Korona herrschenden Bedingungen, d.h. für eine sehr hohe kinetische Temperatur, etwa um das Dreifache wirksamer als die erste. Die Korona ist infolge des hohen Ionisationsgrades sogar für die Strahlung jenseits der LYMAN-Serie durchlässig. Daher gelangt diese Strahlung vollständig nach außen.

Somit ist die Intensität der kontinuierlichen Koronastrahlung proportional $P = \int_0^\infty n_1 n_e dy = \int_0^\infty n_e^2 dy$ (siehe Abb. 59). Am Rand der Scheibe, wo der Sehstrahl die Oberfläche streift, sind P und die Helligkeit maximal. Die Struktur der Korona (das Auftreten von strahlenförmigen Gebilden, die ungleichmäßige Dichteverteilung längs eines Längenkreises) vergrößert P bei derselben mittleren Elektronendichte und erhöht folglich auch die Helligkeit. In Erdentfernung ist der Gesamtstrahlungsstrom H_1 der ultravioletten Wasserstoffemission im Intervall von ν_1 bis $\nu = \infty$ gleich $4 \cdot 10^{-2}$ erg/cm² sec. Analoge Rechnungen zeigten, daß die von He emittierte Strahlung um das 1,4fache größer ist als diejenige von H. Der Einfluß der Strahlung der übrigen Elemente ist verschwindend klein.

Außer dem kontinuierlichen Spektrum besitzt die Korona auch ein Linienspektrum im ultravioletten Spektralbereich. Dieses entsteht durch erlaubte Übergänge zwischen den durch Elektronenstoß angeregten Niveaus und den Grundniveaus der Ionen von Fe und Ni. Jede Anregung durch Elektronenstoß führt zur Emission eines Quants. Ihre Anzahl wird durch eine Formel vom Typ (8.18) bestimmt, so daß j_λ für monochromatische Strahlung ebenfalls proportional $n_r n_e \sim n_e^2$ ist. Der Querschnitt für die Anregung durch schnelle Elektronen (die thermischen Energien eines Elektrons betragen etwa 120 eV) ist gleich

$$(q_{r,k})_{\mathrm{Anr.}} = \frac{2\pi e^4}{m v^2 \varepsilon_{r,k}} f_{0,k} \ln\left(\frac{2 m v^2}{\varepsilon_{r,k}}\right), \qquad (22.25)$$

wobei $f_{0,k}$ die Oszillatorstärke des Überganges ist (für Resonanzlinien ist sie angenähert gleich Eins).

Wir geben einige Daten für eine Reihe von Elementen an, die auf der Sonne ziemlich häufig sind. Zum Beispiel besitzen Ne VIII (diesen Zustand erreicht Ne in den „roten“ Gebieten) bzw. Mg X („grüne“ Gebiete) Resonanz-Dubletts bei 776–768 bzw. 625–610 Å. Da man in einem großen Bereich der Korona entweder die rote oder die grüne Linie beobachtet, kann man die gesamte Strahlungsenergie in den beiden ultravioletten Linienpaaren ausrechnen, indem man

$4\pi j_\lambda = h\nu Z_{\text{St. Anr.}}$ über das gesamte Volumen der Korona integriert. Auf diese Weise setzen wir voraus, daß in jedem Punkt der Korona entweder die Linie Ne VIII oder die Linie Mg X emittiert wird.

Wenn wir die relative Häufigkeit von Mg und Ne vorgeben, finden wir für die gesamte monochromatische Strahlung, die in der ganzen Korona in 1 sec erzeugt wird, $E = 6 \cdot 10^{27}$ erg/sec. Wenn die Hälfte der Strahlung zur Sonne zurückkehrt, ist der Strom der harten monochromatischen Strahlung in Erdentfernung R_1 gleich

$$H_2 = \frac{1}{2} \frac{E}{4\pi R_1^2} \approx 1 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\,\text{sec}}. \tag{22.26}$$

Die monochromatische ultraviolette Strahlung erzeugt einen Strom von etwa der gleichen Größenordnung wie die monochromatische Strahlung der Korona in den Linien $\lambda = 5303$ und $\lambda = 6374$ Å. Der Wert H_2 reicht aus, um die beobachtete Ionisation der oberen Schichten der Erdatmosphäre zu erklären. Über die Ionisation der Chromosphäre und der Protuberanzen durch die Koronastrahlung haben wir schon gesprochen.

Die oberen Schichten der Chromosphäre, in denen der Wasserstoff praktisch vollständig ionisiert ist, scheinen ebenfalls eine ultraviolette Strahlung auszusenden, die durch Rekombinationen auf das Grundniveau hervorgerufen wird. Der Einfluß der frei-frei-Übergänge ist bei der niedrigen kinetischen Temperatur der Chromosphäre nicht von Bedeutung.

Wenn die Ionisation der Chromosphäre nur durch die Koronastrahlung bedingt wird, spielt die Chromosphäre gewissermaßen die Rolle eines Reflektors, der einen Teil der nach unten gehenden Strahlung „reflektiert"; der in diesem Fall von der Chromosphäre ausgehende Strom ist geringer als der von der Korona. Wenn dagegen die Temperatur der einzelnen Bereiche der oberen Chromosphäre (oberhalb des Niveaus 7000–8000 km) 20000° übersteigt und somit die Ionisation bestimmt, ist die Strahlung dieser Bereiche ebenfalls für die Ionisation der Erdatmosphäre ausreichend.

Die Energie der ultravioletten Strahlung und eines großen Teiles der sichtbaren monochromatischen Strahlung der Korona wird der thermischen Energie des Elektronengases entnommen. In den Nebeln wird dieser Energieverlust durch die Strahlung des Zentralsternes kompensiert. In der Korona kann es diese Möglichkeit infolge der niedrigen Temperatur der Photosphäre nicht geben, und wir müssen uns nach einer anderen Energiequelle umsehen. I. S. Schklowski sprach die Vermutung aus, daß für die Erwärmung Ströme in Frage kommen, die unter der Einwirkung von elektrischen Feldern (z.B. induzierter) entstehen. Die von ihnen abgegebene Wärme q wird durch die Formel (18.37) bestimmt. Diese Energie muß einerseits den Strom der Strahlungsenergie $4\pi j_\lambda = n_e^2 \Psi(T_\varepsilon)$ und andererseits den durch die Wärmeleitung entstehenden Strom, der in die unteren Schichten der Atmosphäre und in die äußeren Schichten der Korona fließt, kompensieren.

Die abgegebene Wärmemenge ist gleich

$$q = \lambda E^2 = n_e^2 \Psi(T_\varepsilon) - \gamma \frac{d^2 T_\varepsilon}{dr^2}, \tag{22.27}$$

wobei γ die Wärmeleitzahl des Elektronengases und $\Psi(T_\varepsilon)$ eine gewisse Funktion von T_ε ist.

Mit Hilfe der Formel (22.27) kann man ausrechnen, daß zur Aufrechterhaltung der Koronatemperatur auf der beobachteten Höhe ein Feld von der Feldstärke $E \approx 10^{-8}$ V/cm erforderlich ist, wobei die Werte der beiden Summanden auf der rechten Seite von der gleichen Größenordnung sind. Dieser kleine Wert der Feldstärke, der für die Erwärmung erforderlich ist, erklärt sich aus der geringen Wärmeabgabe der Korona, hervorgerufen durch den kleinen Wert von n_ε und den geringen Temperaturgradienten.

In der Chromosphäre ist n_ε tausendmal größer. Daher erzeugen selbst stärkere Felder nur eine verhältnismäßig schwache Erwärmung. Es erhebt sich die Frage, weshalb die Temperatur der Korona stets annähernd konstant ist, obgleich sich die Felder um das Hundertfache und sogar um das Tausendfache ändern können. Außerdem ist es unverständlich, weshalb T_ε zur Grenze der Korona hin abnimmt, obgleich n_ε, und folglich die Wärmeabgabe, dort geringer ist. Wie S. B. PIKELNER [41] gezeigt hat, läßt sich dies durch einen an der Oberfläche auftretenden Abkühlungseffekt der Korona erklären, der darin besteht, daß sehr schnelle Teilchen, deren Geschwindigkeiten größer als die parabolische sind, aus der Korona herausfliegen (Dissipation). Das Entweichen der Teilchen geschieht hauptsächlich in den Schichten $1{,}75 < r < 2{,}75$. Aus tieferen Schichten wird durch den Widerstand des Mediums ein Entweichen erschwert, und in den höheren Schichten finden zu wenig Stöße statt, die die schnellen Teilchen „erzeugen". Die Dissipation ist dem Anteil an schnellen Teilchen, d.h. $e^{-\frac{m v_\infty^2}{2kT_\varepsilon}}$, proportional, wobei v_∞ die Geschwindigkeit bedeutet, die für die Überwindung des Widerstandes und der Gravitation erforderlich ist („parabolische" Geschwindigkeit). Mit wachsendem T_ε vergrößert sich dieser Anteil schnell. Die Dissipation ist gewissermaßen ein Thermoregulator. Wenn an einer beliebigen Stelle der Korona die Temperatur den Wert 1500000° übersteigt, gibt die Wärmeleitung den Energieanteil $\gamma \frac{d^2 T_\varepsilon}{dr^2}$ an höher gelegene Schichten ab, von wo aus dieser Energieanteil durch Dissipation in den Weltraum entweicht. Die erste Berechnung der Dissipation von Teilchen aus der Korona unter Berücksichtigung der hohen kinetischen Temperatur der Korona wurde von W. A. KRAT[1]) durchgeführt.

Somit sind die thermischen Geschwindigkeiten der Protonen in der Korona nicht zufällig mit der parabolischen Geschwindigkeit vergleichbar (dies kann man leicht nachrechnen). Dieser Umstand erklärt die große Ausdehnung der Korona, die von der Annäherung der thermischen und der parabolischen Geschwindigkeit der Protonen aneinander abhängig ist. Auf anderen Sternen wird zweifellos der gleiche Mechanismus für die Erwärmung gültig sein, da die Sonne

---

[1]) W. A. KRAT, Die positive Ladung der Sonne. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR **55**, 207, 1947 (В. А. Крат, Положительный заряд Солнца. Доклады Академии наук СССР **55**, 207, 1947).

ein „Durchschnittsstern" ist. Die obere Grenze der Koronatemperatur bestimmt sich aus dem Verhältnis der thermischen und der parabolischen Geschwindigkeit (d.h. aus der Masse und dem Radius des Sternes). Zum Beispiel ist in der Korona eines Sternes vom Typ gK 5 $T_\varepsilon \approx 160000°$, und bei einem Stern vom Typ cB 3 ist $T_\varepsilon \approx 2{,}7 \cdot 10^6$. Die Dichteverteilung in der Korona eines Sternes verläuft ähnlich wie die Dichteverteilung in der Sonnenkorona. Wenn man für die Messung der Ausdehnung der Korona den Radius des Sternes als Einheit nimmt, so müssen die Riesen eine sehr ausgedehnte Korona besitzen. Die ultraviolette Strahlung einer derartigen Korona kann die beobachtete anomale Anregung der Atome mit hohem Anregungspotential, z.B. der Wasserstoffatome, hervorrufen.

7. Die Radiostrahlung der Sonne

Bis in die jüngste Zeit hinein wurden alle Beobachtungen der Himmelskörper in einem Wellenlängenbereich ausgeführt, der den sichtbaren Spektralbereich einschließt und sich von $\lambda = 2900$ Å bis zu verhältnismäßig fernen infraroten Wellenlängen erstreckte. Dieser Bereich wird an seinem kurzwelligen Ende durch die Absorption der Ozonschicht der Erdatmosphäre und an seinem langwelligen Ende durch die Absorptionsbanden des Wasserstoffs begrenzt. Überdies ist die Empfindlichkeit der Strahlungsempfänger für $\lambda > 30000$ Å sehr gering. Es gibt jedoch noch ein anderes „Fenster", das für Wellen von 1 cm bis zu 12 m, die *ultrakurzen Radiowellen*, durchlässig ist.

Das Aufkommen von hinreichend empfindlichen und gerichteten Funkmeßgeräten ermöglichte es, eine Strahlung der Galaxis und der Sonne in diesem Wellenlängenbereich zu entdecken. Die Intensität dieser Strahlung kann man durch eine formale Größe, die *Radiotemperatur* T_{rad}, messen. Diese ist gleich der Temperatur eines schwarzen Körpers mit der gleichen Winkelausdehnung, der denselben Strahlungsstrom in derselben Frequenz emittiert. Die Radiotemperatur der Sonne nimmt in dem Wellenlängenbereich von 1 cm bis 10 cm von 10000° bis 20000° mit wachsender Wellenlänge zu und ist zeitlich fast unveränderlich. Bei Wellenlängen von $\lambda = 50$ cm beträgt die Radiotemperatur der Sonne 100000°. Bei der Wellenlänge 1 m ist die Radiotemperatur besonders in den Jahren maximaler Sonnentätigkeit zeitlich stark veränderlich und erreicht bisweilen 10^{13}°. In diesem Wellenlängenbereich sinkt T_{rad} nie unter 10^{6}° und hält sich in den Jahren des Minimums konstant auf diesem Wert. Es ist zweckmäßig, die Strahlung des Meterwellenbereiches in eine *ruhende* oder *thermische* und eine *sporadische* (mit der Zeit veränderliche) Komponente einzuteilen.

Die thermische Strahlung wurde von I. S. Schklowski und unabhängig von ihm von W. L. Ginsburg untersucht. Der Absorptionskoeffizient für die Radiostrahlung in einem ionisierten Gas wird durch die frei-frei-Übergänge bestimmt [siehe Formel (5.65)], wobei $T = T_\varepsilon$ ist. Tatsächlich ist $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ in der Formel (5.65) faktisch gleich dem Verhältnis der Anzahl der Atome im oberen

und im unteren Quantenzustand. Die Schwächung eines Lichtstrahles in einer gegebenen Richtung wird durch die Differenz zwischen der selbstabsorbierten Energie (Koeffizient B_{ik}) und der Energie, die von den Atomen durch die auf sie fallenden Quanten in der gleichen Richtung emittiert wird (Koeffizient B_{ki}), bestimmt. Daher gilt für die Abnahme der Anzahl der Quanten, wenn sie durch ein Element dh hindurchtreten, der Ausdruck

$$n_i \varrho_\nu B_{ik} dh - n_k \varrho_\nu B_{ki} dh = n_i \varrho_\nu B_{ik}\left(1 - \frac{n_k}{n_i}\frac{g_i}{g_k}\right) dh. \qquad (22.27')$$

Wenden wir auf den Subtrahenden unseres Ausdrucks die Formel (5.9) an, so erhalten wir $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$. In dem vorliegenden Fall, in dem die Emission von frei-frei-Übergängen eines Elektrons begleitet wird, bestimmt sich die relative Zahl der Elektronen von vorgegebener Energie durch die MAXWELLsche Formel mit $T = T_\varepsilon$, und das Verhältnis der Anzahl der Elektronen mit einer vorgegebenen Energiedifferenz beträgt $e^{-\frac{h\nu}{kT_\varepsilon}}$. Der Umstand, daß wir anfangs von Atomen in verschiedenen Quantenzuständen und dann von der Energie eines Elektrons gesprochen haben, wird nicht zu Mißverständnissen führen, da in dem vorliegenden Fall das emittierende System ein Ion und ein Elektron ist und die Energie eines derartigen Systems gleich der Energie des Elektrons ist.

Da $\frac{h\nu}{kT_\varepsilon} \ll 1$ ist, kann man unter der Annahme, daß die Korona aus Wasserstoff besteht, den Absorptionskoeffizienten folgendermaßen umschreiben:

$$\frac{\varkappa_\nu}{\varrho} = \frac{4\pi e^6}{3\sqrt{3}}\frac{1}{c}\frac{n_e^2}{(mkT_\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}\frac{g^{\mathrm{III}}}{\nu^2} = \psi(\nu, T_\varepsilon)\, n_e^2, \qquad (22.28)$$

mit

$$\psi(\nu, T_\varepsilon) = 1{,}65 \cdot 10^{-7}\left(\frac{10000}{T_\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\nu^2}. \qquad (22.28')$$

Man kann leicht nachrechnen, daß die optische Dicke τ_k der Chromosphäre selbst für $\lambda = 1$ cm größer als 10^3 ist. Für die Korona gilt bei $\lambda = 150$ cm $\tau_k = 1{,}6$. Daher stammt die bei uns ankommende Strahlung mit $\lambda \geqslant 1$ m in der Hauptsache aus der Korona.

Die Intensität der austretenden Strahlung wird durch die Formel (3.32) bestimmt.

In erster Näherung kann man annehmen, daß T_ε in der Korona konstant und gleich T_k ist und T_ε in der oberen Chromosphäre auf dem Niveau mit $\tau_\nu \approx 1$ gleich einem gewissen T_c ist. Dann können wir die Formel (3.32) in die Gestalt

$$I_\nu(0, \theta) = B_\nu(T_c)\, e^{-\tau_k} + B_\nu(T_k)\,(1 - e^{-\tau_k}) \qquad (22.29)$$

bringen, wobei τ_k längs des Lichtstrahls gezählt wird. Für die Zentimeterwellen

ist $\tau_k \ll 1$, das zweite Glied gegenüber dem ersten Glied klein, die Scheibe gleichmäßig hell und $T_{\text{rad}} = T_c$.

Für die Wellen des Meterbereiches ist das erste Glied gleich Null, und die Helligkeit der Scheibe fällt zum Rand allmählich ab, wobei der Durchmesser der Scheibe größer als der Sonnendurchmesser ist.

Für die Dezimeterwellen sind beide Glieder in den zentralen Gebieten der Scheibe miteinander vergleichbar. Am Rande ist $\tau_k \approx 1$, und die Strahlung ist der Strahlung eines absolut schwarzen Körpers mit $T = T_k$ ähnlich. Die Sonne hat das Aussehen eines hellen Ringes.

Die Zunahme der Radiotemperatur mit der Wellenlänge erklärt sich natürlich aus dem ständig wachsenden Einfluß der Koronastrahlung.

Zum Unterschied von der gewöhnlichen Strahlung weisen die Radiowellen zwei Besonderheiten auf. Die erste besteht darin, daß ihr Brechungsindex in einem ionisierten Gas

$$n = \sqrt{1 - \frac{e^2 n_e}{\pi m_e \nu^2}} \tag{22.30}$$

kleiner als Eins ist (Gruppengeschwindigkeit der Wellen $u = cn$), wobei n für die Meterwellen in der Korona gegen Null streben kann, so daß eine Totalflexion stattfindet. Die Strahlung kann nur aus den Schichten austreten, die oberhalb des Niveaus mit $n = 0$ liegen. Ein Strahl, der nicht in Richtung der Normalen zur Oberfläche verläuft, ist so gekrümmt, daß er zur Sonne hin erhaben ist. Für kugelsymmetrische Schichten bestimmt sich die Gleichung für die Trajektorie durch die gewöhnliche Refraktionsbedingung

$$r n \sin i = \text{const}, \tag{22.31}$$

wobei i der Winkel zwischen dem Strahl und dem durch den gleichen Punkt verlaufenden Radius ist.

Hiermit hängt es zusammen, daß man τ_k nicht auf einer Geraden, sondern längs der Trajektorie des Strahls zählen muß. Daher sind die Gleichungen (22.29) und (22.31) simultan zu lösen. Für die Zentimeterwellen hat die Refraktion in der Korona keine Bedeutung.

Berechnungen der Helligkeitsverteilung der Radiostrahlung über die Scheibe und der Radiotemperatur der Sonne für verschiedene Wellenlängen wurden von mehreren Forschern unabhängig durchgeführt.[1])

Die gleichzeitige Messung von T_{rad} in mehreren Wellenlängen ermöglicht es, ein System von Gleichungen (22.29) mit den Unbekannten T_c und T_k aufzustellen (τ_k wird theoretisch berechnet) und somit diese Größen aus den Beobachtungen zu bestimmen. Die Beobachtung von T_{rad} in den Zentimeterwellen ist eine der zuverlässigsten Methoden zur Bestimmung der Temperatur in den oberen Schichten der Chromosphäre.

---

[1]) I. S. Schklowski und S. B. Pikelner, Die thermische Radiostrahlung der Sonne. Mitteilungen des Astrophysikalischen Observatoriums auf der Krim VI, 3, 1950 (И. С. Шкловский и С. Б. Пикельнер, Тепловос радиоизлучение Солнца. Известия Крымской астрофизической обсерватории VI, 3, 1950).

Die zweite Besonderheit der Radiostrahlung ist die Möglichkeit einer Polarisation in Verbindung mit dem Auftreten einer Doppelbrechung im Plasma, wenn ein Magnetfeld vorhanden ist. Schwingungen, die in einer Ebene parallel oder senkrecht zum Feld gerichtet sind, besitzen verschiedene n und folglich eine verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeit sowie eine verschiedene Absorption. Hierbei kann eine elliptische Polarisation auftreten.

Wie wir schon erwähnt haben, beobachtet man im Meterwellenbereich häufig eine sporadische Strahlung, besonders in Jahren der Maxima. Später erfolgte Beobachtungen ermöglichten es, die sporadische Strahlung in eine relativ langsam veränderliche, aus den Gebieten über den Flecken stammende Strahlung, die eine ziemlich streng radiale Richtung besitzt, und in „*bursts*", starke, schnell veränderliche Intensitätsschwankungen, einzuteilen.

Die sporadische Emission über den Flecken ist häufig elliptisch polarisiert. Dies hängt mit dem Magnetfeld der Flecke zusammen.

Die „bursts" teilen sich auf in kurze (etwa 1 sec dauernde) schwache (die Intensität der thermischen Strahlung nur einige Male übersteigende) und in lange (einige Minuten dauernde) heftige und starke „bursts", während der T_{rad} der Sonne Werte von 10^9 und bisweilen sogar 10^{13} Grad erreicht. Da die vorliegende Strahlung keine Gleichgewichtsstrahlung ist, besitzen diese Zahlen rein formalen Charakter. Die großen „bursts" deutet I. S. Schklowski durch Eigenschwingungen des Plasmas, die unter der Einwirkung eines Stromes sich schnell bewegender Teilchen entstehen. Bekanntlich können in einem Plasma Elektronenschwingungen mit der Frequenz

$$\nu = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\pi m_e}} \tag{22.32}$$

auftreten, die nur von n_e abhängen. Diese Schwingungen scheinen elektromagnetische Schwingungen mit der gleichen Frequenz hervorzurufen [33, § 36]. Aus den Rechnungen geht hervor, daß die Wellen, die der Elektronenkonzentration in der Korona entsprechen, eine Länge von einigen Metern besitzen. Hierbei emittieren die höheren Schichten längere Wellen. Die großen „bursts" treten oft einige Minuten nach chromosphärischen Eruptionen in Erscheinung. Hierbei erscheinen die „bursts" anfangs in kürzeren und danach in immer größer werdenden Wellenlängen. Es entsteht der Eindruck, daß die Ursache, die die Schwingungen auslöst, in immer höhere Schichten der Korona vordringt. Einen Tag nach solchen „bursts" beobachtet man häufig einen magnetischen Sturm. Aus der Verspätung, mit der die „bursts" in den verschiedenen Wellenlängen auftreten, kann man unter Kenntnis der Verteilung von $n_e(r)$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Stroms ausrechnen. Sie ergibt sich zu 500–1000 km/sec. Dies bestätigt die Hypothese, daß die „bursts" von einem Strom geoaktiver Korpuskeln hervorgerufen werden, die insbesondere auch mit den chromosphärischen Eruptionen in Verbindung stehen. Die für die Anregung der Schwingungen von der beobachteten Stärke erforderliche Teilchenkonzentration des Stromes ergibt sich zu 10^2–10^3 in 1 cm^3. Dieser Wert ist sogar kleiner als der aus den Angaben der Ionosphäre ermittelte.

KAPITEL IV

Planetarische Nebel

In diesem Kapitel sollen Objekte mit Emissionslinien in den Spektren behandelt werden. Zu diesen gehören planetarische Nebel, Novae, WOLF-RAYET-, P-Cygni-, Be-Sterne, u. a. m. Wie wir im folgenden noch sehen werden, haben wir es bei all diesen Objekten mit heißen Sternen, die Materie auswerfen, zu tun. Dieser Prozeß führt zur Bildung sehr ausgedehnter und verdünnter Hüllen. In diesen Hüllen entstehen auch die Emissionslinien durch Umwandlung sehr kurzwelliger Sternstrahlung in längerwellige Strahlung, besonders in Strahlung des sichtbaren Spektralbereichs.

Die Tatsache, daß sich das Leuchten der Hüllen im sichtbaren Spektralgebiet auf Kosten der ultravioletten Sternstrahlung vollzieht, spricht für eine starke Abweichung des Zustands dieser Hüllen vom thermodynamischen Gleichgewicht.

Dadurch unterscheiden sich die Hüllen der Sterne mit Emissionslinien von den Atmosphären der gewöhnlichen Sterne, für die sich die Annahme des thermodynamischen Gleichgewichts in erster Näherung als hinreichend erwiesen hat. Zum Studium der oben aufgezählten Objekte können wir nicht einfach die BOLTZMANNsche und die SAHA-Gleichung zur Ermittlung der Anzahl der Atome in den verschiedenen Anregungszuständen und das PLANCKsche Gesetz für die Berechnung der Intensität der Strahlung in den verschiedenen Frequenzen anwenden, sondern müssen die erwähnten Größen in jedem einzelnen Falle aus der Betrachtung solcher Elementarprozesse, die in realen Hüllen stattfinden, bestimmen. Wir gehen gewöhnlich von der Voraussetzung aus, daß in den Hüllen ein stationärer Zustand existiert, d.h., daß sich die Verteilung der Atome auf die verschiedenen Anregungszustände und das Strahlungsfeld in der Hülle zeitlich nicht ändern. Hierbei bedienen wir uns der Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Elementarprozesse (d.h. der Photoionisation, Rekombinationen, Stöße usw.), wie sie die theoretische Physik zu berechnen gestattet.

Infolge der außerordentlich geringen Materie- und Strahlungsdichte in den planetarischen Nebeln zeichnen sich die darin ablaufenden Prozesse durch relative Einfachheit aus.

§ 23. Mechanismus des Nebelleuchtens. Zentralsterntemperaturen

1. Beobachtungsdaten

Ein *planetarischer Nebel* ist eine leuchtende Gasmasse ziemlich regelmäßiger Form mit einem Stern in der Mitte, dem sogenannten *Nebelkern* (*Zentralstern*). Im Fernrohr erscheinen die planetarischen Nebel häufig als kreisförmige oder ovale Scheibchen, die den Planetenscheibchen sehr ähnlich sind (daher auch ihre Bezeichnung). Ein beträchtlicher Teil der Nebel wird auch als Ring, der den Kern umgibt, beobachtet; andere dagegen weisen eine kompliziertere Struktur auf (z.B. zwei sich durchdringende Ringe).

Die Winkeldurchmesser der planetarischen Nebel gehen selten über eine Bogenminute hinaus. Viele (sehr kleine oder sehr ferne) planetarische Nebel werden im Fernrohr überhaupt nicht als Scheibchen gesehen, und es läßt sich nur am Spektrum feststellen, daß es sich bei dem beobachteten Objekt um planetarische Nebel handelt. In den letzten Jahren wurden mehr als hundert solcher „sternförmiger Nebel“ entdeckt, und die Gesamtzahl aller bis heute bekannten planetarischen Nebel beträgt etwa 300.

Die planetarischen Nebel sind so weit von uns entfernt, daß auch nicht für einen eine trigonometrische Parallaxe sicher bestimmt wurde. Die mittleren Entfernungen der beobachteten planetarischen Nebel, wie sie aus der Methode der Rotationsparallaxen gefunden wurden, sind von der Größenordnung einiger 1000 parsec. Dementsprechend erhält man als mittleren linearen Durchmesser der Nebel einige Zehntausend astronomische Einheiten, und die mittlere absolute Helligkeit der Nebel beträgt etwa 0^m.

Die planetarischen Nebel sind in der Regel wesentlich heller als ihre Zentralsterne. Die Differenzen zwischen Nebelhelligkeit in Größenklassen und Zentralsternhelligkeit sind fast immer negativ und betragen bis zu -7^m. Als mittlere absolute photographische Helligkeit des Zentralsterns findet man etwa $+3^m$. Die Zentralsterne der Nebel sind immer sehr heiße Sterne. Sie gehören zum Spektraltyp O und W (Wolf-Rayet-Sterne). Dazu ist jedoch zu sagen, daß die Zentralsterne ihrer Leuchtkraft nach den gewöhnlichen O- und W-Sternen, deren absolute Helligkeit um -3^m schwankt, stark nachstehen.

Die Spektren der planetarischen Nebel zeigen Emissionslinien verschiedener Atome und Ionen. Vor allem treten die Linien der Balmer-Serie des Wasserstoffs sehr intensiv auf. Gemeinsam mit diesen Linien wird das Balmer-Kontinuum in Emission beobachtet, das durch den Einfang freier Elektronen durch Protonen entsteht. Neben den Linien des neutralen Heliums kommen in den Spektren vieler Nebel auch die des ionisierten Heliums (z.B. $\lambda = 4686$ Å) vor, was auf einen sehr hohen Ionisations- und Anregungsgrad in diesen Nebel hindeutet.

Die hellsten Linien in den Spektren der planetarischen Nebel sind die sogenannten Hauptnebellinien N_1 und N_2 mit den Wellenlängen 5006 Å und 4959 Å. Ein anderes Paar sehr intensiver Linien, 3726 Å und 3729 Å, ist im ultravioletten Teil des Spektrums zu beobachten. Diesen beiden Dubletts

begegnet man auch in den Spektren der diffusen Nebel und Novae, in den Spektren der planetarischen Nebel dominieren sie jedoch. Da diese Linien neben einer Reihe anderer in den Nebelspektren zu beobachtender nicht im Laboratorium zu erhalten waren, schrieb man sie ursprünglich einem auf der Erde nicht vorkommenden Element, dem „Nebulium" zu. Im Jahre 1928 gelang jedoch BOWEN der Nachweis, daß es sich bei den Nebuliumlinien in Wirklichkeit um verbotene Linien uns wohlbekannter Elemente handelt. Ihr Auftreten in den Nebelspektren rührt von den besonderen physikalischen Bedingungen her, die in den Nebeln herrschen und bisher in Laboratorien noch nicht reproduziert werden konnten.

Nach der Interpretation von BOWEN ist das grüne Dublett in den Nebelspektren (die Linien N_1 und N_2) einem verbotenen Übergang des zweifach ionisierten Sauerstoffs zuzuschreiben und das ultraviolette Dublett einem verbotenen Übergang des einfach ionisierten Sauerstoffs. Die übrigen Linien des „Nebuliums" sind ebenfalls verbotene Linien des Sauerstoffs, Stickstoffs und einiger anderer Elemente in verschiedenen Ionisationsstufen. Die Richtigkeit dieser Identifizierung wird nicht nur durch das genaue Zusammenfallen der beobachteten mit den aus der Lage der Energieniveaus theoretisch gefundenen Wellenlängen bestätigt, sondern auch durch eine ganze Reihe anderer Tatsachen. Als Beispiel sei erwähnt, daß nach BOWEN die Linien N_1 und N_2 ein gemeinsames oberes Niveau haben und das Verhältnis ihrer Intensitäten stets konstant, und zwar gleich 3, sein muß. Ein derartiges Intensitätsverhältnis dieser Linien wird auch in den Nebelspektren beobachtet.

Von großem Interesse ist auch die Form der Linien in den Spektren der planetarischen Nebel. Stellt man den Spektrographenspalt längs eines Nebeldurchmessers ein, so sind die Spektrallinien an den Enden schmal und in der Mitte breiter. In einigen Fällen spalten die Linien in der Mitte in zwei Komponenten auf. Diese Form der Spektrallinien läßt sich durch die Expansion der planetarischen Nebel erklären. Dabei rührt die violette Komponente der Spektrallinien von dem Teil des Nebels her, der sich uns nähert, die nach rot verschobene von den Teilen des Nebels, die sich von uns entfernen. Der größte Abstand zwischen den Komponenten (oder die größte Linienbreite, wenn die Komponenten miteinander verschmelzen) charakterisiert die doppelte Expansionsgeschwindigkeit des Nebels. Diese Geschwindigkeit wurde für eine Reihe von Nebeln bestimmt; sie liegt bei 10–20 km/sec. Die Tatsache der Expansion der planetarischen Nebel führt zu der Hypothese, daß die Nebelmaterie irgendwann einmal aus dem Kern ausgestoßen wurde. Nähere Beobachtungseinzelheiten über Nebel finden sich in [42].

2. Die Ursache des Nebelleuchtens

Zur Deutung der Beobachtungsbefunde wollen wir zunächst die Frage nach der Ursache des Nebelleuchtens beantworten. Man nimmt natürlich an, daß das Leuchten der Nebel durch ihre Zentralsterne hervorgerufen wird. Es handelt sich jedoch dabei nicht einfach um eine Reflexion des Sternenlichts, denn die

Nebelspektren sind den Spektren der Zentralsterne durchaus nicht ähnlich. In den Nebeln tritt auch keine Resonanzstreuung auf, denn die vom Nebel in einzelnen Linien ausgestrahlte Energie übertrifft die Energie der entsprechenden Bereiche des kontinuierlichen Spektrums der Zentralsterne beträchtlich. Anscheinend strahlen also die Nebel im sichtbaren Spektralbereich auf Kosten der Energie, die von den Zentralsternen in anderen Spektralbereichen emittiert wird. Da die Temperaturen der Zentralsterne sehr hoch sind (höher als 30000°), ist bei ihnen die Intensität im Ultravioletten besonders groß, so daß die Annahme naheliegt, daß die Nebel die UV-Strahlung des Zentralsterns absorbieren und dafür längerwelliges Licht wieder ausstrahlen. Wir wollen zeigen, daß diese Vermutung vollkommen den Tatsachen entspricht.

Zunächst beschäftigen wir uns mit den Eigenschaften der Strahlung, die vom Zentralstern an einen gegebenen Ort des Nebels kommt. Es wird angenommen, daß der Stern wie ein absolut schwarzer Körper der Temperatur T_* strahlt. Die Strahlungsdichte bei der Temperatur T_* im thermodynamischen Gleichgewicht bezeichnen wir mit ϱ_ν^*. Sie ist durch die PLANCKsche Funktion

$$\varrho_\nu^* = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT_*}} - 1} \tag{23.1}$$

gegeben. An der Oberfläche des Sterns ist die Strahlungsdichte gleich $\frac{1}{2}\varrho_\nu^*$; sie nimmt mit zunehmender Entfernung vom Stern nach dem Gesetz

$$\varrho_\nu = W\varrho_\nu^* \tag{23.2}$$

ab, wobei W der von uns in § 8 eingeführte Verdünnungsfaktor der Strahlung ist. Er ist gleich dem Verhältnis des Raumwinkels, unter dem wir von einem gegebenen Punkt aus den Zentralstern sehen, zu 4π. Ist der Radius des Sterns gleich r_*, so ist im Abstand r von seinem Mittelpunkt der Verdünnungsfaktor nach (8.3) gleich

$$W = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_*}{r}\right)^2}\right]. \tag{23.3}$$

In den Fällen, wo $\frac{r_*}{r} \ll 1$ ist, erhalten wir statt (23.3)

$$W = \frac{1}{4}\left(\frac{r_*}{r}\right)^2. \tag{23.4}$$

In planetarischen Nebeln ist das Verhältnis $\frac{r_*}{r}$ von der Größenordnung 10^{-7}. Demzufolge ist die Strahlungsdichte in einem planetarischen Nebel ungefähr um den Faktor 10^{14} geringer als die Strahlungsdichte an der Sternoberfläche.

Wichtig ist, daß trotz dieser starken Abnahme der Strahlungsdichte des Sterns im Nebel die relative Energieverteilung in ihrem Spektrum unverändert bleibt. Um dieses Mißverhältnis zwischen der Strahlungsdichte und ihrer spektralen Zusammensetzung zu unterstreichen, berechnen wir die Temperatur,

die der gegebenen Strahlungsdichte im Nebel entspricht. Bezeichnen wir diese Temperatur mit T_1, dann erhalten wir für die integrale Strahlungsdichte $\varrho = a\,T_1^4$, wobei a die STEFANsche Konstante ist. Andererseits erhalten wir nach (23.2) $\varrho = W a T_*^4$. Diese Beziehungen liefern $T_1 = W^{\frac{1}{4}}\, T_*$. Daraus ergibt sich für T_1 ein Wert von einigen zehn Grad. Würde also die Strahlung im Nebel im Gleichgewicht sein, d.h., wäre die Energieverteilung im Spektrum bei gegebener integraler Dichte nicht durch die Formel (23.2) gegeben, sondern durch das PLANCKsche Gesetz mit der Temperatur T_1, so verschöbe sich das Energiemaximum in das ferne Infrarot.

Diese Unstimmigkeit zwischen spektraler Energieverteilung und Strahlungsdichte gibt einen Hinweis darauf, in welcher Richtung die Prozesse der Umwandlung der Sternstrahlung im Nebel verlaufen müssen. Aus der Thermodynamik ist bekannt, daß in solchen Fällen die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie zu einer neuen, wahrscheinlicheren Verteilung der Strahlung auf die verschiedenen Frequenzen führt. Die Nebel wandeln also die Strahlung ihrer Zentralsterne um, sie verstärken den längerwelligen Spektralbereich und schwächen den kurzwelligen.

Der Prozeß der „Umwandlung" der Strahlung im Nebel kann durch das ROSSELANDsche Theorem charakterisiert werden, zu dem wir jetzt übergehen wollen.

Wir betrachten ein Atom, das sich in drei stationären Zuständen 1, 2, 3 mit den entsprechenden Energien $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ befinden kann. Absorbiert ein solches Atom Lichtquanten, so sind als Folgeprozesse sowohl einfache Übergänge vom Typ $1 \to 2 \to 1$, die mit Resonanzstreuung verbunden sind, als auch kompliziertere zyklische Prozesse möglich. Die wichtigsten unter ihnen sind die beiden entgegengesetzt verlaufenden Prozesse vom Typ

$$1 \to 2 \to 3 \to 1\,, \quad 1 \to 3 \to 2 \to 1\,.$$

Der erste dieser beiden Prozesse führt zur Ausstrahlung eines Quants hoher Frequenz ν_{13} als Resultat der Absorption zweier Quanten niedrigerer Frequenz ν_{12} und ν_{23}, und der zweite zur Aufteilung eines absorbierten Quants der Frequenz ν_{13} in zwei Quanten der Frequenzen ν_{12} und ν_{23}.

Das Theorem von ROSSELAND behauptet nun, daß bei verdünnter Strahlung, wenn also die Strahlungsdichte in den verschiedenen Frequenzen durch die Formel (23.2) gegeben ist, zyklische Übergänge vom Typ $1 \to 3 \to 2 \to 1$ häufiger realisiert werden als solche vom Typ $1 \to 2 \to 3 \to 1$, d.h., daß vorwiegend Quanten hoher Frequenzen in Quanten niedrigerer Frequenzen umgewandelt werden und nicht umgekehrt.

Die Zahl der Übergänge vom Zustand 1 in den Zustand 2 pro Zeit- und Volumeneinheit ist $n_1 B_{12} \varrho_{12}$, wobei n_1 die Zahl der Atome in der Volumeneinheit im Zustand 1, B_{12} die EINSTEINsche Übergangswahrscheinlichkeit und ϱ_{12} die Dichte der Strahlung der Frequenz bedeuten, die dem Übergang aus dem ersten in den zweiten Zustand entspricht. Von diesen Atomen im Zustand 2 geht ein Teil A_{21} spontan oder erzwungen in den Zustand 1 zurück, während ein Teil

durch Strahlungsabsorption in den Zustand 3 übergeht. Das Verhältnis der Zahl der Übergänge aus dem zweiten in den dritten Energiezustand zur Gesamtzahl der Übergänge aus dem zweiten Zustand ist gleich

$$\frac{B_{23}\varrho_{23}}{A_{21}+B_{21}\varrho_{12}+B_{23}\varrho_{23}}.$$

Aus dem dritten Anregungszustand sind Übergänge sowohl in den ersten als auch in den zweiten möglich. Uns interessieren nur die Übergänge in den ersten Zustand. Der Bruchteil dieser Übergänge ist gleich

$$\frac{A_{31}+B_{31}\varrho_{13}}{A_{31}+B_{31}\varrho_{13}+A_{32}+B_{32}\varrho_{23}}.$$

In der Zeiteinheit führen somit

$$N_{1\to 2\to 3\to 1} = n_1 B_{12}\varrho_{12}\frac{B_{23}\varrho_{23}}{A_{21}+B_{21}\varrho_{12}+B_{23}\varrho_{23}} \times \frac{A_{31}+B_{31}\varrho_{13}}{A_{31}+B_{31}\varrho_{13}+A_{32}+B_{32}\varrho_{23}} \tag{23.5}$$

Atome Übergänge vom Typ $1\to 2\to 3\to 1$ aus. Ganz analog findet man die Zahl der Atome, die auf dem Wege $1\to 3\to 2\to 1$ in der Zeiteinheit übergehen. Sie ist gleich

$$N_{1\to 3\to 2\to 1} = n_1 B_{13}\varrho_{13}\frac{A_{32}+B_{32}\varrho_{23}}{A_{32}+B_{32}\varrho_{23}+A_{31}+B_{31}\varrho_{13}} \times \frac{A_{21}+B_{21}\varrho_{12}}{A_{21}+B_{21}\varrho_{12}+B_{23}\varrho_{23}}. \tag{23.6}$$

Für das Verhältnis der Anzahl der Prozesse vom Typ $1\to 2\to 3\to 1$ zur Zahl der Prozesse vom Typ $1\to 3\to 2\to 1$ erhalten wir aus (23.5) und (23.6)

$$\frac{N_{1\to 2\to 3\to 1}}{N_{1\to 3\to 2\to 1}} = \frac{B_{12}\varrho_{12}B_{23}\varrho_{23}(A_{31}+B_{31}\varrho_{13})}{B_{13}\varrho_{13}(A_{32}+B_{32}\varrho_{23})(A_{21}+B_{21}\varrho_{12})}. \tag{23.7}$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks führen wir nach EINSTEIN die folgenden Beziehungen ein:

$$A_{ki} = B_{ik}\frac{g_i}{g_k}\sigma_{ik}, \quad B_{ki} = \frac{g_i}{g_k}B_{ik}, \tag{23.8}$$

worin

$$\sigma_{ik} = \frac{8\pi h\nu_{ik}^3}{c^3} \tag{23.9}$$

und g_i und g_k die statistischen Gewichte der entsprechenden Zustände sind.

Außerdem können wir schreiben

$$\varrho_{ik} = W\sigma_{ik}\bar{\varrho}_{ik}, \tag{23.10}$$

mit

$$\bar{\varrho}_{ik} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{ik}}{kT_*}} - 1}. \tag{23.11}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen finden wir an Stelle von (23.7)

$$\frac{N_{1\to 2\to 3\to 1}}{N_{1\to 3\to 2\to 1}} = W\frac{\bar{\varrho}_{12}\bar{\varrho}_{23}(1 + W\bar{\varrho}_{13})}{\bar{\varrho}_{13}(1 + W\bar{\varrho}_{12})(1 + W\bar{\varrho}_{23})}. \tag{23.12}$$

Ist $W = 1$, d.h. also in der Photosphäre des Sterns, ist dieses Verhältnis, wie zu erwarten war, gleich 1. Bei Abnahme von W nimmt dieses Verhältnis ab. Da in den Nebeln W von der Größenordnung 10^{-14} und der Faktor $\frac{\bar{\varrho}_{12}\bar{\varrho}_{23}}{\bar{\varrho}_{13}} \approx 1$ ist, haben wir

$$\frac{N_{1\to 2\to 3\to 1}}{N_{1\to 3\to 2\to 1}} \approx W. \tag{23.13}$$

Man kann also in Nebeln die Anzahl der Übergänge vom Typ $1 \to 2 \to 3 \to 1$ gegenüber der Zahl der Übergänge vom Typ $1 \to 3 \to 2 \to 1$ ganz vernachlässigen.

Genau das gleiche Bild erhalten wir für Atome mit einer größeren Zahl von Niveaus, in denen kompliziertere zyklische Prozesse möglich sind.

Nach dem Theorem von ROSSELAND kann also das Nebelleuchten als Ergebnis einer „Umwandlung" von Ultraviolettquanten des Zentralsterns in Quanten niedrigerer Frequenzen (speziell solche des sichtbaren Spektralbereichs) erklärt werden. Da die Zentralsterne der Nebel sehr heiße Sterne sind, ist es nicht erstaunlich, daß der von dem Nebel in sichtbare Strahlung umgewandelte Teil der Energie des ultravioletten Spektralbereichs der Sternstrahlung die Energie übertrifft, die vom Stern selbst im Sichtbaren ausgestrahlt wird. So erklärt es sich auch, daß die Nebel im Visuellen heller sind als ihre Zentralsterne.

3. Die Bestimmung der Zentralsterntemperatur aus den Wasserstofflinien

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir einen Nebel betrachtet, der aus fiktiven Atomen mit 3 Energieniveaus besteht. Wir hatten angenommen, daß der Nebel nur der Einwirkung der Strahlung des Zentralsterns unterliegt, und haben die diffuse Strahlung des Nebels selbst nicht berücksichtigt. Jetzt betrachten wir das Leuchten eines realen Nebels aus Wasserstoffatomen.

Infolge der geringen Strahlungsdichte im Nebel befindet sich die Mehrzahl der Atome im Grundzustand. Daher wird der Nebel bei hinreichend großer Masse in den Frequenzen, die vom Grundzustand des Wasserstoffatoms aus ab-

sorbiert werden (LYMAN-Serie), undurchsichtig und gleichzeitig in den Frequenzen der Linien höherer Serien (BALMER-, PASCHEN- usw. Serie) vollkommen durchsichtig sein. Der Nebel absorbiert die Strahlung des Zentralsterns in den Frequenzen der LYMAN-Serie und emittiert stattdessen die Frequenzen der höheren Serien (insbesondere der von uns beobachteten BALMER-Serie), die also vom Nebel ungehindert durchgelassen wird.

Die Annahme, daß die in den BALMER-Linien ausgestrahlte Energie aus der Sternstrahlung in den einzelnen LYMAN-Linien entnommen wird, führt jedoch zu sehr hohen Zentralsterntemperaturen (höher als 100000°). Inzwischen kennen wir aber die Temperaturen wenigstens einiger Zentralsterne, die etwa 30000° betragen. Man muß daher annehmen, daß in dem Nebel so viele Wasserstoffatome vorhanden sind, die nicht nur die Quanten der LYMAN-Linien des Sternspektrums, sondern auch Quanten des kontinuierlichen Spektrums jenseits der Grenze der LYMAN-Serie absorbieren. Bei Absorption dieser Quanten werden die Wasserstoffatome ionisiert, und nach der Rekombination finden „Kaskaden"übergänge der Elektronen von Niveau zu Niveau statt, wobei Quanten der BALMER-, PASCHEN- und anderer Serien ausgestrahlt werden.

Nach diesen Darlegungen muß die optische Dicke des Nebels jenseits der Grenze der LYMAN-Serie größer als 1 oder wenigstens nicht wesentlich kleiner als 1 sein. Das Verhältnis des Absorptionskoeffizienten in den ersten Linien der LYMAN-Serie zum kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten an der Seriengrenze ist von der Größenordnung 10^4-10^5. Daher ist auch die optische Dicke in diesen Linien von der gleichen Größenordnung oder sogar noch größer.

Um die Bedingungen aufzuklären, die im Nebel herrschen, wollen wir das Schicksal der „Ultraviolettquanten", die im Nebel absorbiert werden, eingehender verfolgen, wobei wir unter „Ultraviolettquanten" oder L_c-Quanten im folgenden Quanten mit Frequenzen größer als die Grenzfrequenz der LYMAN-Serie verstehen wollen.

Ein L_c-Quant, das vom Stern ausgestrahlt wird, wird also vom Nebel absorbiert und führt zur Ionisation eines Wasserstoffatoms. Nach einer gewissen Zeit findet eine Wiedervereinigung des freien Elektrons mit einem Proton statt. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Das Elektron fällt direkt auf das erste Niveau oder

2. das Elektron fällt auf eins der höheren Niveaus.

Im ersteren Falle wird ein L_c-Quant ausgestrahlt, und der ganze Vorgang wiederholt sich. Im zweiten Falle vollzieht das Elektron eine Reihe von Übergängen, deren letzter auf dem Grundniveau endet. Die Verdünnung der Strahlung ist so stark und die Materiedichte im Nebel so gering, daß diese Folge von Übergängen in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle nicht gestört wird.

Wird ein Elektron direkt auf das zweite Niveau eingefangen, dann wird ein Quant des BALMER-Kontinuums ausgestrahlt, das den Nebel verläßt. Danach geht das Elektron vom zweiten auf das erste Niveau über, wobei ein Quant der ersten Linie der LYMAN-Serie, die $L\alpha$-Linie, ausgestrahlt wird. Wegen der großen optischen Dicke des Nebels in den Linien der LYMAN-Serie wird das $L\alpha$-Quant schon nach kurzem Weg im Nebel von irgendeinem anderen Atom,

das sich im Grundzustand befindet, absorbiert. Dieses Atom geht dadurch in den zweiten Anregungszustand über und kehrt dann spontan in den Grundzustand zurück, wobei es ein $L\alpha$-Quant emittiert. Das $L\alpha$-Quant erfährt also nur eine Streuung, die sich so lange fortsetzt, bis es an die Grenzen des Nebels gelangt und diesen nach außen verläßt. Es verlassen also im vorliegenden Falle, d.h. bei Rekombination auf das zweite Energieniveau, ein Quant des BALMER-Kontinuums und ein $L\alpha$-Quant den Nebel.

Wir nehmen jetzt an, daß das Elektron auf das dritte Energieniveau eingefangen wird. Hierbei wird ein Quant des PASCHEN-Kontinuums ausgestrahlt, das den Nebel verläßt. Für das Elektron gibt es jetzt zwei Möglichkeiten, und zwar entweder direkt auf das erste Niveau zu fallen unter Emission eines $L\beta$-Quants, oder aber zunächst auf das zweite Niveau überzugehen und dann auf das erste, wobei ein $H\alpha$- und ein $L\alpha$-Quant ausgestrahlt werden. Das bei der ersten Möglichkeit erscheinende $L\beta$-Quant wird wegen der großen optischen Dicke des Nebels in den LYMAN-Linien absorbiert, wodurch aufs neue ein Atom auf den dritten Zustand angeregt wird. Daher realisiert sich früher oder später auch die zweite der erwähnten Möglichkeiten. Das hierbei auftretende $H\alpha$-Quant verläßt ungehindert den Nebel, während das $L\alpha$-Quant wie oben erwähnt, eine Vielfachstreuung erfährt, bevor es aus dem Nebel entweicht. Beim Einfang eines Elektrons auf das dritte Energieniveau verlassen somit drei Quanten den Nebel: eines des PASCHEN-Kontinuums, ein $H\alpha$- und ein $L\alpha$-Quant.

Analoge Überlegungen lassen sich auch für Rekombinationen auf jedes höhere Niveau anstellen. Es ist leicht einzusehen, daß jede Folge von Übergängen eines Elektrons von Niveau zu Niveau mit der Bildung eines $L\alpha$-Quants endet, dem ein Übergang des Elektrons auf das zweite Energieniveau mit Ausstrahlung eines BALMER-Quants vorangehen muß. Wir gelangen somit zu der folgenden wichtigen Feststellung: Aus jedem L_c-Quant, das im Nebel absorbiert und umgewandelt wird, entsteht notwendigerweise ein $L\alpha$-Quant und ein BALMER-Quant.

Wandelt der Nebel alle vom Stern emittierten L_c-Quanten um, so folgt daraus, daß die Zahl dieser Quanten der Zahl der BALMER-Quanten, die vom Nebel ausgestrahlt werden, gleich sein muß. Es ist offensichtlich, daß dies dann der Fall sein wird, wenn die optische Dicke des Nebels jenseits der Grenze der LYMAN-Serie wesentlich größer als 1 ist. Ganz allgemein kann man jedoch behaupten, daß die Anzahl der BALMER-Quanten, die vom Nebel ausgestrahlt werden, die Zahl der vom Zentralstern ausgesandten L_c-Quanten nicht übersteigt, d.h.

$$N_{\mathrm{Ba}} \leqslant N^*_{\mathrm{L}_c}. \tag{23.14}$$

Auf diesem Theorem beruht die von ZANSTRA (Zs. f. Ap. *2*, 1, 1930) vorgeschlagene Methode zur Bestimmung der Farbtemperatur des Zentralsterns planetarischer Nebel. Wenn die Zahl der vom Nebel emittierten BALMER-Quanten die untere Grenze für die Zahl der L_c-Quanten darstellt, die vom Zentralstern ausgestrahlt werden, so vergleichen wir faktisch eine bestimmte untere Grenze der Intensität des Sternspektrums jenseits der Grenze der LYMAN-Serie mit der Inten-

sität des Sternspektrums im Sichtbaren, wenn wir die Anzahl der BALMER-Quanten der Nebelstrahlung der Anzahl der vom Zentralstern im sichtbaren Spektralbereich emittierten Quanten gegenüberstellen. Dies ermöglicht eine Bestimmung der unteren Grenze der Sterntemperatur.

Wenn der Stern nach dem PLANCKschen Gesetz strahlt, r_* sein Radius und T_* die Temperatur ist, so ist die Gesamtzahl der L_c-Quanten, die er in der Zeiteinheit aussendet, gleich

$$N_{L_c}^* = 4\pi r_*^2 \frac{2\pi}{c^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT*}} - 1}, \tag{23.15}$$

worin ν_0 die Grenzfrequenz der LYMAN-Serie darstellt.

Ist andererseits E_i die Gesamtenergie, die in der Sekunde vom ganzen Nebel in der i-ten BALMER-Linie ausgestrahlt wird, und weiter $\left(\frac{\partial E_*}{\partial \nu}\right)_i$ die Gesamtenergie, die vom Stern in der Frequenz- und Zeiteinheit emittiert wird, und zwar an derselben Stelle des Spektrums, dann ist

$$A_i = \frac{E_i}{\nu_i \left(\frac{\partial E_*}{\partial \nu}\right)_i} \tag{23.16}$$

eine dimensionslose Größe, die sich unmittelbar aus der Beobachtung bestimmen läßt. Es ist aber auch

$$\left(\frac{\partial E_*}{\partial \nu}\right)_i = 4\pi r_*^2 \frac{2\pi h \nu_i^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_i}{kT_*}} - 1}. \tag{23.17}$$

Daher ist die Gesamtzahl der vom Nebel emittierten BALMER-Quanten gleich

$$N_{\mathrm{Ba}} = \sum \frac{E_i}{h\nu_i} = \frac{1}{h} \sum A_i \left(\frac{\partial E_*}{\partial \nu}\right)_i = 4\pi r_*^2 \frac{2\pi}{c^2} \sum \frac{\nu_i^3 A_i}{e^{\frac{h\nu_i}{kT_*}} - 1}. \tag{23.18}$$

Aus der Ungleichung (23.14) erhalten wir mit (23.15) und (23.18)

$$\sum \frac{\nu_i^3 A_i}{e^{\frac{h\nu_i}{kT_*}} - 1} \leqslant \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT*}} - 1}. \tag{23.19}$$

Wir führen nun folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{h\nu}{kT_*} = x, \quad \frac{h\nu_0}{kT_*} = x_0, \quad \frac{h\nu_i}{kT_*} = x_i. \tag{23.20}$$

Damit vereinfacht sich (23.19) wie folgt:

$$\sum \frac{x_i^3 A_i}{e^{x_i} - 1} \leqslant \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1}. \tag{23.21}$$

Die Summation auf der linken Seite dieser Ungleichung erstreckt sich nicht nur auf alle Linien der BALMER-Serie sondern auch auf das BALMER-Kontinuum.

Die Ungleichung (23.21) ist durch Probieren zu lösen. Wählt man verschiedene Werte T_* und rechnet x_0 und x_i aus, so findet man, bei welchem Wert T_* das Gleichheitszeichen gilt. Damit ist die untere Grenze der Sterntemperatur bestimmt. Tabellen, die das Auffinden der Lösung dieser Gleichung erleichtern, hat ZANSTRA berechnet; graphische Darstellungen finden sich in einer Arbeit von B. A. WORONZOW-WELJAMINOW [43].

Die dargelegte Methode zur Bestimmung der Zentralsterntemperatur wurde praktisch von ZANSTRA und einigen anderen Autoren angewandt. Als Beispiel bringen wir hier einige Ergebnisse von ZANSTRA, die er mit selbstgemessenen Werten der Größe A_i erhalten hat:

Nebel NGC 6543 $T_* = 39000°$,

Nebel NGC 6572 $T_* = 40000°$,

Nebel NGC 7009 $T_* = 55000°$.

Es ist noch zu bemerken, daß die Methode ganz unempfindlich gegenüber kleinen Fehlern der A_i-Werte ist, da man im wesentlichen zwei weit auseinanderliegende Teile des Sternspektrums miteinander vergleicht.

Die Strahlung der planetarischen Nebel in den Linien anderer Atome (wie wir unten noch sehen werden jedoch nicht in allen Linien) vollzieht sich genauso wie das Leuchten in den Wasserstofflinien als Folge der Photoionisation durch die ultraviolette Sternstrahlung und der nachfolgenden Rekombinationen. So leuchten die Nebel besonders in den Linien des neutralen und ionisierten Heliums. Aus ihrer Intensität kann man die Sterntemperatur genauso bestimmen wie aus der Intensität der Wasserstofflinien. Diese Bestimmungen führten wiederum zu sehr hohen Werten der Sterntemperaturen. Es zeigte sich aber dabei, daß sich für die Temperatur ein und desselben Sterns, die aus den Linien verschiedener Atome bestimmt wurde, ziemlich stark von einander abweichende Werte ergeben. Zum Beispiel fand ZANSTRA für den Zentralstern des Nebels NGC 7009 eine Temperatur $T_* = 70000°$ aus den Linien des ionisierten Heliums und $T_* = 55000°$ aus denen des Wasserstoffs. In vielen Fällen ist die Divergenz noch größer.

Zur Erklärung dieser Divergenz kann man einige Ursachen anführen. Wir nennen nur die beiden wichtigsten:

1. Die Methode von ZANSTRA liefert nicht die tatsächliche Sterntemperatur, sondern nur deren unteren Grenzwert. Wenn der Nebel nur einen kleinen Bruch-

teil der Sternenergie jenseits der Grenze der Hauptserie des jeweiligen Atoms absorbiert, so muß diese Grenze beträchtlich unterhalb der wirklichen Temperatur liegen. Anscheinend trifft dies in einigen Fällen für Temperaturen zu, die aus den Wasserstofflinien bestimmt wurden, da infolge der starken Ionisation des Wasserstoffs im Nebel die Absorption der L_c-Strahlung des Zentralsterns nicht vollständig sein kann.

2. Man kann annehmen, daß die Energieverteilung im Sternspektrum nicht dem PLANCKschen Gesetz folgt, sondern merklich davon abweicht. In diesem Falle hat der Begriff der Farbtemperatur keinen eindeutigen Sinn mehr.

4. Die Bestimmung der Zentralsterntemperatur aus den Linien des „Nebuliums"

Wir sagten oben, daß die Mehrzahl der Linien in den Spektren der planetarischen Nebel durch Photoionisationen und nachfolgende Rekombinationen entsteht. Es ist jedoch leicht zu zeigen, daß einige Linien, darunter die Hauptnebellinien N_1 und N_2, auf andere Weise zustande kommen.

Nehmen wir an, daß sich das Leuchten des Nebels in den Linien N_1 und N_2 auf Kosten der Sternenergie jenseits der Grenze der Hauptserie des zweifach ionisierten Sauerstoffs vollzieht, dann kann die Zahl der Quanten, die vom Stern jenseits der Grenze dieser Serie emittiert werden, nicht kleiner sein als die Zahl der Quanten, die vom Nebel in den Linien N_1 und N_2 ausgestrahlt werden. Die Grenze der Hauptserie des O III-Atoms liegt aber sehr weit im ultravioletten Spektralbereich (das Ionisationspotential von O III ist annähernd viermal so groß wie das Ionisationspotential des Wasserstoffs). Daraus folgt, daß – wenn unsere Annahme richtig wäre – die Sterntemperatur außerordentlich hoch sein müßte – in einigen Fällen über 1 Million Grad.

Hieran schließt sich noch folgende Überlegung an. Da die Ionisationspotentiale von O III und He II fast gleich groß sind (54,5 bzw. 54,2 eV), absorbieren diese Atome die Sternenergie in ein und demselben Spektralbereich. Würde der Nebel nur auf Kosten der erwähnten Energie in den Linien N_1 und N_2 strahlen, so würden die Linien N_1 und N_2 in ihrer Intensität nicht über die He II-Linien hinausgehen (da es nicht weniger He-Atome als O-Atome gibt). Es gibt aber tatsächlich eine Reihe von Nebeln, in denen die He II-Linien fast nicht auftreten, während die Linien N_1 und N_2 mit größter Intensität erscheinen.

Dies deutet darauf hin, daß in den Nebeln noch irgendein anderer Anregungsmechanismus (außer der Rekombination) wirksam sein muß. Auf einen derartigen Mechanismus wies BOWEN hin, dem auffiel, daß die Anregungspotentiale der Niveaus, von denen die „Nebuliumlinien" ausgestrahlt werden, sehr niedrig sind (z.B. nur 2,5 eV für die Linien N_1 und N_2). Demzufolge kann ein beträchtlicher Prozentsatz der freien Elektronen im Nebel eine Energie besitzen, die ausreichend ist, diese Niveaus durch Stoß anzuregen. BOWEN nahm daher an, daß die Nebel in den „Nebuliumlinien" auf Kosten der *kinetischen Energie der freien Elektronen* strahlen.

Natürlich entstammt letzten Endes die Energie der freien Elektronen auch

der ultravioletten Sternstrahlung. Diese Strahlung trennt nicht nur die Elektronen von den Atomen ab, sondern erteilt ihnen auch eine gewisse kinetische Energie. Einen Teil dieser Energie verausgaben die Elektronen zur Anregung der „Nebuliumlinien", bevor sie von Ionen eingefangen werden.

Diese Vorstellung über das Leuchten der Nebel in den „Nebuliumlinien" ermöglichte es ZANSTRA, eine weitere Methode zur Bestimmung der Zentralsterntemperatur anzugeben.

Wir wollen annehmen, daß die freien Elektronen hauptsächlich durch Ionisation der Wasserstoffatome entstehen. Wenn die Ionisation durch Absorption eines Quants der Frequenz ν hervorgerufen wird, so teilt sich dem abgetrennten Elektron die kinetische Energie

$$\frac{1}{2} m v^2 = h\nu - h\nu_0$$

mit, wobei ν_0 die Ionisationsfrequenz des Wasserstoffs ist. Im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ werden insgesamt vom Stern

$$4\pi r_*^2 \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT_*}} - 1}$$

Quanten in einer Sekunde ausgestrahlt. Daher wird die gesamte kinetische Energie, welche die freien Elektronen in einer Sekunde gewinnen, wenn alle vom Stern emittierten L_c-Quanten absorbiert werden, gleich

$$4\pi r_*^2 \frac{2\pi h}{c^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{(\nu - \nu_0)\,\nu^2}{e^{\frac{h\nu}{kT_*}} - 1} d\nu . \tag{23.22}$$

Andererseits läßt sich die in den „Nebuliumlinien" vom Nebel ausgestrahlte Energie in der Form

$$4\pi r_*^2 \frac{2\pi h}{c^2} \sum_{\text{Neb}} \frac{\nu_i^4}{e^{\frac{h\nu_i}{kT_*}} - 1} A_i \tag{23.23}$$

schreiben, wobei die A_i die nach der Formel (23.16) aus der Beobachtung zu bestimmenden Größen sind und die Summation sich über alle „Nebuliumlinien" erstreckt, die durch Elektronenstoß angeregt werden.

Da die Energie, die zur Anregung der „Nebuliumlinien" aufzubringen ist, nicht die kinetische Energie der Elektronen übertreffen kann, finden wir durch Vergleich von (23.22) und (23.23)

$$\sum_{\text{Neb}} \frac{\nu_i^4 A_i}{e^{\frac{h\nu_i}{kT_*}} - 1} \leqq \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{(\nu - \nu_0)\,\nu^2}{e^{\frac{h\nu}{kT_*}} - 1} d\nu \tag{23.24}$$

oder, unter Benutzung der in (23.20) eingeführten Abkürzungen,

$$\sum_{\text{Neb}} \frac{x_i^4}{e^{x_i} - 1} A_i \leq \int_{x_0}^{\infty} \frac{(x - x_0)\, x^2}{e^x - 1}\, dx. \tag{23.25}$$

In der Ungleichung (23.25) ist die Temperatur T_* unbekannt, die sowohl in x_0 als auch in x_i eingeht. Die Lösung dieser Ungleichung liefert eine untere Grenze der Sterntemperatur.

Nachstehend sind als Ergebnis die unteren Grenztemperaturen für die Zentralsterne dreier Nebel aufgeführt:

NGC 6543 $T_* = 37000°$,

NGC 6572 $T_* = 38000°$,

NGC 7009 $T_* = 50000°$.

Wir sehen, daß die nach dieser Methode erhaltenen Ergebnisse ziemlich gut mit den Resultaten, die aus den Wasserstofflinien erhalten wurden, übereinstimmen. Es ist durchaus möglich, daß diese Übereinstimmung darauf beruht, daß die nach den beiden verschiedenen Methoden erhaltenen Ergebnisse nicht nur die unteren Grenzen darstellen, sondern der gesuchten Temperatur sehr nahe kommen.

Zu erwähnen ist noch, daß das Auffinden der Größen A_i aus den Beobachtungsergebnissen beträchtliche Schwierigkeiten bereitet. Daher besitzt eine Abart obiger Methode große praktische Bedeutung, die darauf beruht, daß die Linien N_1 und N_2 den wesentlichen Anteil an der visuellen Helligkeit des Nebels ausmachen. Diese Linien charakterisieren, wie wir sahen, in gewisser Weise die Intensität der Sternstrahlung jenseits der Grenze der LYMAN-Serie. Daher kann man aus dem Verhältnis der visuellen Nebelhelligkeit zur visuellen (oder photographischen) Helligkeit des Sterns, d.h. mit anderen Worten aus der Differenz $m_* - m_n$, die Sterntemperaturen bestimmen. Je größer die Differenz $m_* - m_n$, desto höher ist die Temperatur.

Nach dieser Methode bestimmte ZANSTRA die Zentralsterntemperaturen einer ziemlich großen Anzahl von Nebeln. Es stellte sich heraus, daß in einigen Fällen diese Temperaturen 100000° und mehr betrugen. Die hohen Temperaturen, die sich nach dieser Methode ergeben, werden im allgemeinen auch durch andere Beobachtungen bestätigt, speziell aus der Intensität der Linien des He II.

§ 24. *Der physikalische Zustand der Nebelmaterie*

1. Die notwendigen Bedingungen für das Auftreten verbotener Linien

Wir wollen nun näher auf das Auftreten sehr intensiver verbotener Linien in den Spektren der planetarischen Nebel eingehen.

Außer den Hauptnebellinien N_1 und N_2, die dem Atom O III zuzuschreiben sind, beobachtet man in den Nebelspektren auch verbotene Linien der Atome O I, O II, N II, S II, u. a. m. Eine Zusammenstellung der hellsten dieser Linien findet sich in Tabelle 17.

Tabelle 17

Wellen-länge Å	Übergang	Atom	Anregungs-potential eV
3726	$^4S^0_{3/2} - ^2D^0_{3/2}$	O II	3,31
3729	$^4S^0_{3/2} - ^2D^0_{5/2}$	O II	3,31
4363	$^1D_2 - ^1S_0$	O III	5,33
4959	$^3P_1 - ^1D_2$	O III	2,50
5007	$^3P_2 - ^1D_2$	O III	2,50
6583	$^3P_2 - ^1D_2$	N II	1,89

In Abbildung 60 ist als Beispiel das Energieniveau-Schema des O II-Atoms wiedergegeben. Neben anderen Übergängen finden sich in der Zeichnung auch die verbotenen Übergänge, denen die Linien N_1, N_2 und $\lambda = 4363$ Å entsprechen.

Das Auftreten verbotener Linien in den Nebelspektren stellt an und für sich nichts Erstaunliches dar. Die Übergangswahrscheinlichkeiten für die verbotenen Linien sind nur genähert gleich Null, tatsächlich sind sie jedoch von Null verschieden, wenn auch verhältnismäßig klein. Die EINSTEIN-Koeffizienten der Wahrscheinlichkeit spontaner Übergänge für erlaubte Linien im sichtbaren Spektralbereich sind von der Größenordnung 10^8 sec^{-1}, für die verbotenen Linien millionen- bis milliardenmal kleiner. Beispielsweise beträgt die Übergangswahrscheinlichkeit für die Linien N_1 und N_2 0,018 bzw. 0,006 sec^{-1}.

Da man nun in den gewöhnlichen Sternspektren keine verbotenen Linien beobachtet, ist zu klären, worin der Unterschied zwischen den Bedingungen in den Nebeln und denen in den Sternatmosphären besteht, der als Ursache des Auftretens verbotener Linien in den Nebelspektren anzusehen ist.

Zunächst ist zu bemerken, daß die verbotenen Linien, die von solchen höheren Niveaus ausgehen, von denen auch erlaubte Übergänge in niedrigere Zustände möglich sind, niemals eine relativ große Intensität erreichen können, da aus dem jeweiligen höheren Zustand erlaubte Übergänge millionenmal häufiger sind als verbotene. Verbotene Linien können also nur dann verhältnismäßig stark sein, wenn der höhere Zustand metastabil ist, d. h. von ihm aus keine anderen Übergänge in niedrigere Energieniveaus als eben verbotene möglich sind.

Während ein Atom in den gewöhnlichen angeregten Zuständen etwa 10^{-8} sec verweilt, kann es sich in einem metastabilen Zustand einige Sekunden oder noch länger aufhalten. So beträgt z. B. die mittlere Lebensdauer des O III-Atoms im Zustand $^1D_2$, von dem aus die Linien N_1 und N_2 emittiert

werden, 42 sec. Damit also verbotene Linien überhaupt ausgestrahlt werden können, ist es notwendig, daß das Atom lange Zeit keinen äußeren Störungen unterworfen ist. Insbesondere darf das Atom nicht mit freien Elektronen zusammenstoßen, da diese das Atom bei einem Stoß erster Art aus dem metastabilen Zustand in einen höheren oder bei Stößen zweiter Art ohne Ausstrahlung einer verbotenen Linie in einen niedrigeren Energiezustand überführen

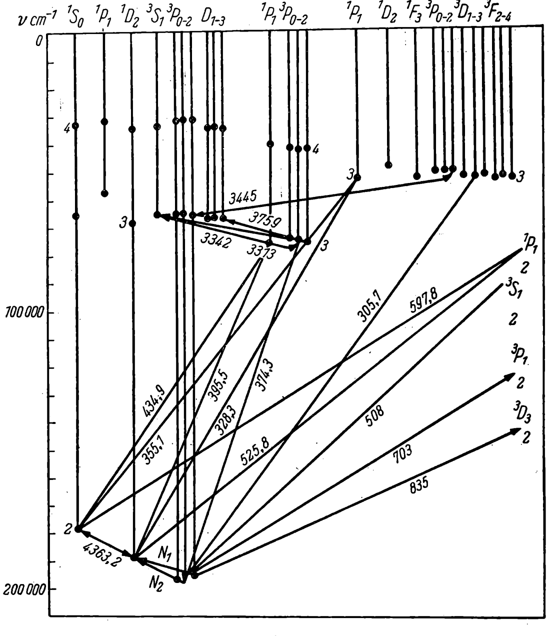


Abb. 60

würden. Ebenso darf das Atom auch nicht starker Strahlung ausgesetzt sein, denn durch Absorption eines Lichtquants kann es ebenfalls aus dem metastabilen in einen höheren Zustand übergehen. Die lange Lebensdauer eines Atoms im metastabilen Zustand bedingt also einen gewissen Grenzwert der Materie- und Strahlungsdichte, oberhalb dessen eine verbotene Linie nicht mehr auftreten kann. Mit anderen Worten kann man sagen, daß verbotene Linien im Spektrum eines beliebigen Objekts nur dann auftreten, wenn die Materie- und Strahlungsdichte hinreichend klein sind.

Fehlen verbotene Linien in Sternspektren, so kann man behaupten, daß in den Atmosphären dieser Sterne die erwähnten Bedingungen nicht erfüllt sind. Dies bedeutet, daß ein Atom, welches in einen metastabilen Zustand übergeht,

infolge der Wechselwirkung mit Lichtquanten oder freien Elektronen, die in großer Zahl in den Sternatmosphären vorkommen, so schnell wieder daraus entfernt wird, daß es keine verbotene Linie ausstrahlen kann. Im Gegensatz dazu deutet die Existenz zahlreicher und sehr intensiver verbotener Linien in den Spektren der planetarischen Nebel auf eine sehr geringe Strahlungs- und Materiedichte in diesen Objekten hin.

Im folgenden Abschnitt werden wir die Bedingungen, unter denen verbotene Linien auftreten, quantitativ behandeln.

2. Die Ansammlung von Atomen in metastabilen Zuständen

Da in den Nebeln solche Bedingungen herrschen, daß die Atome, die in metastabile Zustände übergehen, hinreichend lange Zeit darin verweilen können (bis zu einem spotanen Übergang in ein niedrigeres Niveau), muß sich eine beträchtliche Zahl von Atomen in metastabilen Zuständen ansammeln. Nur darum werden überhaupt helle verbotene Linien ausgestrahlt, denn die Intensität der Linien ist proportional der Zahl der Atome im Ausgangszustand und der Wahrscheinlichkeit des betreffenden spontanen Übergangs. Die Wahrscheinlichkeiten spontaner Übergänge aus metastabilen Zuständen sind jedoch sehr klein.

Die Frage nach der Ansammlung von Atomen in metastabilen Zuständen wurde von V. A. AMBARZUMJAN[1]) zuerst behandelt, und wir wollen gleich die von ihm erhaltenen Ergebnisse bringen.

Der Einfachheit halber wollen wir ein Atom mit drei Energieniveaus betrachten. Wir nehmen an, daß die Anregung des Atoms nur durch Strahlung erfolgt. Im stationären Zustand darf sich die Zahl der Atome in jedem Niveau nicht ändern. Wir haben also

$$\left.\begin{aligned} n_1 B_{12}\varrho_{12} + n_1 B_{13}\varrho_{13} &= n_2 A_{21} + n_3 A_{31}, \\ n_1 B_{13}\varrho_{13} + n_2 B_{23}\varrho_{23} &= n_3 A_{31} + n_3 A_{32}. \end{aligned}\right\} \tag{24.1}$$

Hierbei haben wir die erzwungenen Übergänge vernachlässigt, da wir vorausgesetzt haben, daß die Strahlung stark verdünnt ist ($W \ll 1$). Aus den Gleichungen (24.1) erhält man (ohne n_3)

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{B_{12}\varrho_{12} + (1-p)\,B_{13}\varrho_{13}}{A_{21} + p\,B_{23}\varrho_{23}}, \tag{24.2}$$

wobei $p = \dfrac{A_{31}}{A_{31} + A_{32}}$ ist. Benutzen wir die Beziehungen zwischen den EINSTEINschen Übergangswahrscheinlichkeiten und auch die Abkürzungen (23.10)

[1]) V. A. AMBARZUMJAN, Zirkular des Astr. Hauptobs. Nr. 6. 1953 (В. А. Амбарцумян, Циркуляры ГАО, No. 6, 1953).

für die Größen ϱ_{ik}, so finden wir für das Verhältnis $\frac{n_2}{n_1}$ an Stelle von (24.2)

$$\frac{n_2}{n_1} = W \frac{A_{21} \frac{g_2}{g_1} \bar{\varrho}_{12} + (1-p) A_{31} \frac{g_3}{g_1} \bar{\varrho}_{13}}{A_{21} + p A_{32} \frac{g_3}{g_2} W \bar{\varrho}_{23}}. \tag{24.3}$$

Wir wollen nun annehmen, daß der zweite Zustand metastabil ist, d.h. $A_{21} \ll A_{31}, A_{32}$. Dann kann man das erste Glied im Zähler der Formel (24.3) gegenüber dem zweiten vernachlässigen. Im Nenner jedoch kann je nach den Umständen jedes der beiden Glieder überwiegen. Wir wollen daher die beiden möglichen Fälle betrachten.

I. $W \ll \frac{A_{21}}{A_{32}}$. In diesem Fall kann im Nenner das zweite Glied entfallen, und man erhält

$$\frac{n_2}{n_1} = W(1-p) \frac{A_{31}}{A_{21}} \frac{g_3}{g_1} \bar{\varrho}_{13}. \tag{24.4}$$

II. $W \gg \frac{A_{21}}{A_{32}}$. Hier kann man im Nenner das erste Glied vernachlässigen und hat dann

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{\bar{\varrho}_{13}}{\bar{\varrho}_{23}} \approx \frac{g_2}{g_1} \bar{\varrho}_{12}. \tag{24.5}$$

Zum Vergleich wollen wir noch den Fall betrachten, wo das zweite Niveau nicht metastabil, der Übergang $2 \to 1$ also erlaubt ist. Die Übergangswahrscheinlichkeit für diesen erlaubten Übergang bezeichnen wir mit A_{21}^0. Dann können wir schreiben $A_{21}^0 \approx A_{31}, A_{32}$ und erhalten aus Formel (24.3)

$$\frac{n_2^0}{n_1} = W \frac{g_2}{g_1} \bar{\varrho}_{12} + W(1-p) \frac{A_{31}}{A_{22}^0} \frac{g_3}{g_1} \bar{\varrho}_{13}. \tag{24.6}$$

Man sieht, daß beide Glieder auf der rechten Seite dieser Formel Größen erster Ordnung darstellen.

Vergleichen wir (24.4) und (24.6), so sehen wir, daß bei metastabilen Zuständen im ersten der oben betrachteten Fälle das Verhältnis $\frac{n_2}{n_1}$ um soviel mal größer als für einen gewöhnlichen angeregten Zustand ist, als die Wahrscheinlichkeit eines erlaubten Übergangs größer als die Wahrscheinlichkeit eines verbotenen Übergangs ist $\left(\frac{n_2}{n_2^0} \approx \frac{A_{21}^0}{A_{21}}\right)$. Daher erreicht die Intensität der verbotenen Linien die gleiche Größenordnung wie die Intensität der erlaubten Linien $(n_2 A_{21} \approx n_2^0 A_{21}^0)$.

Im zweiten der betrachteten Fälle läßt sich das Verhältnis $\frac{n_2}{n_1}$ genähert aus der BOLTZMANN-Formel angeben und ist, wie der Vergleich der Formeln (24.5) und (24.6) zeigt, größenordnungsmäßig $\frac{1}{W}$ mal größer als bei einem gewöhnlichen angeregten Niveau. Auch in diesem Fall vollzieht sich also eine starke Häufung von Atomen in metastabilen Zuständen. Die Zahl der Übergänge aus dem metastabilen Zustand erreicht jedoch nicht mehr größenordnungsmäßig die Zahl der Übergänge aus einem gewöhnlichen Zustand. Wir haben

$$n_2 A_{21} \approx n_1 \frac{g_2}{g_1} \bar{\varrho}_{12} A_{21} \approx n_2^0 \frac{A_{21}}{W} \ll n_2^0 A_{21}^0 .$$

Dies bedeutet, daß im Falle II die Intensität einer verbotenen Linie klein im Vergleich zur Intensität der erlaubten ist.

Der physikalische Sinn der Fälle I und II ist folgender: Das erste Glied im Nenner der Formel (24.3) entspricht dem verbotenen Übergang $2 \to 1$, das zweite dem Übergang aus dem metastabilen Zustand in den höheren, $2 \to 3$. Im ersten Fall überwiegen die Übergänge $2 \to 1$, und die verbotene Linie ist in voller Stärke sichtbar. Im zweiten Fall überwiegen wegen der relativ großen Strahlungsdichte die Übergänge $2 \to 3$, und die verbotene Linie ist schwach.

Da in den planetarischen Nebeln W von der Größenordnung 10^{-13} ist, gehorchen fast alle metastabilen Zustände den Bedingungen des Falls I. Nur der Zustand $2\,^3S$ des Heliums ist vielleicht eine Ausnahme, denn er besitzt eine sehr lange Lebensdauer. Demgegenüber gehören fast alle metastabilen Zustände in Hüllen geringerer Ausdehnung (d. h. in den Atmosphären der WOLF-RAYET-Sterne, Be-Sterne usw.) zum Fall II.

Dies zur Anhäufung von Atomen in metastabilen Zuständen bei Anregung durch Strahlung. Wie jedoch schon angedeutet wurde, werden die hellsten der verbotenen Linien in den Nebelspektren nicht durch Strahlung, sondern durch Stöße mit freien Elektronen angeregt. Wir wollen daher noch die Frage der Besetzung metastabiler Niveaus durch Stoßanregung behandeln.

Dazu betrachten wir ein Atom mit zwei Energieniveaus. Dabei ist $n_1 b_{12}$ die Zahl der Übergänge aus dem Grundzustand in den metastabilen Zustand durch Stöße erster Art, $n_2 a_{21}$ die Anzahl der Stöße aus dem metastabilen Zustand in den Grundzustand durch Stöße zweiter Art und $n_2 A_{21}$ die Zahl der spontanen Übergänge aus dem metastabilen in den Grundzustand (in der Volumen- und Zeiteinheit). Die Stationaritätsbedingung lautet dann:

$$n_1 b_{12} = n_2 (a_{21} + A_{21}) . \tag{24.7}$$

Die Koeffizienten b_{12} und a_{21} sind der Dichte der freien Elektronen proportional und hängen von deren Geschwindigkeitsverteilung ab. Wir wollen annehmen, daß die Geschwindigkeitsverteilung der freien Elektronen dem MAXWELLschen Gesetz gehorcht.[1]) Dann besteht zwischen den Koeffizienten b_{12}

[1]) Man kann zeigen, daß in der Zeit zwischen Ionisation und Rekombination jedes Elektron eine sehr große Zahl von Zusammenstößen mit anderen Elektronen erfährt. Daher ist die angegebene Voraussetzung nicht bedenklich.

und a_{21} folgender Zusammenhang:

$$b_{12} = a_{21} \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT_e}}. \tag{24.8}$$

Darin ist T_e die Temperatur des Elektronengases.[1]) Wir erhalten damit aus der Gleichung (24.7)

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{a_{21}}{A_{21} + a_{21}} \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT_e}}. \tag{24.9}$$

Ist $a_{21} \gg A_{21}$, so geht (24.9) in die BOLTZMANN-Formel über. Die Ungleichung bedeutet ein Überwiegen der erzwungenen Übergänge über die spontanen. Daher ist im vorliegenden Falle die verbotene Linie nur schwach oder überhaupt nicht sichtbar. Gilt die Ungleichung im entgegengesetzten Sinne, so kehrt die Mehrzahl der Atome, die bei einem Stoß erster Art vom Grundzustand auf ein metastabiles Niveau gehoben wurden, spontan unter Aussendung eines Quants in der verbotenen Linie in den Grundzustand zurück. Bei einer hinreichend großen Zahl derartiger Stöße wird also die verbotene Linie sehr intensiv.

Wir werden weiter unten sehen, daß die Materiedichte in planetarischen Nebeln außerordentlich gering ist ($n_e \approx 10^4$). Für einen solchen Nebel gilt also die Ungleichung $a_{21} \ll A_{21}$, d. h., Stöße zweiter Art kommen sehr selten vor und können die verbotene Linie nicht „auslöschen". Stöße erster Art erfolgen jedoch trotzdem oft genug, um die Mehrzahl der Atome vom Grundzustand in den metastabilen Zustand zu überführen. Dieser Unterschied in der Anzahl der Stöße erster und zweiter Art ist dadurch bedingt, daß sich das Atom in einem angeregten Zustand (selbst in einem metastabilen) weit kürzere Zeit aufhält als im Grundzustand.

Aus den bisherigen Darlegungen können wir die nachstehende Folgerung ziehen. Verbotene Linien sind nur dann in ihrer Intensität den erlaubten vergleichbar, wenn

$$1.\ W \ll \frac{A_{21}}{A_{21}^0},$$

$$2.\ a_{21} \ll A_{21}$$

ist. Durch diese Bedingungen sind die oberen Grenzen der Strahlungs- und der Materiedichte festgelegt.

Es ist selbstverständlich, daß beide Bedingungen für jeden Anregungsmechanismus gelten müssen.

---

[1]) Zur Ableitung dieser Beziehung betrachtet man den Zustand des thermodynamischen Gleichgewichts. Für diesen gilt: $n_1 b_{12} = n_2 a_{21}$ und $\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}}$. Aus der zweiten Beziehung folgt auch die Formel (24.8), die sicher für alle Fälle gilt, in denen die Elektronen eine MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung besitzen, also nicht nur bei thermodynamischem Gleichgewicht.

3. Die Bestimmung der Nebeltemperatur

Die Tatsache, daß die metastabilen Zustände des O III-Ions durch Elektronenstoß angeregt werden, benutzte V. A. AMBARZUMJAN zu einer einfachen Bestimmung der Elektronentemperatur der Nebel [10, S. 165]. Er ging davon aus, daß das O III-Ion nicht nur das metastabile Niveau $^1D_2$ besitzt, welches das Ausgangsniveau für die Linien N_1 und N_2 darstellt, sondern auch das darüberliegende metastabile Niveau $^1S_0$, von dem aus beim Übergang nach $^1D_2$ die Linie 4363 Å ausgestrahlt wird (siehe Abb. 60). Die Anregungspotentiale dieser Niveaus sind 2,5 bzw. 5,3 eV. Es ist ohne weiteres einzusehen, daß das Verhältnis der Zahl der Atome im Zustand $^1S_0$ zur Zahl der Atome im Zustand $^1D_2$ um so größer, die Linie 4363 Å also um so intensiver gegenüber den Linien N_1 und N_2 sein muß, je höher die Elektronentemperatur des Nebels ist. Es läßt sich also aus dem beobachteten Intensitätsverhältnis der Linien 4363 Å und $N_1 + N_2$ auf die Elektronentemperatur des Nebels schließen.

Zur Herleitung der hierzu erforderlichen Formel bezeichnen wir die Zahl der O III-Ionen im Grundzustand und den beiden metastabilen Zuständen mit n_1, n_2 und n_3. Da man die in Nebeln durch Stoß hervorgerufenen Übergänge aus angeregten Zuständen gegenüber den spontanen Übergängen vernachlässigen kann, haben wir als Stationaritätsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} n_1 b_{12} + n_3 A_{32} &= n_2 A_{21}, \\ n_1 b_{13} &= n_3 (A_{31} + A_{32}). \end{aligned}\right\} \tag{24.10}$$

Der Übergang $3 \to 1$ ist nun beim O III-Ion weit stärker „verboten“ als der Übergang $3 \to 2$; es ist also $A_{21} \ll A_{32}$. Wir erhalten daher aus Gleichung (24.10)

$$\frac{n_2 A_{21}}{n_3 A_{32}} = 1 + \frac{b_{12}}{b_{13}}.$$

Für das gesuchte Intensitätsverhältnis der Linien $N_1 + N_2$ und 4363 Å erhalten wir damit

$$\frac{E_{21}}{E_{32}} = \frac{\nu_{12}}{\nu_{23}}\left(1 + \frac{b_{12}}{b_{13}}\right). \tag{24.11}$$

Wir benutzen jetzt die Beziehung (24.8), die den Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeiten der Stöße erster und zweiter Art darstellt. Damit erhalten wir an Stelle von (24.11)

$$\frac{E_{21}}{E_{32}} = \frac{\nu_{12}}{\nu_{23}}\left(1 + \frac{g_2}{g_3}\frac{a_{21}}{a_{31}}\, e^{\frac{h\nu_{23}}{kT_e}}\right). \tag{24.12}$$

In (24.12) haben wir die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{E_{21}}{E_{32}}$ von der Elektronentemperatur explizit gegeben, denn die Koeffizienten a_{21} und a_{31} sind von T_e fast unabhängig (die Stöße zweiter Art können im Unterschied zu den Stößen

erster Art mit Elektronen beliebiger Geschwindigkeit stattfinden). Wir können nun aber annehmen, daß $\frac{a_{21}}{a_{31}} \approx 1$ ist, und haben außerdem $\frac{g_2}{g_3} = 5$. Damit erhalten wir an Stelle von (24.12) genähert den einfacheren Ausdruck

$$\frac{E_{N_1+N_2}}{E_{4363}} = 4{,}5\, e^{\frac{33000}{T_e}}. \tag{24.13}$$

Diese Formel dient auch zur Bestimmung von T_e aus dem beobachteten Intensitätsverhältnis $\frac{E_{N_1+N_2}}{E_{4363}}$.

In den Spektren der planetarischen Nebel ändert sich das Intensitätsverhältnis der Linien $N_1 + N_2$ und 4363 Å in ziemlich weiten Grenzen. Da jedoch T_e in Gleichung (24.13) im Exponenten steht, unterscheiden sich die danach erhaltenen T_e-Werte für die verschiedenen Nebel nur wenig voneinander. Die von Menzel und Mitarbeitern [40, S. 121] für die große Mehrzahl von planetarischen Nebeln bestimmten Elektronentemperaturen liegen zwischen 6000° und 10000°.

Eine andere Methode zur Bestimmung der Elektronentemperatur der Nebel beruht auf der Energiebilanz der freien Elektronen [45], [57, S. 659]. Bei der Photoionisation erwerben die Elektronen eine gewisse kinetische Energie. Wir wissen, daß sie einen beträchtlichen Teil dieser Energie bei der Stoßanregung der Atome abgeben. Ein anderer Teil verwandelt sich in Strahlung des kontinuierlichen Spektrums bei Rekombinationen und hyperbolischen Übergängen. Da sich die Nebel in einem stationären Zustand befinden, muß die kinetische Energie des Elektronengases unveränderlich bleiben, d. h. die Energie, die die Elektronen gewinnen, muß gleich derjenigen sein, die sie verlieren. Diese Bedingung bestimmt auch die Temperatur des Elektronengases. Als obere Grenze (bei Berücksichtigung der Stöße zwischen Elektronen und O III-Ionen sowie Wasserstoffatomen) erhält man für eine Reihe von Nebeln Temperaturen zwischen 9000° und 14000°.

Die Elektronentemperaturen der Nebel sind also bedeutend niedriger als die Temperatur ihrer Zentralsterne. Die Hauptrolle bei der Abkühlung des Elektronengases spielen die Stöße mit Atomen, die Energieniveaus mit niedrigen Anregungspotentialen besitzen (speziell mit O III-Ionen). Diese Atome regulieren die Elektronentemperatur der Nebel, sie wirken gewissermaßen als „Thermostat".

4. Die Intensitäten der Balmer-Linien

Gleichung (24.6), die die Zahl der Atome in angeregten (nicht metastabilen) Zuständen in den Nebeln charakterisiert, ist eine Näherung, da wir zu ihrer Herleitung angenommen haben, daß das Atom nur drei Energieniveaus besitzt. Die in den Nebeln herrschenden Bedingungen sind jedoch so einfach, daß es keine Schwierigkeiten bereitet, die Besetzung der angeregten Niveaus realer Atome zu berechnen. Der Hauptgrund für diese Vereinfachung in der Rech-

nung ist die vollständige Durchsichtigkeit des Nebels für Strahlung in den Linien höherer Serien. Infolgedessen ist die Besetzung der angeregten Niveaus ausschließlich durch die Rekombinationen (oder Stöße im Falle niedriger Energieniveaus) und nachfolgenden Kaskadenübergänge der Elektronen von Niveau zu Niveau bestimmt.

Die Durchsichtigkeit des Nebels in den Linien höherer Serien ermöglicht auch leicht die Bestimmung der vom Nebel in diesen Linien ausgestrahlten Energie. Ein Vergleich der errechneten Linienintensitäten mit den beobachteten stellt ein gutes Kriterium für die Richtigkeit der Theorie dar.

Wir wollen nun die Besetzung der angeregten Niveaus des Wasserstoffatoms berechnen. Dies ermöglicht uns im besonderen eine Bestimmung der relativen Intensitäten in den Balmer-Linien (des sogenannten Balmer-Dekrements).

Da das Wasserstoffspektrum, wie wir wissen, durch Rekombinationen zustande kommt, müssen wir zunächst einen Ausdruck für die Zahl dieser Rekombinationen suchen. Es ist selbstverständlich, daß diese Zahl proportional der Konzentration der Ionen und freien Elektronen, n^+ und n_e, ist und von der Temperatur der freien Elektronen T_e abhängt. Die Zahl der Einfänge auf das i-te Niveau wird also gleich $n_e n^+ C_{if}(T_e)$ sein. Für das Wasserstoffatom ist der Koeffizient $C_{if}(T_e)$ durch (20.10) gegeben. Wir vernachlässigen dabei das Glied $\dfrac{c^3}{8\pi h \nu^3 \varrho_\nu}$ (d.h. die erzwungenen Emissionen). Den Wert $(\beta_\nu)_k$ nehmen wir aus (5.55) und k'_ν aus (5.24). Für Wasserstoff ist $Z = 1$; der Faktor g' kann auch gleich 1 gesetzt werden. Wir erhalten somit

$$C_{if}(T_e) = \frac{2^9 \pi^5}{(6\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{10}}{m^2 c^3 h^3} \left(\frac{m}{k T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{i^3} e^{\frac{\chi_i}{k T_e}} Ei\left(\frac{\chi_i}{k T_e}\right). \tag{24.14}$$

Hierin ist χ_i das Ionisationspotential vom i-ten Niveau. Die sonstigen Symbole haben die übliche Bedeutung.

Die Berechnung der Besetzung der angeregten Niveaus beruht auf der Stationaritätsbedingung, die aussagt, daß die Zahl der in einen bestimmten Zustand übergehenden Atome genau gleich der Zahl der aus diesem Zustand weggehenden Atome sein muß.

Wir wollen jetzt die Stationaritätsbedingung für das i-te Energieniveau des Wasserstoffs aufstellen. Die Zahl der Atome, die in den i-ten Zustand übergehen, setzt sich aus drei Summanden zusammen:

1. aus der Zahl der unmittelbaren Einfänge auf das i-te Niveau $n_e n^+ C_{if}(T_e)$,

2. aus der Zahl der spontanen Übergänge aus höherliegenden diskreten Niveaus $\sum_{k=i+1}^{\infty} n_k A_{ki}$ und

3. aus der Zahl der Übergänge aus dem Grundzustand in den i-ten durch Absorption von Lyman-Quanten, $n_1 B_{1i} \varrho_{1i}$ (wir erinnern uns daran, daß die Nebel für Strahlung in den Linien der Hauptserien undurchsichtig sind). Damit ist die

Gesamtzahl der Übergänge in den i-ten Zustand in der Zeit- und Volumeneinheit

$$n_e n^+ C_{if}(T_e) + \sum_{k=i+1}^{\infty} n_k A_{ki} + n_1 B_{1i} \varrho_{1i}.$$

Andererseits ist die Zahl der Atome, die den i-ten Anregungszustand verlassen, gleich

$$n_i \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik},$$

denn aus dem i-ten Zustand sind nur spontane Übergänge möglich. Ein Vergleich dieser beiden Ausdrücke ergibt

$$n_i \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik} = n_e n^+ C_{if}(T_e) + \sum_{k=i+1}^{\infty} n_k A_{ki} + n_1 B_{1i} \varrho_{1i} \qquad (24.15)$$

$$(i = 2, 3, 4, \ldots).$$

Wir haben aber schon gesehen, daß alle Quanten, die von dem Nebel in den Linien der LYMAN-Serie ausgestrahlt wurden, sofort wieder in ihm absorbiert werden. Daher ist die Zahl der Übergänge $i \to 1$ fast genau gleich der Zahl der Übergänge $1 \to i$, d.h.

$$n_i A_{i1} = n_1 B_{1i} \varrho_{1i}. \qquad (24.16)$$

Wir finden damit an Stelle von (24.15)

$$n_i \sum_{k=2}^{i-1} A_{ik} = n_e n^+ C_{if}(T_e) + \sum_{k=i+1}^{\infty} n_k A_{ki} \qquad (24.17)$$

$$(i = 3, 4, \ldots).$$

Wir haben so ein System linearer algebraischer Gleichungen in $z_k = \frac{n_k}{n_e n^+}$ erhalten. Die Lösung dieses Gleichungssystems gibt uns die Besetzung der Energieniveaus des Wasserstoffs (vom dritten angefangen).

Sind die z_k bekannt, so lassen sich die relativen Intensitäten der Emissionslinien leicht bestimmen. Die Energie, die von dem Nebel in einer Linie ausgestrahlt wird, die dem Übergang $k \to i$ entspricht, ist gleich

$$E_{ki} = A_{ki} h \nu_{ik} \int n_k \, dV. \qquad (24.18)$$

Hierin erstreckt sich die Integration über das ganze Nebelvolumen. Da aber $n_k = z_k n_e n^+$ ist und wenn man annimmt, daß sich die Elektronentemperatur im Nebel nicht ändert, so kann man die z_k vor das Integral setzen. Wir erhalten so

$$E_{ki} = z_k A_{ki} h \nu_{ik} \int n_e n^+ \, dV. \qquad (24.19)$$

Diese Formel gibt uns für ein gegebenes T_e die Linienintensitäten bis auf einen konstanten Faktor. Speziell für $i = 2$ liefert sie das BALMER-Dekrement.

Das Gleichungssystem (24.17) wurde näherungsweise von CILLIÉ gelöst, der die ersten zwölf Gleichungen ($i = 3, 4, \ldots, 14$) verwendete und die übrigen

vernachlässigte. Die von ihm erhaltenen Werte $z_k \cdot 10^{20}$ sind für verschiedene T_e-Werte in Tabelle 18 aufgeführt.

Exaktere Lösungen des Systems (24.17) erhielten MENZEL und BAKER [40, Kap. II, III]. In ihren Tabellen sind die Werte der Größe b_i angegeben, die sich aus einer zu (20.14) analogen Beziehung

$$n_i = b_i n_e n^+ \frac{h^3 i^2}{(2\pi m k T_e)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\chi_i}{k T_e}}$$

ergibt. Sie gibt an, um wievielmal sich der Wert $\frac{n_i}{n_e n^+}$ in den Nebeln von demselben Wert im thermodynamischen Gleichgewicht mit der Temperatur T_e unterscheidet. Es stellte sich heraus, daß die b_i-Werte ziemlich nahe bei 1 liegen und für $i \to \infty$ gegen 1 gehen. Für niedrige Niveaus stimmen die von MENZEL und BAKER erhaltenen Resultate nahezu mit denen von CILLIÉ überein.

Die Werte des BALMER-Dekrements, die mit den z_k-Werten der Tabelle 18 berechnet wurden, sind in Tabelle 19 aufgeführt. Es zeigt sich, daß das BALMER-Dekrement nur wenig von der Elektronentemperatur abhängt und praktisch als konstant angesehen werden kann.

Tabelle 18

k	T_e		
	5000°	10000°	20000°
3	0,41	0,23	0,13
4	0,59	0,23	0,17
5	0,89	0,48	0,24
6	1,29	0,68	0,34
7	1,78	0,92	0,45

Tabelle 19

	T_e			
	5000°	10000°	20000°	Beobacht.
H α	2,70	2,78	2,88	2,77
H β	1,00	1,00	1,00	1,00
H γ	0,51	0,50	0,48	0,50
H δ	0,30	0,29	0,27	0,26
H ε	0,19	0,18	0,17	0,18

Der Vergleich der Theorie mit der Beobachtung zeigte zunächst gewisse Abweichungen. Das beobachtete BALMER-Dekrement war steiler als das errechnete, wobei es sich auch von Nebel zu Nebel merklich änderte. Diese Abweichungen wurden jedoch bald durch die selektive Absorption des Lichts in der Galaxis, die für ferne Objekte zu einer Rötung führt, erklärt. Dadurch wird das beobachtete Intensitätsverhältnis der Linien $\frac{\mathrm{H}\alpha}{\mathrm{H}\beta}$ größer, als es in Wirklichkeit ist. Der erste, der auf eine derartige Deutung hinwies, war G. A. SCHAIN [46], der eine Korrelation zwischen dem BALMER-Dekrement und der galaktischen Breite fand. Danach wurde auch eine Korrelation zwischen BALMER-Dekrement und Entfernung festgestellt.

Unter Berücksichtigung der Absorption des Lichts in der Galaxis ergab sich eine gute Übereinstimmung zwischen dem beobachteten BALMER-Dekrement und dem berechneten. In der letzten Spalte der Tabelle 19 ist das beobachtete BALMER-Dekrement um den Betrag der Absorption korrigiert (Mittel aus 17 Nebeln) aufgeführt. Zu erwähnen ist noch, daß das aus der Beobachtung erhaltene Verhältnis der Zahl der Quanten im BALMER-Kontinuum zur Zahl der Quanten in der Linie Hβ von dem theoretischen Wert

$$\frac{n_e n^+ C_{2f}(T_e)}{n_4 A_{42}}$$

nach der Seite hin abweicht wie auch das Verhältnis der Linienintensitäten d.h., daß auch hier der Beobachtungswert größer als der theoretische ist. Es spielt natürlich ebenfalls die selektive Absorption des Lichts im Raum eine gewisse Rolle. Die Beobachtungsdaten sind jedoch bisher noch sehr unsicher. Besonders kompliziert wird die Sachlage noch durch die Existenz eines kontinuierlichen Spektrums unbekannter Herkunft im ganzen sichtbaren Spektralbereich, das mindestens bei einigen planetarischen Nebeln beobachtet wird.[1])

Abschließend ist zu sagen, daß die Berechnung der Linienintensitäten nicht nur für Wasserstoff möglich ist, sondern auch für andere Atome. Die Ergebnisse derartiger Berechnungen werden wir später betrachten.

5. Die Ionisation in den Nebeln

Nachdem wir uns mit dem Anregungsgrad in den Nebeln beschäftigt haben, wollen wir nun zum Ionisationsgrad übergehen. Zur Ermittlung des Ionisationsgrades in den Nebeln setzen wir Gleichgewicht zwischen Ionisationen und Rekombinationen voraus. In diesem Abschnitt behandeln wir nur die Ionisationen, die von der Strahlung des Zentralsterns verursacht werden. Danach werden wir auch die diffuse Strahlung des Nebels selbst berücksichtigen.

Wir suchen die Zahl der Ionisationen in der Volumen- und Zeiteinheit. Zunächst können wir voraussetzen, daß die Ionisation in den Nebeln nur vom Grundzustand aus erfolgt. Wir bezeichnen daher die Zahl der Atome im Grundzustand pro Volumeneinheit mit n_1 und den Absorptionskoeffizienten pro Atom mit $k_{1\nu}$. Damit ist die gesuchte Zahl der Ionisationen

$$n_1 \int_{\nu_0}^{\infty} k_{1\nu} \frac{c \varrho_\nu}{h\nu} d\nu ,$$

wo ν_0 die Ionisationsfrequenz und ϱ_ν die Strahlungsdichte im Nebel $\varrho_\nu = W \varrho_\nu^*$ ist.

---

[1]) Wie KIPPER und später SPITZER und GREENSTEIN zeigten, wird das kontinuierliche Spektrum der planetarischen Nebel im wesentlichen durch Zweiquantenübergänge aus dem Zustand $2\,S$ in den Zustand $1\,S$ des Wasserstoffs hervorgerufen.

Die Rekombinationen erfolgen auf alle Niveaus. Ihre Anzahl ist daher gleich

$$n_e n^+ \sum_1^\infty C_{if}(T_e).$$

Da die Zahl der Ionisationen gleich der Zahl der Rekombinationen sein soll, haben wir also

$$n_1 W \int_{\nu_0}^\infty k_{1\nu} \frac{c\varrho_\nu^*}{h\nu} d\nu = n_e n^+ \sum_1^\infty C_{if}(T_e). \tag{24.20}$$

Genaugenommen ist dies die Ionisationsformel für Nebel. Man kann sie jedoch noch wesentlich vereinfachen, wenn man den Zusammenhang ausnutzt, der zwischen den Koeffizienten $k_{i\nu}$ und $C_{if}(T_e)$ besteht.

Eine ausführliche Ableitung dieser Formel wurde in § 5 gebracht; wir wollen noch einmal an das Wesentliche erinnern.

Zur Ableitung des erwähnten Zusammenhangs betrachten wir den Zustand des thermodynamischen Gleichgewichts. In diesem Fall besteht, wie bekannt, detailliertes Gleichgewicht. Dann ist die Zahl der Ionisationen, die vom i-ten Niveau aus durch Absorption von Quanten mit Frequenzen von ν bis $\nu + d\nu$ erfolgen, gleich der Zahl der Einfangprozesse von Elektronen auf dasselbe Niveau mit Geschwindigkeiten von v bis $v + dv$, wobei

$$h\nu = \frac{1}{2} m v^2 + \chi_i$$

ist. Wir bezeichnen die Zahl der freien Elektronen mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ im cm³ durch $n_e f(v) dv$ und die Zahl der Einfangprozesse solcher Elektronen durch Ionen auf das i-te Niveau pro cm³ in der Sekunde mit $n_e n^+ \beta_i(v) v f(v) dv$. Damit haben wir

$$n_e n^+ \beta_i(v) v f(v) dv = 4\pi n_i k_{i\nu} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \frac{I_\nu d\nu}{h\nu}, \tag{24.21}$$

wobei der Faktor $\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$ der sogenannten „negativen Absorption“ Rechnung trägt.

Bei thermodynamischem Gleichgewicht ist die Funktion $f(v)$ durch die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung, die Intensität der Strahlung I_ν durch das Plancksche Gesetz und die Verteilung der Atome auf die verschiedenen Zustände durch die Boltzmann- und die Saha-Gleichung gegeben. Wir erhalten mit den aufgezählten Formeln aus (24.21)

$$\beta_i(v) = \frac{h^2 \nu^2}{c^2 m^2 v^2} \frac{g_i}{g^+} k_{i\nu}, \tag{24.22}$$

wobei g_i das statistische Gewicht des i-ten Zustandes eines gegebenen Atoms

und g^+ das statistische Gewicht des Grundzustands des ionisierten Atoms bedeuten.

Die Formel (24.22) gibt den gesuchten Zusammenhang zwischen den Koeffizienten $\beta_i(v)$ und $k_{i\nu}$ wieder. Obwohl wir bei ihrer Herleitung thermodynamisches Gleichgewicht voraussetzten, gilt sie immer. Der Koeffizient $C_i(T_e)$ ist [siehe (20.10)]

$$C_i(T_e) = \int_0^\infty \beta_i(v)\, v f(v)\, dv \,. \tag{24.23}$$

Hierin ist $f(v)$ die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung der freien Elektronen:

$$f(v) = \frac{4\pi m^3}{(2\pi m k T_e)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{m v^2}{2 k T_e}} v^2 \,. \tag{24.24}$$

Wir müssen jetzt den für $C_i(T_e)$ gefundenen Ausdruck in (24.20) einsetzen. Bevor wir dies tun, schreiben wir diese Gleichung jedoch wie folgt um:

$$x\, n_1 W \int_{\nu_0}^\infty k_{1\nu} \frac{c\varrho_\nu^*}{h\nu} d\nu = n_e n^+ C_1(T_e) \,. \tag{24.25}$$

Hierin ist x der Bruchteil der Einfangprozesse auf das erste Niveau. Setzt man nun (24.23) in (24.25) ein, so ergibt sich

$$x\, n_1 W \int_{\nu_0}^\infty k_{1\nu} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k T_*}} - 1} = \frac{g_1}{g^+} n_e n^+ \frac{m h^3}{2\,(2\pi m k T_e)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty k_{1\nu} \nu^2 e^{-\frac{m v^2}{2 k T_e}} v\, dv \,. \tag{24.26}$$

Beide Integrale, die in diesem Ausdruck auftreten, sind leicht auszurechnen, wenn $k_{1\nu} \sim \frac{1}{\nu^2}$ ist. Für wasserstoffähnliche Atome ist $k_{1\nu} \sim \frac{1}{\nu^3}$ (für andere Atome ist $k_{1\nu}$ als Funktion von ν weniger gut bekannt). Wir können jedoch trotzdem annehmen, daß der Absorptionskoeffizient dem Quadrat der Frequenz umgekehrt proportional ist, denn der dadurch gemachte Fehler ist nur sehr klein. Als Endergebnis erhalten wir

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = \frac{g^+}{g_1} x W \sqrt{\frac{T_e}{T_*}} \frac{2\,(2\pi m k T_*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \ln\left(1 - e^{-\frac{h\nu_0}{k T_*}}\right)^{-1} . \tag{24.27}$$

(24.27) kann man noch etwas vereinfachen, wenn man beachtet, daß die Faktoren $\frac{g^+}{g_1}$, $2\,x$ und $\sqrt{\frac{T_e}{T_*}}$ sich nicht viel von 1 unterscheiden und außerdem

im allgemeinen $h\nu_0 \gg kT_*$ ist. Die Ionisationsformel für Nebel wird also genähert

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = W \frac{(2\pi m k T_*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\frac{h\nu_0}{kT_*}}. \qquad (24.28)$$

Wir sehen, daß sich (24.28) von der gewöhnlichen Ionisationsformel durch das Auftreten des Verdünnungsfaktors W auf der rechten Seite der Gleichung unterscheidet. Dieser Faktor ist für Nebel sehr klein ($W \approx 10^{-13}$). Das bedeutet natürlich nicht, daß der Ionisationsgrad, d.h. die Größe $\frac{n^+}{n_1}$, auch klein ist. Der Ionisationsgrad kann tatsächlich in Nebeln außerordentlich groß sein, denn die Kleinheit des Verdünnungsfaktors W wird durch die geringe Konzentration n_e der freien Elektronen kompensiert.

Strenggenommen ist die Näherungsformel (24.28) nur dann gültig, wenn die optische Dicke des Nebels jenseits der Grenze der Hauptserie des jeweiligen Atoms kleiner als 1 ist. Ist dies nicht der Fall, muß man die Absorption der Sternstrahlung und ebenso die Existenz der diffusen Nebelstrahlung, die von Rekombinationen auf das erste Niveau herrührt, berücksichtigen. Es wird jedoch gezeigt werden, daß die diffuse Nebelstrahlung keine große Rolle spielt. Es genügt daher, nur der Schwächung der direkten Sternstrahlung Rechnung zu tragen. Dies kann durch Einführung eines Faktors $e^{-\tau}$ auf der rechten Seite der Gleichung (24.28) geschehen. Dabei ist τ die optische Tiefe vom Zentralstern aus jenseits der Grenze der Hauptserie, die einem gewissen mittleren Absorptionskoeffizienten entspricht. Wir erhalten somit also an Stelle von (24.28) den Ausdruck

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = W \frac{(2\pi m k T_*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\frac{h\nu_0}{kT_*}} e^{-\tau}. \qquad (24.29)$$

Für $\tau < 1$ ist der Ionisationsgrad sehr groß, d.h. $\frac{n^+}{n_1} \gg 1$. Wird $\tau \approx 1$, so nimmt der Ionisationsgrad schnell ab. Dies führt wiederum wegen der Zunahme der Zahl der neutralen Atome zu einem schnellen Anwachsen von τ. Demzufolge vollzieht sich der Übergang von optischen Tiefen $\tau < 1$ zu Werten $\tau \gg 1$, und gleichzeitig damit der Übergang von $\frac{n^+}{n_1} \gg 1$ zu $\frac{n^+}{n_1} \ll 1$, in einer Zone von relativ geringer linearer Ausdehnung. Danach kann man also einen Nebel in bezug auf die Atome oder Ionen der betrachteten Art näherungsweise in zwei Bereiche einteilen: einen inneren, in dem der Ionisationsgrad durch Formel (24.28) bestimmt ist, und einen äußeren, in dem der Ionisationsgrad gleich Null ist. Der erste Bereich leuchtet in den Linien des betrachteten Atoms, der zweite leuchtet nicht. Die Grenze zwischen diesen beiden Gebieten befindet sich dort, wo die optische Tiefe, vom Kern aus gerechnet, jenseits der Grenze der Hauptserie etwa 1 ist.

Es ist klar, daß in dem betrachteten Fall die verschiedenen Atome in verschiedenen Raumbereichen strahlen werden, d.h., daß eine „Schichtung“ der Strahlung im Nebel vorhanden sein muß. Dies wird auch tatsächlich beobachtet. Die Nebelbilder, die mit spaltlosen Spektrographen erhalten wurden, haben in den verschiedenen Linien ganz verschiedene Durchmesser. Dies deutet darauf hin, daß wenigstens für einige Atome die optische Dicke des Nebels jenseits der Grenze der Hauptserie den Wert 1 übersteigt. Eine Ausnahme hiervon macht vielleicht der Wasserstoff, da die Durchmesser der Nebelbilder im Lichte der BALMER-Linien gewöhnlich am größten sind. Es gibt also für uns keinen Beweis dafür, daß sich über diese Nebelgebiete hinaus, die in diesen Linien strahlen, noch Bereiche erstrecken, die nicht darin leuchten.

Die Beobachtungen deuten auch auf folgende interessante Tatsache hin: je höher das Ionisationspotential eines Atoms ist, desto kleiner sind die Durchmesser des Nebelbildes in seinen Linien. So ist z.B. der Durchmesser im Lichte der Linien des ionisierten Heliums wesentlich kleiner als in den Linien des neutralen Heliums. Dies ist einfach zu erklären. Wir betrachten als Beispiel einen Heliumnebel. Ist die Temperatur des Zentralsterns hinreichend hoch, so müssen in dem Bereich des Nebels, der dem Stern am nächsten liegt, hauptsächlich ein- und zweifach ionisierte Heliumatome auftreten. Der Nebel wird in den Linien des He II strahlen. Dieser Bereich endet dort, wo die optische Tiefe jenseits der Grenze der Hauptserie des ionisierten Heliums etwa 1 wird. Über diesen Bereich hinaus kann die Sternstrahlung, die fähig ist, das Helium zweifach zu ionisieren, nicht vordringen. Dort werden also nur einfach ionisierte und neutrale Heliumatome anzutreffen sein. Dieser zweite Bereich leuchtet dann nur im Lichte der Linien des He I. Er endet seinerseits dort, wo die optische Tiefe jenseits der Grundserie des neutralen Heliums von der Größenordnung 1 wird. Weiter dringt die Sternstrahlung, die neutrale Heliumatome ionisieren kann, nicht vor. Dieser äußere Bereich des Nebels leuchtet überhaupt nicht.

Diese Überlegung ist nicht nur auf Helium anwendbar, sondern auch auf andere Elemente. Jedoch wird das Bild in realen Nebeln, die aus vielen Elementen bestehen, etwas komplizierter sein, da sich die Bereiche des Sternspektrums, die von verschiedenen Atomen und Ionen absorbiert werden, überdecken können.

6. Die Massen der Nebel

Die bisherigen Ergebnisse unserer Betrachtungen ermöglichen es, einfache Methoden zur Abschätzung der Massen und Dichten von Gasnebeln zu entwickeln. Wir nehmen an, daß das häufigste Element in den Nebeln, ebenso wie in den Sternatmosphären, der Wasserstoff ist, d.h., wir suchen zunächst die Masse und Konzentration des Wasserstoffs in den Nebeln.

Die einfachste, wenn auch ziemlich grobe Methode zur Abschätzung der Masse eines planetarischen Nebels beruht auf der Annahme, daß seine optische Dicke jenseits der Grenze der LYMAN-Serie der Größenordnung nach 1 ist. Daß die genannte optische Dicke nicht sehr viel kleiner als 1 sein kann, folgt daraus,

daß andernfalls die nach ZANSTRA bestimmten Temperaturen der Zentralsterne wesentlich größer angesetzt werden müßten. Andererseits wissen wir aus dem vorangegangenen Abschnitt, daß die betrachtete optische Dicke auch nicht viel größer als 1 sein kann. So können wir also schreiben:

$$\tau_0 = n_1 k r = 1. \tag{24.30}$$

Es ist übrigens durchaus möglich, daß diese Annahme nicht zu Recht besteht. Ist dies der Fall, so bezieht sich die Gleichung (24.30) nur auf den leuchtenden Teil des Nebels. Wenden wir sie also an, so erhalten wir nur eine gewisse untere Grenze der gesuchten Masse.

In (24.30) ist k der Absorptionskoeffizient pro Atom jenseits der Grenze der LYMAN-Serie. Er ist gleich $k = 0{,}5 \cdot 10^{-17}$. Nimmt man für den Radius des Nebels den Wert $r = 13000\,\text{AE} = 2 \cdot 10^{17}$ cm an, so erhält man für die Zahl der neutralen Wasserstoffatome pro cm³: $n_1 = 1$.

Um die Zahl der ionisierten Wasserstoffatome zu erhalten, benutzen wir die Gleichung (24.28). Man kann sie für Wasserstoff in der Form

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = 2{,}44 \cdot 10^{15} W T_*^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{157\,200}{T_*}} \tag{24.31}$$

schreiben. Für einen mittleren Nebel setzen wir $W = 10^{-14}$ und $T_* = 40000°$. Außerdem kann man $n_e = n^+$ annehmen. Mit dem Wert $n_1 = 1$ liefert die Formel (24.31) für die Zahl der Wasserstoffionen pro cm³: $n^+ = 2000$.

Wir sehen also, daß Wasserstoff in den planetarischen Nebeln vorwiegend ionisiert auftritt. Daher können wir die Masse des Nebels nach folgender Formel ausrechnen:

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 n^+ m_{\mathrm{H}}. \tag{24.32}$$

Hierin ist m_{H} die Masse des Wasserstoffatoms. Wir erhalten danach

$$M = 10^{32}\,\mathrm{g} = 0{,}05\, M_\odot.$$

Eine andere, genauere Methode zur Bestimmung der Nebelmassen beruht auf der Anwendung der Formel (24.19), welche die in den Wasserstofflinien vom Nebel ausgestrahlte Energie anzugeben gestattet. Genähert kann diese Formel wie folgt geschrieben werden:

$$E_{ki} = z_k A_{ki} h \nu_{ik} n^{+2} V. \tag{24.33}$$

Daraus findet man die Konzentration der Wasserstoffionen zu

$$n^+ = \sqrt{\frac{E_{ki}}{z_k A_{ki} h \nu_{ik} V}} \tag{24.34}$$

und demzufolge die Nebelmasse zu

$$M = m_{\mathrm{H}} \sqrt{\frac{E_{ki} V}{z_k A_{ki} h \nu_{ik}}}. \tag{24.35}$$

Wie vordem erhält man bei großer optischer Dicke des Nebels jenseits der Grenze der LYMAN-Serie nach (24.35) auch nicht die Masse des ganzen Nebels, sondern nur die seiner leuchtenden Teile.

Wir wollen nun in den Formeln (24.34) und (24.35) von der Energie E_{ki} zur visuellen Gesamtleuchtkraft L übergehen. Wir setzen

$$E_{ki} = \lambda_{ik} L .$$

Dann erhalten wir an Stelle von (24.34) und (24.35)

$$\varrho = m_{\mathrm{H}} n^{+} = C \sqrt{\frac{L}{V}}, \qquad (24.36)$$

$$M = C \sqrt{LV}, \qquad (24.37)$$

mit

$$C = m_{\mathrm{H}} \sqrt{\frac{\lambda_{ik}}{z_k A_{ki} h \nu_{ik}}} . \qquad (24.38)$$

Da die Leuchtkraft des Nebels im Sichtbaren im wesentlichen durch die Linien N_1 und N_2 bestimmt wird, so stellt die Größe λ_{ik} genähert das Verhältnis der Intensität der gegebenen Linie zur Intensität der Linien $N_1 + N_2$ dar. Wenn z.B. das Verhältnis der Intensitäten der Linien $\frac{N_2}{H\beta}$ gleich 3 ist, so ist die Größe λ_{24} gleich $\frac{1}{12}$. Dann ist $C = 1{,}5 \cdot 10^{-12}$. Natürlich ändert sich λ_{24} etwas von Nebel zu Nebel. Das wirkt sich jedoch kaum auf den Wert von C aus, da in (24.38) λ_{ik} in die Wurzel eingeht. Man kann daher in erster Näherung den Faktor C für alle Nebel als konstant ansehen.

Die Berechnung der Masse der planetarischen Nebel nach (24.37) führt zu Werten von der Größenordnung einiger Hundertstel Sonnenmassen, und die Berechnung der Konzentrationen nach (24.36) zu Werten von einigen tausend Atomen pro cm³. Diese Werte unterscheiden sich im Mittel nicht von den oben erhaltenen: $M = 0{,}05\, M_{\odot}$, $n^{+} = 2000$. Massen und Dichten der verschiedenen Nebel können etwas von den erwähnten Mittelwerten abweichen, anscheinend bis zu einigen zehnmal. Dies wird hauptsächlich durch die Streuung in den Nebelvolumen hervorgerufen, denn die Streuung der Nebelleuchtkräfte ist nicht sehr groß.

Der Umstand, daß die Massen der planetarischen Nebel nur einen Bruchteil der Sonnenmasse ausmachen, unterstreicht aufs neue ihre untergeordnete Stellung den Zentralsternen gegenüber. Dieser Hinweis sei darum noch einmal hervorgehoben, weil er die heutigen Anschauungen unterstützt, nach denen die planetarischen Nebel durch Ausschleudern von Materie aus den Zentralsternen gebildet werden.

Die Formel (24.37) kann auch zur Bestimmung der Massen diffuser Gasnebel, die bekanntlich ihr Leuchten denselben Anregungsmechanismen wie die planetarischen Nebel verdanken, angewandt werden. Jedoch sind ihre Volumen und Leuchtkräfte (besonders die letzteren) noch sehr schlecht bekannt. Trotzdem

kann man behaupten, daß die Massen der diffusen Nebel bis zu Hunderten und Tausenden von Sonnemassen ausmachen können. Diese Tatsache ist zweifellos von großer kosmogonischer Bedeutung.

7. Die chemische Zusammensetzung der Nebel

In dem vorangegangenen Abschnitt haben wir die Konzentration der Wasserstoffatome in den planetarischen Nebeln bestimmt. Jetzt wollen wir zeigen, wie man die Konzentrationen anderer Atome (relativ zu Wasserstoff) finden kann. Hierzu werden wir die aus den Beobachtungen bekannten Intensitätsverhältnisse der Linien des betrachteten Elements zu den Linien der BALMER-Serie benutzen.

Wir nehmen zunächst an, daß die Linien des betrachteten Atoms (neutral oder ionisiert) durch Rekombinationen entstehen. Für jedes Niveau dieses Atoms stellen wir analog zu den Gleichungen (24.27) des Wasserstoffs die Stationaritätsbedingungen auf. Aus dem System dieser Gleichungen erhalten wir die Größen $z'_m = \frac{n'_m}{n_e n'^+}$, wobei n'_m die Zahl der Atome im m-ten Zustand und n'^+ die Zahl der Atome im nächsthöheren Ionisationszustand (in der Volumeneinheit) sind. Mit Hilfe der Größen z'_m erhalten wir für die Energie, die von dem Nebel in den Linien des gegebenen Atoms beim Übergang $m \to l$ ausgestrahlt wird, den Ausdruck

$$E'_{ml} = z'_m A'_{ml} h\nu'_{lm} n_e n'^+ V',$$

wobei V' das Volumen ist, das in der betrachteten Linie leuchtet. Den analogen Ausdruck bilden wir für die Energie, die von dem Nebel in den BALMER-Linien beim Übergang $k \to 2$ ausgestrahlt wird:

$$E_{k2} = z_k A_{k2} h\nu_{2k} n_e n^+ V.$$

Dann ist das Verhältnis beider Energien

$$\frac{E'_{ml}}{E_{k2}} = \frac{z'_m A'_{ml} \nu'_{lm}}{z_k A_{k2} \nu_{2k}} \frac{n'^+}{n^+} \frac{V'}{V}. \tag{24.39}$$

Dieses Intensitätsverhältnis der Linien $\frac{E'_{ml}}{E_{k2}}$ ist aus der Beobachtung zu erhalten. Formel (24.39) bietet also die Möglichkeit zur Bestimmung des Verhältnisses $\frac{n'^+}{n^+}$, d.h. der Zahl der Atome des gegebenen Elements in einer bestimmten Ionisationsstufe zur Zahl der Wasserstoffionen.

Um die Zahl der Atome in anderen Ionisationsstufen zu erhalten, benutzt man die Ionisationsformel (24.28). Daraus finden wir, auf welcher Ionisationsstufe sich die Mehrzahl der Atome des Elements befindet. Die Gesamtkonzentration dieses Elements im Nebel ist damit bestimmt.

Die beschriebenen Rechnungen sind am leichtesten für das ionisierte Helium (und andere wasserstoffähnliche Ionen) auszuführen, da hierfür z'_m aus z_m für Wasserstoff erhalten werden kann. Ist Z die Atomnummer des wasserstoffähnlichen Ions, so liegen seine Energieniveaus Z^2mal tiefer als die des Wasserstoffs, und die Ausdrücke, die die Wahrscheinlichkeiten der Rekombinationen und spontanen Übergänge bestimmen, erhält man aus den entsprechenden Ausdrücken für Wasserstoff, indem man sie mit Z^4 multipliziert. Danach finden wir aus den Gleichungen (24.17) und (24.14), daß die Zahlen z'_m für das ionisierte Helium achtmal kleiner, als die z_m für Wasserstoff sind, wenn man eine Temperatur annimmt, die viermal größer ist, d.h.

$$z'_m(4\,T_e) = \frac{1}{2}\, z_m(T_e)\,.$$

Die Berechnung von z'_m für das neutrale Helium wurde von A. A. NIKITIN[1]) durchgeführt. Die von ihm erhaltenen relativen Intensitäten der Heliumlinien standen in zufriedenstellender Übereinstimmung mit den beobachteten, sowohl der Singulett- als auch der Triplettserien. NIKITIN fand mit Hilfe von (24.39), daß die Anzahl der Heliumatome in Nebeln im Mittel 10mal kleiner als die der Wasserstoffatome ist.

Die Bestimmung der Konzentration anderer Atome bereitet beträchtliche Schwierigkeiten, da die Übergangs- und Einfangwahrscheinlichkeiten für diese noch sehr schlecht bekannt sind. Außerdem ist noch eine gewisse Unsicherheit damit verbunden, daß die Sternstrahlung im fernen Ultraviolett wahrscheinlich vom PLANCKschen Gesetz abweicht, wodurch die Anwendung der Ionisationsformel beim Übergang von einer Ionisationsstufe zu anderen unsicher wird. Es sind jedoch in solchen Fällen Näherungen möglich. Die Resultate solcher Abschätzungen werden am Schluß des Paragraphen gebracht.

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Konzentration der Atome in Nebeln beruht auf dem Auftreten verbotener Linien in ihren Spektren, die durch Elektronenstoß angeregt werden. So finden wir beispielsweise die Konzentration der Atome des zweifach ionisierten Sauerstoffs aus dem beobachteten Intensitätsverhältnis der Linien $N_1 + N_2$ und $H\beta$.

Wir wollen mit $n_{O\,III}$ die Zahl der O III-Ionen pro cm^3 bezeichnen. Diese Ionen befinden sich vorwiegend im Grundzustand. Bei Stößen mit freien Elektronen erfolgt der Übergang vom ersten in den zweiten Zustand. Die Zahl dieser Übergänge pro Sekunde und cm^3 ist $n_{O\,III}\, n_e\, b'_{12}(T_e)$. Fast alle Atome, die vom ersten in den zweiten Zustand übergehen, kehren spontan unter Ausstrahlung der Linien N_1 und N_2 in den Grundzustand zurück. Daher ist die Gesamtenergie, die von dem Nebel in den Linien N_1 und N_2 ausgestrahlt wird, gleich

$$E_{N_1+N_2} = n_{O\,III}\, n_e\, b'_{12}(T_e)\, h\nu'_{12}\, V'.$$

Hierin ist V' das Nebelvolumen, das im Lichte der Linien N_1 und N_2 leuchtet.

---

[1]) A. A. NIKITIN, Veröffentl. der Leningrader Staatl. Universität Nr. 136, 1950 (А. А. НИКИТИН, Ученые записки ЛГУ, No. 136, 1950).

Andererseits finden wir für die Energie, die vom Nebel in der Linie $H\beta$ ausgestrahlt wird, den Ausdruck

$$E_{H\beta} = z_4 A_{42} h\nu_{24} n_e n^+ V.$$

Die Zusammenfassung beider Gleichungen ergibt

$$\frac{E_{N_1+N_2}}{E_{H\beta}} = 4\frac{E_{N_2}}{E_{H\beta}} = \frac{n_{O\,III}}{n^+}\frac{b'_{12}(T_e)}{z_4 A_{42}}\frac{\nu'_{12}}{\nu_{24}}\frac{V'}{V}. \tag{24.40}$$

Um nach dieser Formel das Verhältnis $\frac{n_{O\,III}}{n^+}$ bestimmen zu können, muß man $\frac{E_{N_2}}{E_{H\beta}}$ und $\frac{V'}{V}$ aus der Beobachtung kennen. In den Spektren der planetarischen Nebel ist die Linie N_2 im Mittel dreimal heller als die Linie $H\beta$, während die mit spaltlosem Spektrographen erhaltenen Nebelbilder in diesen Linien ungefähr gleich sind. Daraus folgt $\frac{E_{N_1+N_2}}{E_{H\beta}} = 12$, $\frac{V'}{V} = 1$.

Der Wert $b'_{12}(T_e)$ hängt sehr stark von T_e ab. Die Elektronentemperaturen der Nebel liegen jedoch in ziemlich engen Grenzen. Wir nehmen $T_e = 8000°$ an. Für diese Temperatur ist $b'_{12} = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$. Aus Tabelle 18 finden wir weiter für diese Temperatur $z_4 = 0{,}4 \cdot 10^{-20}$. Schließlich haben wir noch $A_{42} = 8{,}37 \cdot 10^6$ und $\frac{\nu'_{12}}{\nu_{24}} \approx 1$ (da die Linien $H\beta$ und N_2 nebeneinander liegen).

Mit diesen Größen erhalten wir aus (24.40) $\frac{n_{O\,III}}{n^+} = 10^{-4}$. Es kommen also in planetarischen Nebeln auf ein O III-Ion 10000 Wasserstoffionen.

Wichtig ist noch, daß in den Nebelspektren auch O II-Linien, die durch Rekombinationen hervorgerufen werden, zu beobachten sind. Dies gibt eine Möglichkeit, die Zahl der O III-Ionen auch nach der oben beschriebenen Methode abzuschätzen. Beide Abschätzungen stehen in guter Übereinstimmung, was für ihre Richtigkeit spricht. In analoger Weise lassen sich auch für einige andere Elemente die Konzentrationen feststellen.

Nach den geschilderten (oder etwas abgeänderten) Methoden wurden von mehreren Autoren die Konzentrationen verschiedener Atome in planetarischen Nebeln berechnet. Die erhaltenen Ergebnisse finden sich in Tabelle 1 (siehe S.35).

Berücksichtigt man die Ungenauigkeit derartiger Bestimmungen, so kann man sagen, daß keine großen Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung der Nebel und der Sternatmosphären bestehen. Dies kann man auch so formulieren: Die obere Sonnenschicht, aufgebläht bis zu Nebeldimensionen und von einem heißen Stern beleuchtet, muß genau denselben Typ des Spektrums ergeben, wie er bei planetarischen Nebeln beobachtet wird.

§ 25. Das Strahlungsgleichgewicht der planetarischen Nebel

1. Das L_c-Strahlungsfeld

Wir haben oben bei der Bestimmung der Intensität der Emissionslinien angenommen, daß die Nebel für Strahlung in diesen Linien durchsichtig sind. Diese Annahme ist zweifellos für die Linien der Nebenserien richtig, da sich nur eine verschwindend kleine Zahl von Atomen in angeregten Zuständen befindet. Sie ist auch für verbotene Linien gerechtfertigt (selbst wenn der untere Zustand der Grundzustand ist), denn der Absorptionskoeffizient in diesen Linien ist außerordentlich klein.

Nicht durchsichtig jedoch ist der Nebel im allgemeinen für die Strahlung der Hauptserie. Das erschwert die Berechnung des Strahlungsfeldes in den fraglichen Frequenzen sehr, da man hierbei die Strömungsgleichung benutzen muß. Wir wollen das Strahlungsfeld in den Wellenlängen der LYMAN-Serie des Wasserstoffs berechnen. Der erste, der dieses Problem in Angriff nahm, war V. A. AMBARZUMJAN[1]). Später präzisierten und verallgemeinerten andere Autoren die von ihm erhaltene Lösung.

Bei der Betrachtung des Strahlungstransports in den Nebeln ist das geometrische Modell des Nebels von ausschlaggebender Bedeutung. Wir nehmen an (wie man das gewöhnlich tut), daß der Nebel von zwei konzentrischen Kugeln mit den Radien r_1 und r_2 begrenzt wird. Im Mittelpunkt dieser Kugeln steht der Zentralstern. Die Dicke des Nebels sei klein gegen seinen Abstand vom Zentrum (d. h. $r_2 - r_1 \ll r_1$). Dann kann man den Nebel aus planparallelen Schichten zusammengesetzt behandeln und den Verdünnungsfaktor der Strahlung im Nebel als konstant ansehen.

Zunächst betrachten wir nun das Strahlungsfeld des LYMAN-Kontinuums. Bei Absorption von L_c-Quanten, die vom Stern her in den Nebel eindringen, werden Wasserstoffatome ionisiert. Bei Rekombinationen auf das erste Niveau werden diese Quanten wiederum ausgestrahlt. Bezeichnen wir den Bruchteil der Rekombinationen auf das erste Niveau mit x, dann können wir sagen, daß im Nebel eine Streuung von L_c-Quanten stattfindet, wobei die Wahrscheinlichkeit für ein Quant, beim Elementarakt der Streuung „am Leben zu bleiben", gleich x ist.

Der Einfachheit halber behandeln wir das ganze LYMAN-Kontinuum als ein Niveau. Es sei $\varkappa$ der mittlere atomare Absorptionskoeffizient im Kontinuum und τ die entsprechende optische Tiefe, von der inneren Begrenzung des Nebels an gezählt, d. h.

$$\tau = \int_{r_1}^{r} n_1 \varkappa \, dr .$$

Ist πS die Anzahl der Quanten des LYMAN-Kontinuums, die vom Stern her auf 1 cm² der inneren Oberfläche des Nebels auftreffen, dann werden davon in

---

[1]) V. A. AMBARZUMJAN, Nachr. des Georg. Astr. Obs. **13**, Nr. 3, 1953 (В. А. Амбарцумян, Известия ГАО **13**, No. 3, 1933).

der optischen Tiefe τ pro cm^3 $n_1 \varkappa \pi S e^{-\tau}$ Quanten absorbiert. Außer der Strahlung, die direkt vom Stern kommt, wird jedoch im betrachteten Volumenelement auch die diffuse Strahlung des Nebels selbst absorbiert, die durch Rekombinationen auf das erste Niveau entsteht. Die Zahl der Quanten der diffusen L_c-Strahlung, die in 1 cm^3 absorbiert werden, ist gleich $n_1 \varkappa \int K(\tau, \vartheta)\, d\omega$. Hierin ist $K(\tau, \vartheta) h\nu_0$ die Intensität der Strahlung, die unter dem Winkel ϑ gegen die Normale in der optischen Tiefe τ ankommt. Die Integration erstreckt sich über den ganzen Raumwinkel.

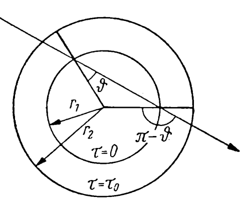


Abb. 61

Von der Gesamtzahl der Quanten

$$n_1 \varkappa \pi S e^{-\tau} + n_1 \varkappa \int K(\tau, \vartheta)\, d\omega,$$

die in der Volumeneinheit absorbiert werden, geht der Bruchteil x wieder in L_c-Strahlung über. Ist $4\pi n_1 \varkappa C(\tau)$ die Zahl der Quanten, die von diesem Volumenelement im LYMAN-Kontinuum ausgestrahlt werden, so erhält man als Bedingung für das Strahlungsgewicht der L_c-Strahlung im Nebel

$$C(\tau) = x \int K(\tau, \delta) \frac{d\omega}{4\pi} + x \frac{S}{4} e^{-\tau}. \tag{25.1}$$

Außer durch Gleichung (25.1) sind $C(\tau)$ und $K(\tau, \vartheta)$ noch durch die Strömungsgleichung miteinander verbunden, die für planparallele Schichten die Form

$$\cos\vartheta \frac{dK(\tau, \vartheta)}{d\tau} = C(\tau) - K(\tau, \vartheta) \tag{25.2}$$

besitzt.

Die Gleichungen (25.1) und (25.2) sind für folgende Grenzbedingungen zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} K(0, \vartheta) &= K \quad (0, \pi - \vartheta), \\ K(\tau_0, \vartheta) &= 0 \quad \left(\text{für } \vartheta > \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{25.3}$$

Die erste dieser Bedingungen, die für die innere Begrenzung des Nebels (d. h. $\tau = 0$) gilt, bedeutet, daß die Intensität der Strahlung, die aus dem Nebel austritt, gleich ist der Intensität der Strahlung, die in den Nebel eindringt. Dies ist deshalb der Fall, weil die Strahlung, die an einem beliebigen Ort auf die innere Begrenzung des Nebels unter dem Winkel ϑ zur Normalen trifft, nichts anderes ist als die Strahlung, die auf der gegenüberliegenden Seite unter dem Winkel $\pi - \vartheta$ austritt (siehe Abb. 61). Die zweite der Bedingungen besagt, daß an der äußeren Nebelgrenze (für $\tau = \tau_0$) keine Strahlung nach innen dringt.

Unsere Aufgabe besteht also in der Lösung der Gleichungen (25.1) und (25.2) mit den vorgegebenen Grenzbedingungen (25.3). Diese Gleichungen lassen sich leicht mit einer der aus der Theorie des Strahlungsgleichgewichts bekannten

Näherungsmethoden lösen (Mittelung der Strahlungsintensität über alle Richtungen). Wir ziehen jedoch die Aufstellung einer Integralgleichung vor. Löst man die Gleichung (25.2) nach $K(\tau, \vartheta)$ für die Bedingungen (25.3) auf und setzt den gefundenen Ausdruck für $K(\tau, \vartheta)$ in (25.2) ein, so erhält man

$$C(\tau) = \frac{p}{2}\int_0^{\tau_0} [Ei\,|(\tau - \tau')| + Ei(\tau + \tau')]\,C(\tau')\,d\tau' + x\frac{S}{4}e^{-\tau}, \tag{25.4}$$

mit

$$Ei(\tau) = \int_\tau^\infty e^{-\tau}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Es ist klar, daß die diffuse Strahlung in einem Nebel eine um so größere Rolle spielt, je größer die optische Dicke des Nebels ist. Um nun die Bedeutung der diffusen Nebelstrahlung zu erfassen, wollen wir $\tau_0 = \infty$ annehmen. Dann kann die Gleichung (25.4) näherungsweise in folgende Form gebracht werden:

$$C(\tau) = \frac{x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} Ei\,|(\tau - \tau')|\,C(\tau')\,d\tau', \tag{25.5}$$

wobei (25.5) die Funktion $C(\tau)$ um so genauer bestimmt, je größer die optische Tiefe τ ist.

Die Gleichung (25.5) hat folgende exakte Lösung

$$C(\tau) = Ae^{-k\tau}, \tag{25.6}$$

worin k die Wurzel der Gleichung

$$\frac{x}{2k}\cdot \lg\frac{1+k}{1-k} = 1 \tag{25.7}$$

und A eine beliebige Konstante bedeuten. Wir wollen die Funktionen (25.6) als Näherungslösung der Gleichung (25.4) ansehen, und bestimmen die Konstante A aus der Bedingung, daß diese Gleichung im Mittel exakt erfüllt sein soll. So erhalten wir

$$A = \frac{kxS}{4(1-x)}. \tag{25.8}$$

Die Werte von k, die aus (25.7) hervorgehen, finden sich in nachstehender Tabelle.

x	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
k	1,00	0,96	0,91	0,82	0,70	0,52	0

Für die L_c-Strahlung ist x gleich

$$x = \frac{C_1(T_e)}{\sum_{1}^{\infty} C_i(T_e)},$$

wobei $C_i(T_e)$ durch (24.14) gegeben ist. Man erhält nach dieser Formel

T_e	5000	10000	20000	50000
x	0,39	0,44	0,49	0,57

Da die Elektronentemperaturen der Nebel etwa bei 10000° liegen, entnimmt man der Tabelle: $k = 0{,}97$. Wir setzen einfacher $k = 1$. Dann finden wir für die gesuchte Funktion $C(\tau)$

$$C(\tau) = \frac{xS}{4(1-x)} e^{-\tau}. \tag{25.9}$$

Vergleicht man den für $C(\tau)$ erhaltenen Ausdruck mit (25.1), so sieht man, daß die Zahl der Quanten der diffusen L_c-Strahlung ungefähr gleich ist der Zahl der L_c-Quanten, die direkt vom Stern kommen. Man muß also zugeben, daß die Bedeutung der diffusen Strahlung nicht sehr groß ist.

Dieses Ergebnis ist dadurch zu erklären, daß der Bruchteil der Einfänge auf das erste Niveau, x also, relativ klein (kleiner als 0,5) ist. Hätte x etwa den Wert 1, so würde die diffuse Nebelstrahlung die direkte Sternstrahlung überwiegen. Dies wäre besonders in großen optischen Tiefen von Bedeutung (da k in diesem Falle klein wäre).

2. Das $L\alpha$-Strahlungsfeld

Weit interessantere Ergebnisse als im vorangegangenen Abschnitt werden wir jetzt bei der Analyse des $L\alpha$-Strahlungsfeldes erhalten. Wir haben oben gesehen, daß jedes L_c-Quant im Nebel umgewandelt wird, wobei unbedingt ein $L\alpha$-Quant entsteht. Diese Quanten diffundieren durch den Nebel; sie erfahren eine „reine" Streuung. Die optische Dicke des Nebels in der Linie $L\alpha$ ist aber 10^4–10^5 mal größer als die optische Dicke im Lyman-Kontinuum, ist also sehr groß. Dies führt dazu, daß jedes $L\alpha$-Quant eine ungeheuer große Zahl von Streuprozessen durchgemacht haben muß, bevor es den Nebel verläßt. Man kann also im voraus sagen, daß die Dichte der $L\alpha$-Strahlung im Nebel außerordentlich groß ist.

Ist s_{12} der Absorptionskoeffizient pro Atom in der Linie Lα, dann sind die optische Tiefe t und die gesamte optische Dicke t_0 in dieser Linie

$$t = \int_{r_1}^{r} n_1 s_{12} dr, \quad t_0 = \int_{r_1}^{r_2} n_1 s_{12} dr. \tag{25.10}$$

Wir bezeichnen:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{t_0}{\tau_0} = \frac{s_{12}}{\varkappa} = \frac{1}{q}. \tag{25.11}$$

Dieses Verhältnis ist, wie schon gesagt, von der Größenordnung 10^4–10^5.

Wir wollen nun die Intensität der Lα-Strahlung, die unter dem Winkel ϑ gegen die Normale in der optischen Tiefe t einfällt, mit $K_{12}(t, \vartheta) h\nu_{12}$ bezeichnen und mit $4\pi n_1 s_{12} C_{12}(t)$ die Zahl der Lα-Quanten, die in der Zeit- und Volumeneinheit in derselben optischen Tiefe ausgestrahlt werden. Die Größen $s_{12}(t)$ und $C_{12}(t)$ sind durch die gewöhnliche Strömungsgleichung miteinander verbunden:

$$\cos\vartheta \frac{dK_{12}(t, \vartheta)}{dt} = C_{12}(t) - K_{12}(t, \vartheta). \tag{25.12}$$

Wir stellen jetzt die Gleichung des Strahlungsgleichgewichts für die Lα-Strahlung auf. Dazu nehmen wir an, daß alle Lα-Quanten aus L$_c$-Quanten entstehen, d. h., wir vernachlässigen die Sternstrahlung in den LYMAN-Linien (also auch in der Lα-Linie selbst) gegenüber der Strahlung im LYMAN-Kontinuum. Eine solche Voraussetzung ist durchaus zulässig, wenn nur τ_0 nicht sehr groß gegen 1 ist.

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß infolge der Absorption von L$_c$-Strahlung in der Zeit- und Volumeneinheit $4\pi n_1 \varkappa C(\tau)$ Rekombinationen auf das erste Niveau stattfinden. Die Zahl der Rekombinationen auf alle anderen Niveaus erhält man daraus durch Multiplikation mit $\frac{1-x}{x}$. Jede dieser Rekombinationen führt unausbleiblich auch zur Bildung eines Lα-Quants. Die Menge der Lα-Quanten, die aus L$_c$-Strahlung entstehen, ist daher gleich

$$4\pi \frac{1-x}{x} n_1 \varkappa C(\tau).$$

Das Volumenelement strahlt in der Linie Lα jedoch nicht nur diese Quanten aus. Eine weit größere Zahl von Quanten wird darin gestreut, genauer ausgedrückt, es strahlt auch noch so viele Lα-Quanten aus, wie es aus dem diffusen Lα-Strahlungsfeld des Nebels absorbiert. (Natürlich ist auch diese Lα-Strahlung aus L$_c$-Strahlung hervorgegangen.) So werden also insgesamt

$$n_1 s_{12} \int K_{12}(t, \vartheta) d\omega + 4\pi \frac{1-x}{x} n_1 \varkappa C(\tau)$$

Lα-Quanten von der Volumeneinheit des Nebels ausgestrahlt.

Diese Menge haben wir weiter oben mit $4\pi n_1 s_{12} C_{12}(t)$ bezeichnet. Somit erhalten wir als Bedingung des Strahlungsgleichgewichts

$$C_{12}(t) = \int K_{12}(t,\vartheta)\frac{d\omega}{4\pi} + q\frac{1-x}{x}C(\tau). \tag{25.13}$$

Die hierin auftretende Funktion $C(\tau)$ ist durch Formel (25.9) bestimmt. Mit ihr ergibt sich endgültig

$$C_{12}(t) = \int K_{12}(t,\vartheta)\frac{d\omega}{4\pi} + q\frac{S}{4}e^{-qt}. \tag{25.14}$$

Die Gleichungen (25.12) und (25.14) sind nach der von EDDINGTON vorgeschlagenen Näherung zu lösen. Es seien $\overline{K}_{12}(t)h\nu_{12}$ die mittlere Intensität der $L\alpha$-Strahlung und $4\pi\overline{H}_{12}(t)h\nu_{12}$ der entsprechende Strahlungsstrom, d.h.

$$\overline{K}_{12} = \int K_{12}(t,\vartheta)\frac{d\omega}{4\pi}, \quad \overline{H}_{12}(t) = \int K_{12}(t,\vartheta)\cos\vartheta\frac{d\omega}{4\pi}. \tag{25.15}$$

Man erhält daraus

$$\left.\begin{aligned}\overline{K}_{12}(t) &= a - 3bt - \frac{3S}{4q}e^{-qt},\\ \overline{H}_{12}(t) &= b - \frac{S}{4}e^{-qt}.\end{aligned}\right\} \tag{25.16}$$

Hierin sind a und b willkürliche Konstanten.

Zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten sind die Grenzbedingungen aufzustellen. Hierfür hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Nebel ist in Ruhe (oder expandiert mit einer Geschwindigkeit, die über die mittlere thermische Geschwindigkeit der Atome nicht hinausgeht). Dann unterscheiden sich die Grenzbedingungen nicht von den Bedingungen (29.3) für die L_c-Strahlung. In der von uns verwendeten Näherung kann man sie schreiben:

$$\overline{H}_{12}(0) = 0, \quad 2\overline{H}_{12}(t_0) = \overline{K}_{12}(t_0). \tag{25.17}$$

2. Die Expansionsgeschwindigkeit des Nebels ist groß gegen die mittlere thermische Geschwindigkeit der Atome. In diesem Fall werden die $L\alpha$-Quanten, die von der einen Seite des Nebels kommen, infolge des DOPPLER-Effekts nicht von den Atomen auf der gegenüberliegenden Seite absorbiert. Die an der inneren Nebelbegrenzung geltenden Bedingungen sind daher denen an der Außengrenze analog, d.h. also:

$$2\overline{H}_{12}(0) = -\overline{K}_{12}(0), \quad 2\overline{H}_{12}(t_0) = \overline{K}_{12}(t_0). \tag{25.18}$$

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die optische Dicke des Nebels im LYMAN-Kontinuum wesentlich größer als 1 ist, d.h. $q\,t_0 \gg 1$. Dann

erhalten wir für die Konstanten a und b im ersten der beiden angegegeben Fälle

$$a = \frac{3}{4} S t_0, \quad b = \frac{S}{4}, \tag{25.19}$$

und im zweiten Falle

$$a = \frac{3S}{4q}, \quad b = \frac{S}{4qt_0}. \tag{25.20}$$

Das Einsetzen der gefundenen Werte für a und b in Gleichung (25.16) ermöglicht die Berechnung der Dichte der $L\alpha$-Strahlung und des Strahlungsstroms für jede beliebige optische Tiefe des Nebels. Als Beispiel wollen wir die Dichte der $L\alpha$-Strahlung an der inneren Nebelgrenze für den Fall 1 bestimmen. Es ist klar, daß die Zahl der $L\alpha$-Quanten pro cm³ gleich $\frac{4\pi}{c}\bar{K}_{12}(t)$ ist. Für $t = 0$ erhalten wir

$$\frac{4\pi}{c}\bar{K}_{12}(0) = \frac{3\pi S}{c} t_0.$$

Dabei ist aber $\frac{\pi S}{c}$ die Zahl der L_c-Quanten pro cm³ für $t = 0$. Demnach ist die Dichte der $L\alpha$-Strahlung an der inneren Nebelgrenze $3\,t_0$mal, also 10000mal größer als die Dichte der L_c-Strahlung. Die Dichte der L_c-Strahlung ist ihrerseits bei einer Sterntemperatur von 40000°–50000° etwa $5 \cdot 10^4$mal größer als die Dichte der vom Stern kommenden $L\alpha$-Strahlung. Deshalb ist die Dichte der diffusen $L\alpha$-Strahlung an der Innenseite des Nebels 10^9mal größer, als sie es wäre, wenn wir es nur mit direkt vom Stern kommender $L\alpha$-Strahlung zu tun hätten. Diese Dichte übersteigt die Dichte der Strahlung in allen anderen Linien des Wasserstoffspektrums ganz unvergleichlich. Ist jedoch W von der Größenordnung 10^{-13}, so ist sie trotzdem 10^4mal geringer als die $L\alpha$-Strahlungsdichte an der Oberfläche des Zentralsterns.

Im Zusammenhang mit dieser so großen $L\alpha$-Strahlungsdichte im Nebel sind zwei Fragen von Interesse:

1. Wie groß ist die mittlere Aufenthaltsdauer eines $L\alpha$-Quants im Nebel?

2. Wie groß ist die mittlere Zahl der Streuprozesse, die ein $L\alpha$-Quant erfährt?

Um auf die erste dieser Fragen Antwort geben zu können, muß man die Gesamtzahl der $L\alpha$-Quanten im Nebel und die Zahl der $L\alpha$-Quanten, die in der Zeiteinheit aus L_c-Strahlung entstehen (oder den Nebel verlassen), kennen. Das Verhältnis der ersten Zahl zur zweiten gibt uns die gesuchte Aufenthaltsdauer. Wie schon erwähnt, befinden sich in 1 cm³ $\frac{4\pi}{c}\bar{K}_{12}(t)$ $L\alpha$-Quanten. Die Gesamtzahl der $L\alpha$-Quanten im Nebel ist daher

$$4\pi r_1^2 \frac{4\pi}{c} \int_0^{t_0} \bar{K}_{12}(t) \frac{dt}{n_1 s_{12}}.$$

Was die Zahl der Lα-Quanten, die im Nebel entstehen, betrifft, kann man sie einfach gleich der Zahl der L_c-Quanten setzen, die vom Zentralstern kommen. Es werden also in der Sekunde im Nebel $4\pi r_1^2\, \pi S$ Lα-Quanten gebildet. Wir erhalten daher für die mittlere Aufenthaltsdauer eines Quants im Nebel:

$$T = \frac{4}{cS}\int_0^{t_0} \overline{K}_{12}(t)\,\frac{dt}{n_1 s_{12}}\,. \qquad (25.21)$$

Zur Berechnung des Integrals brauchen wir den Ausdruck für $\overline{K}_{12}(t)$. Setzen wir die in (25.19) angegebenen Werte für die Konstanten a und b in die erste der Gleichungen (25.16) ein und lassen in dieser das letzte Glied (das wegen unserer Voraussetzung $qt_0 \gg 1$ klein ist) entfallen, so finden wir

$$\overline{K}_{12}(t) = \frac{3}{4}\,S(t_0 - t)\,. \qquad (25.22)$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß $n_1\varkappa = \text{const}$ ist. Dann ergibt die Integration in (25.21)

$$T = \frac{3\,t_0^2}{2\,c n_1 s_{12}}\,. \qquad (25.23)$$

Nachdem wir T gefunden haben, bereitet die Bestimmung der mittleren Zahl von Streuungen, die ein Lα-Quant erfährt, keinerlei Schwierigkeiten mehr. Zur Bestimmung dieser Zahl dividiert man T durch die mittlere Zeit zwischen zwei Streuungen. Die mittlere Weglänge zwischen zwei Streuungen ist aber gleich $\frac{1}{n_1 s_{12}}$ (was der optischen Weglänge 1 entspricht). Daher ist die mittlere Zeit zwischen zwei Streuungen gleich $\frac{1}{c n_1 s_{12}}$. Teilt man T durch $\frac{1}{c n_1 s_{12}}$, so erhält man

$$N = \frac{3}{2}\,t_0^2\,. \qquad (25.24)$$

Die mittlere Zahl der Streuungen eines Lα-Quants ist also der Größenordnung nach dem Quadrat der optischen Dicke des Nebels in der Linie Lα gleich.

Wir wollen nun die Zahlenwerte von N und T bestimmen. Da die optische Dicke des Nebels für Lα-Strahlung gleich 10^4–10^5 ist, erhalten wir nach Formel (25.24), daß jedes Lα-Quant im Mittel einige Milliarden mal gestreut wird. Für die Abschätzung von T setzen wir in Formel (25.23) $c = 2 \cdot 10^{10}$ cm/sec, $n_1 = 1$, $s_{12} = 10^{-12}$ cm^{-1}. Mit diesen Werten errechnet man eine mittlere Aufenthaltsdauer für ein Lα-Quant im Nebel von einigen tausend Jahren.

Die erhaltenen Zahlen sind so groß, daß sie dazu zwingen, jeden Faktor aufmerksam zu betrachten, der den Prozeß der Vielfachstreuung der Lα-Quan-

ten unterbrechen könnte. Einer dieser Faktoren sind die Stöße zweiter Art, die die Wasserstoffatome in den Grundzustand überführen, ohne daß ein $L\alpha$-Quant ausgestrahlt wird. Können nun vielleicht diese Stöße zweiter Art die Dichte der $L\alpha$-Strahlung im Nebel wesentlich herabsetzen?

Wir haben soeben gesehen, daß jedes $L\alpha$-Quant 10^9 mal gestreut wird. d. h., daß es 10^9 mal ein Atom aus dem Grundzustand in einen angeregten überführt. Die Lebensdauer eines angeregten Zustands beträgt 10^{-8} sec. Demnach befindet sich ein $L\alpha$-Quant im ganzen 10 sec im absorbierten Zustand. Während dieser Zeit erfolgen

$$10 n_e v_e \sigma$$

Stöße zweiter Art. Dabei ist n_e die Zahl der freien Elektronen pro cm^3, v_e die mittlere Elektronengeschwindigkeit und σ der effektive Streuquerschnitt. Die wahrscheinlichsten Werte dieser Größen sind: $n_e = 10^4$, $v_e = 10^8$ cm/sec, $\sigma = 10^{-16}$ cm^{-1}. Die gesuchte Zahl der Stöße zweiter Art ist also $10\, n_e v_e \sigma = 10^{-3}$. Wie wir auch die Ausgangsdaten ändern mögen, diese Zahl kann nicht 1 angenähert werden. Daher wird die große Zahl der Streuprozesse der $L\alpha$-Quanten praktisch nicht durch Stöße zweiter Art verändert.

Folglich können Stöße die $L\alpha$-Strahlungsdichte nicht wesentlich vermindern. Trotzdem sind die Resultate dieses Paragraphen nicht ohne weiteres auf reale Nebel anwendbar. Die Ursache für eine starke Herabsetzung der Dichte der $L\alpha$-Strahlung in Nebeln wird im folgenden Abschnitt behandelt.

3. Der Strahlungsdruck in Nebeln

Wir betrachten jetzt den $L\alpha$-Strahlungsstrom. Er ist in der optischen Tiefe τ gleich $4\pi \overline{H}_{12}(t)$. Um seine Größe an den Nebelgrenzen zu errechnen, müssen wir in die zweite der Gleichungen (25.16) die Werte der Konstanten a und b einsetzen und $t = 0$ und $t = t_0$ nehmen. Ist der Nebel in Ruhe, so ist an der inneren Grenze der Strahlungsstrom gleich Null und an der äußeren Grenze gleich $+\pi S$. Expandiert der Nebel mit großer Geschwindigkeit, so hat der Strahlungsstrom an der inneren Grenze den Wert $-\pi S\left(1 - \frac{1}{q t_0}\right)$ und an der äußeren Grenzfläche $+\frac{\pi S}{q t_0}$. Da wir angenommen haben, daß $q t_0 \gg 1$ ist, verlassen im zweiten Falle fast alle $L\alpha$-Quanten den Nebel durch die innere Grenzfläche. Der Bruchteil dieser Quanten ist um so größer, je größer die optische Dicke des Nebels ist. In beiden Fällen ist, wie auch zu erwarten war, die Gesamtzahl der $L\alpha$-Quanten, die den Nebel verlassen, gleich $4\pi r_1^2 \pi S$, d. h. gleich der Zahl der L_c-Quanten, die vom Stern her in den Nebel eindringen.

Der $L\alpha$-Strahlungsstrom ist somit in Nebeln sehr groß. Man muß daher erwarten, daß auch der $L\alpha$-Strahlungsdruck sehr groß ist. Auf jeden Fall ist er weitaus größer als der Druck der L_c-Strahlung, denn der Absorptionskoeffizient in der Linie $L\alpha$ übertrifft den Absorptionskoeffizienten im LYMAN-Kontinuum um das 10000fache.

Wir wollen nun das Verhältnis des $L\alpha$-Strahlungsdrucks zur Anziehungskraft des Zentralsterns bestimmen. Dazu wählen wir ein Volumenelement an einer der Nebelgrenzen (an der äußeren Grenze im Falle eines ruhenden Nebels und an der Innengrenze, wenn der Nebel expandiert). Der Strahlungsdruck, der in der Linie $L\alpha$ auf dieses Volumenelement wirkt, ist gleich

$$R = \frac{n_1 s_{12}}{c} \pi S h \nu_{12}. \tag{25.25}$$

Für πS haben wir aber die Beziehung

$$4\pi r_1^2 \pi S = 4\pi r_*^2 \frac{2\pi}{c^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT_*}} - 1}. \tag{25.26}$$

Damit erhalten wir für R:

$$R = \left(\frac{r_*}{r_1}\right)^2 \frac{2\pi n_1 s_{12} h \nu_{12}}{c^3} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT_*}} - 1}. \tag{25.27}$$

Zur Berechnung der Anziehungskraft, die der Zentralstern auf dieses Volumenelement ausübt, ist zu beachten, daß neben den neutralen auch ionisierte Wasserstoffatome darin vorkommen. Die Anziehungskraft ist daher gleich

$$G = \left(\frac{r_*}{r_1}\right)^2 g_* m_{\mathrm{H}} (n_1 + n^+). \tag{25.28}$$

Dabei ist g_* die Schwerebeschleunigung an der Sternoberfläche.

Für das gesuchte Verhältnis $\frac{R}{G}$ finden wir damit

$$\frac{R}{G} = \frac{2\pi s_{12} h \nu_{12}}{c^3 m_{\mathrm{H}} g_* \left(1 + \frac{n^+}{n_1}\right)} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT_*}} - 1}. \tag{25.29}$$

(25.29) ergibt mit $T_* = 40000°$ und $\frac{n^+}{n_1} = 5000$ dann

$$\frac{R}{G} = \frac{10^9}{g_*}. \tag{25.30}$$

Man kann sich nun schwerlich denken, daß auf der Oberfläche des Zentralsterns die Schwerebeschleunigung den Wert 10^9 cm/sec² erreicht. Wäre dies der Fall, müßte die Masse des Zentralsterns einige tausendmal größer als die Sonnenmasse sein. Dann würde man aber eine Rotverschiebung der Absorptionslinien im Sternspektrum beobachten, die einer Geschwindigkeit von 10000 km/sec entspräche. Tatsächlich beobachtet man in den Sternspektren

auch eine Rotverschiebung, aber sie ist nicht größer als 100 km/sec. Danach können die Massen der Zentralsterne in Wirklichkeit nicht über das Zehnfache der Sonnenmasse hinausgehen.

Wir kommen also zu dem Schluß, daß der Druck der $L\alpha$-Strahlung in den Nebeln eine weitaus größere Rolle spielt als die Gravitation des Zentralsterns. Besonders groß muß der Strahlungsdruck an den Nebelgrenzen sein, und zwar bei einem ruhenden Nebel an der äußeren Begrenzung, wo er nach außen gerichtet, und bei einem expandierenden an der Innengrenze, wo er auf den Stern zu gerichtet ist. Im letzteren Falle muß der Strahlungsdruck die inneren Teile des Nebels bremsen. Die Größe dieses Effekts kann man berechnen. Die Bremsung erreicht einen Wert von 3 km/sec im Jahrhundert.

Die erhaltenen Resultate beziehen sich jedoch nur auf einen ruhenden Nebel oder einen Nebel, der ohne Geschwindigkeitsgradienten expandiert. Täte er letzteres wirklich zu einem gegebenen Zeitpunkt, so würde der Strahlungsdruck allmählich zu Unterschieden in der Expansionsgeschwindigkeit führen. In Wirklichkeit ist es daher notwendig, das $L\alpha$-Strahlungsfeld in einem Nebel zu betrachten, der mit einem Geschwindigkeitsgradienten expandiert.

Es ist klar, daß das Auftreten eines Geschwindigkeitsgradienten im Nebel zu einer Verringerung der Dichte der $L\alpha$-Strahlung führen muß. In Nebeln mit Geschwindigkeitsgradienten haben nämlich die Lichtquanten die Möglichkeit, nicht nur aus den Grenzgebieten zu entweichen, sondern infolge des DOPPLER-Effekts auch aus inneren Bereichen. Um dies verständlich zu machen, nehmen wir an, daß die äußeren Teile eines Nebels schneller expandieren als die inneren, und betrachten ein Atom, das sich in den mittleren Bereichen des Nebels aufhält und eine große Komponente der thermischen Geschwindigkeit senkrecht zur Schicht besitzt. Die Lichtquanten, die von diesem Atom in der seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung ausgestrahlt werden, können praktisch im Nebel nicht absorbiert werden. Das Atom wird jedoch von allen Seiten ungefähr ebensoviel Quanten absorbieren wie andere Atome auch. Es werden also $L\alpha$-Quanten, unabhängig davon, wo sie sich befinden, mit einer beträchtlichen Wahrscheinlichkeit den Nebel verlassen, wenn sie durch schnell fliegende Atome gestreut werden.

Eine eingehende Untersuchung des $L\alpha$-Strahlungsfeldes in einem Nebel, der mit einem Geschwindigkeitsgradienten expandiert, wurde von W. W. SOBOLEW [47] durchgeführt. Er zeigte, daß sogar ein geringer Geschwindigkeitsgradient zu einer sehr starken Verminderung der Dichte und des Stromes der $L\alpha$-Strahlung führt. Man muß daher annehmen, daß in realen Nebeln der Druck der $L\alpha$-Strahlung der Größenordnung nach der Anziehung durch den Zentralstern gleichkommt.

4. Das Problem des Ursprungs der planetarischen Nebel

Die oben gebrachten Ergebnisse der Erforschung der planetarischen Nebel legen die Annahme nahe, daß zwischen Nebel und Zentralstern ein genetischer Zusammenhang besteht. Am natürlichsten ist die Erklärung, daß die Nebel

Reste der Materie sind, die irgendwann einmal aus dem Zentralstern ausgeschleudert wurde. Zugunsten dieser Vermutung spricht vor allem die Tatsache der Expansion der planetarischen Nebel. Auch die Resultate der Massenbestimmungen der Nebel bekräftigen diese Hypothese. Wäre die Masse der Nebel größer als die Masse ihrer Zentralsterne, so läge ein Widerspruch vor. Wir wissen jedoch, daß die Nebelmassen nicht $^1/_{10}$ der Sonnenmasse übertreffen.

Es ist noch gar nicht lange her, daß man sich die Entstehung der planetarischen Nebel durch Supernovaausbrüche dachte. Wie wir im weiteren sehen werden, wird bei einer derartigen Katastrophe Materie, die mengenmäßig etwa der Sonnenmasse gleichkommt, ausgeschleudert, also durchaus genug zur Bildung eines planetarischen Nebels. Man mußte jedoch diese Entstehungshypothese wieder fallen lassen. Einer der Einwände, die man ihr gegenüber machen kann, sind die Expansionsgeschwindigkeiten der Nebel. Es ist bekannt, daß diese Geschwindigkeiten sehr klein sind – sie betragen etwa 10–20 km/sec – während bei Supernovaausbrüchen die Materie mit Geschwindigkeiten von einigen 1000 km/sec ausgestoßen wird. Diesen Geschwindigkeitsunterschied kann man nicht mit einer Bremsung durch Gravitation erklären; andere verzögernde Kräfte können wir aber nicht aufweisen. Insbesondere kommt auch nicht der Strahlungsdruck in der Linie $L\alpha$ hierfür in Frage, denn wie wir oben gesehen haben, verursacht dieser einen Geschwindigkeitsgradienten, und dadurch wird der Strahlungsdruck abgeschwächt.

Gegen die erwähnte Hypothese sprechen auch die Beobachtungsbefunde am Krebsnebel. Es ist kaum daran zu zweifeln, daß er bei dem Supernovaausbruch im Jahre 1054 u.Z. entstanden ist. Dieser Nebel hat jedoch heute, d.h. 900 Jahre nach dem Ausbruch, eine Expansionsgeschwindigkeit von 1300 km/sec, und es läßt sich nachweisen, daß er keine wesentliche Bremsung erfährt. Außerdem ist der Krebsnebel seiner äußeren Gestalt nach ganz unähnlich den planetarischen Nebeln.

Schließlich sprechen auch statistische Überlegungen gegen die Hypothese des Ursprungs planetarischer Nebel durch Supernovaausbrüche. Die Statistik zeigt, daß sich Supernovaausbrüche viel zu selten ereignen, um die Zahl der zu beobachtenden planetarischen Nebel decken zu können. Wir sehen rund 300 Nebel, die der Sonne relativ nahe liegen. Durch Extrapolation erhalten wir in der ganzen Galaxis etwa 10000 Nebel. Die Radien der Nebel gehen nicht über 1 parsec, d.h. $3 \cdot 10^{18}$ cm, hinaus. Das bedeutet, daß Nebel mit größeren Abmessungen aufhören, sichtbar zu sein. Dehnt sich ein Nebel mit der Geschwindigkeit von 10 km/sec aus, so wächst sein Radius in einem Jahr um $3 \cdot 10^{13}$ cm. Dann beträgt die Lebensdauer eines Nebels 10^5 Jahre. Besteht ein Nebel also 10^5 Jahre und ist die Gesamtzahl der Nebel im Milchstraßensystem gleich 10^4, so müßte alle 10 Jahre ein Nebel entstehen. Supernovae sind aber weitaus seltener, als eine in 10 Jahren. In unserem Milchstraßensystem wurden in den letzten 1000 Jahren insgesamt 3 Supernovae beobachtet. In anderen Spiralnebeln kommen im Mittel 2 in 1000 Jahren vor. Auch eine Präzisierung der Ausgangsdaten kann kaum zur Beseitigung der erhaltenen Widersprüche führen.

Die Möglichkeit der Entstehung planetarischer Nebel beim Aufleuchten gewöhnlicher Novae scheidet aus dem Grunde aus, weil die Massen der Nebel-

hüllen, die die Novae ausstoßen, sehr klein sind (nicht mehr als $10^{-4}\ M_{\odot}$) und die Expansionsgeschwindigkeiten relativ groß (etwa einige 100 km/sec). Allerdings kommen Novaausbrüche ziemlich häufig vor, im Milchstraßensystem etwa 30 im Jahr. Zur Erklärung der Zahl der vorhandenen planetarischen Nebel würde es daher genügen, daß nur ein Ausbruch von dreihundert zur Bildung eines Nebels führt. Es wäre z.B. möglich, daß die planetarischen Nebel beim Ausbruch besonderer „mittlerer" Novae entstehen oder bei mehrfachen Ausbrüchen in Gebieten des Milchstraßensystems mit einer erhöhten Dichte des interstellaren Gases, das die ausgestoßene Hülle bremst. Man kann jedoch heute am richtigsten sagen, daß die Frage nach dem Ursprung der planetarischen Nebel noch weit von ihrer Lösung entfernt ist.

KAPITEL V

Neue Sterne

§ 26. Das Aufleuchten neuer Sterne und seine Deutung

1. Beobachtungsdaten

Bekanntlich versteht man unter *neuen Sternen* (*Novae*) solche Sterne, deren Helligkeit plötzlich auf das Tausend- und Zehntausendfache zunimmt, um dann langsam abzufallen. Das „Aufflammen" einer Nova erfolgt im allgemeinen innerhalb einiger Tage, das „Erlöschen" im Laufe einiger Jahre. Schließlich kehrt der Stern zu einer Helligkeit zurück, die sich wenig von der vor dem Ausbruch unterscheidet. Zur Zeit des Helligkeitsmaximums beträgt die absolute Helligkeit neuer Sterne im Mittel -6^m. In ihrem gewöhnlichen Zustand, d.h. bis zum Ausbruch und viele Jahre danach, haben die Novae eine absolute Helligkeit von etwa $+5^m$ (mit ziemlich großer Streuung). Danach beträgt die mittlere Amplitude der Helligkeitsänderung der Novae 11^m. Die Beobachtungsdaten für einige Novae finden sich in nachstehender Tabelle 20.

Tabelle 20

Stern	Amplitude der Helligkeit	abs. Helligkeit im Maximum	Entfernung in parsec	Verschiebung der Absorptionslinien in km/sec
Nova Aurigae 1891	9^m	$-5{,}3^m$	800	—
Nova Persei 1901......	13	$-8{,}4$	480	700
Nova Aquilae 1918	12	$-9{,}3$	430	1300
Nova Cygni 1920	13,5	$-8{,}9$	1470	400
Nova Pictoris 1925	12	$-7{,}3$	500	70
Nova Herculis 1934....	13	$-5{,}5$	230	170
Nova Lacertae 1936 ...	13	$-8{,}6$	1350	1300
Nova Puppis 1942	16,5	$-8{,}0$	500	1100

Zusammen mit der Helligkeitsänderung der neuen Sterne findet auch eine enorme Änderung ihrer Spektren statt. Kurz etwas über die spektroskopische Geschichte der Novae.

Beobachtungen des Spektrums neuer Sterne vor dem Aufleuchten sind in keinem Falle vorhanden, da die Praenovae schwache und durch nichts auffällige Sterne sind. Eine Ausnahme stellt lediglich das Spektrum der Novae Aquilae 1918 dar, das sich auf einer Objektivprismenaufnahme fand. Aus diesem Spektrum waren aber keine bestimmten Schlüsse zu ziehen. Auch aus der Epoche vom Aufleuchten bis zum Helligkeitsmaximum sind Spektren der neuen Sterne nur schlecht bekannt, da sich das „Aufflammen" der Novae mit großer Schnelligkeit vollzieht. Nur in einigen Fällen ist es gelungen, Spektrogramme einige Stunden vor dem Maximum aufzunehmen und für einige sogenannte „langsame" Novae sogar einige Tage davor. Diese Spektrogramme zeigen, daß auf dem ansteigenden Ast der Lichtkurve, kurz vor dem Maximum, die neuen Sterne ein gewöhnliches A- oder F-Spektrum besitzen. Das Charakteristische an diesen Spektren ist die Violettverschiebung aller Linien um eine Größe, die einer Geschwindigkeit bis zu einigen Hundert Kilometern pro Sekunde entspricht. Diese Linienverschiebungen finden sich für einzelne Novae in der letzten Spalte der Tabelle 20.

Gleich nach Erreichen des Maximums erscheinen an der „roten" Seite der Absorptionslinien breite helle Bänder, die annähernd symmetrisch zu den zentralen Frequenzen liegen. Dieses Emissionsspektrum entspricht zunächst dem Typ A und geht dann in Typ B über. Gleichzeitig damit ändert sich auch die Struktur der Emissionsbänder. An ihrer „violetten" Seite erscheinen neue Absorptionslinien. Bei weiterer Helligkeitsabnahme des Sterns werden dann das kontinuierliche Spektrum und die Absorptionslinien schwächer, das Emissionsspektrum geht vom Typ B in Typ O über.

Einige Monate nach dem Aufleuchten erscheinen im Nova-Spektrum verbotene Emissionslinien, wie sie für das Spektrum von Gasnebeln charakteristisch sind (darunter auch die Linien N_1 und N_2 des „Nebuliums"). Mit dem Aufleuchten dieser Linien tritt die Nova in das Nebelstadium ihrer Entwicklung ein. Die Nebellinien verschwinden dann, wenn die Nova ihre Ausgangshelligkeit wieder erreicht hat. Das Spektrum des Sterns gehört dann zum Typ der Wolf-Rayet-Sterne. Man nimmt gewöhnlich an, daß das Wolf-Rayet-Stadium das letzte in der Geschichte einer Nova ist. Die Beobachtungen, die man jedoch an einer Reihe von Novae Jahrzehnte hindurch nach ihrem Aufleuchten gemacht hat, zeigen, daß das Spektrum durch ein solches vom Typ O ersetzt wird (bisweilen mit Spuren von Emissionen).

Innerhalb der ersten Jahre nach dem Aufleuchten wird um die Novae ein Nebel sichtbar, welcher der Form nach an planetarische Nebel erinnert. Diese Nebel dehnen sich mit sehr großer Geschwindigkeit aus und verlieren sich dann im Raum. Das Auftreten solcher Nebel läßt keinen Zweifel daran, daß beim Novaausbruch ein Abreißen der äußeren Schichten des Sterns erfolgt. Es wird noch gezeigt, daß die Änderung der Helligkeit und des Spektrums durch die allmähliche Entfernung der sich vom Stern abtrennenden Hülle erklärt wird.

Neben den typischen Novae, die während der ganzen Zeit ihrer Beobachtung nur einmal aufleuchteten, kennen wir auch *wiederkehrende Novae*, die einige Male aufleuchteten. Eine Zusammenstellung der heute bekannten wiederkehrenden Novae findet sich in Tabelle 21.

Tabelle 21

Stern	Jahr des Aufleuchtens	Helligkeitsgrenzen
N Orionis	1677, 1750, 1892	$6^m - > 11^m$
T Pyxidis	1890, 1902, 1920, 1941	6 — 14
U Scorpii	1863, 1906, 1935	9 — > 17
RS Ophiuchi	1898, 1933	4 — 12
T Coronae borealis	1866, 1946	2 — 11
N Sagittae	1913, 1946	7 — 15
N Sagittarii	1901?, 1919	< 7 — 14

Das Aufleuchten der wiederkehrenden Novae ist dem der typischen ganz analog, unterscheidet sich jedoch durch den kleineren Maßstab. Dies legt die Annahme nahe, daß auch die typischen Novae viele Male aufleuchten, daß jedoch das Zeitintervall zwischen den Ausbrüchen wesentlich größer als die Beobachtungsperiode ist. Diese Vermutung wird durch die statistischen Untersuchungen der Moskauer Astronomen B. W. Kukarkin und P. P. Parenago bestätigt. Der Vergleich der Zeitintervalle zwischen den Ausbrüchen mit den Amplituden der Helligkeitsänderung von wiederkehrenden Novae und novaähnlichen veränderlichen Sternen führte die genannten Autoren zu folgendem Schluß: je größer die ersten, desto größer auch die zweiten. Kukarkin und Parenago extrapolierten die gefundene Abhängigkeit auf die typischen Novae und fanden, daß bei einer Helligkeitsänderung von etwa 11^m der Zeitraum zwischen den Ausbrüchen etwa 3000 Jahre betragen müßte.

Von besonderem Interesse sind die Spektren der wiederkehrenden Novae in der Zeit zwischen den Ausbrüchen, d.h. im Normalzustand dieser Sterne (die Dauer eines Ausbruchs ist wesentlich kürzer als die zwischen den Ausbrüchen liegende Zeit). Leider liegen erst wenig derartige Beobachtungen vor. Trotzdem kann man behaupten, daß in der Zeit zwischen den Ausbrüchen die wiederkehrenden Novae sehr heiße Sterne sind, deren Spektren zuweilen Emissionslinien aufweisen. Wichtig ist, daß sich die Spektren der wiederkehrenden Novae vor und nach dem Helligkeitsausbruch nicht wesentlich voneinander unterscheiden. Da die typischen Novae sich im Prinzip von den wiederkehrenden Novae nicht unterscheiden, kann dieser Schluß auf sie ausgedehnt werden. Die Spektren der typischen neuen Sterne sollten also bis zum Aufleuchten vom selben Typ sein wie viele Jahre nach dem Ausbruch, d.h. zur Klasse der O-Spektren gehören. Diese Schlußfolgerung soll darum besonders hervorgehoben werden, weil man bis vor gar nicht langer Zeit annahm, daß die Praenovae kühlere Sterne vom Spektraltyp A seien.

An die wiederkehrenden Novae schließen sich eng die novaähnlichen veränderlichen Sterne an, die in ihrer Helligkeits- und spektralen Änderung an die Novae erinnern. Die novaähnlichen Veränderlichen unterscheiden sich von den wiederkehrenden Novae jedoch nicht nur durch den kleineren Maßstab der Er-

scheinungen, die für Novaausbrüche charakteristisch sind, sondern auch dadurch, daß diese weniger ausgeprägt auftreten. Zu den novaähnlichen Veränderlichen gehören Sterne vom Typ U Geminorum, Z Andromedae u.a.

Weit grandiosere Katastrophen als bei den typischen Novae vollziehen sich beim Aufleuchten von Supernovae. Die absoluten Helligkeiten der Supernovae erreichen im Maximum Werte von -15^m. Die Amplituden übersteigen augenscheinlich 20 Größenklassen. Das Aufleuchten einer Supernova ist eine sehr seltene Erscheinung. Innerhalb der letzten 1000 Jahre sind in unserem Milchstraßensystem insgesamt 3 Supernovae aufgeleuchtet. Im Jahre 1054 u.Z. im Sternbild Stier, im Jahre 1572 in der Cassiopeia und im Jahre 1604 im Ophiuchus. An der Stelle der Supernova vom Jahre 1054 beobachtet man heute den Krebsnebel als ein Überbleibsel dieses Ausbruchs. Die enorme Leuchtkraft einer Supernova in ihrem Helligkeitsmaximum, die mit der Helligkeit eines ganzen Spiralnebels vergleichbar wird, ermöglicht ohne besondere Schwierigkeiten die Entdeckung von Supernovae in anderen Galaxien. Die Spektren der Supernovae zeigen ein Kontinuum, dem Emissionsbänder überlagert sind, deren Breite einer Radialgeschwindigkeit von der Größenordnung 1000 km/sec entspricht. Die Identifizierung der Bänder wird jedoch wegen der Kompliziertheit der Spektren sehr unsicher.

Alle oben behandelten „aufleuchtenden" Sterne kann man also in folgende vier Gruppen einteilen: Supernovae, typische Novae, wiederkehrende Novae und novaähnliche Veränderliche. Die Größe des Helligkeitsausbruchs ist bei jeder der Gruppen geringer als bei der vorangegangenen. Wir werden uns im folgenden hauptsächlich mit den typischen neuen Sternen beschäftigen.

2. Die Erklärung des Aufleuchtens

Um das Aufleuchten neuer Sterne zu erklären, wurden viele Hypothesen entwickelt. Die richtige Lösung des Problems – das Abwerfen einer Hülle durch den Stern – wurde erst vor etwa 25 Jahren gefunden. Wir wollen jetzt zeigen, daß das Fortschleudern einer Hülle durch den Stern eine solche Änderung in seiner Helligkeit und seinem Spektrum, wie sie tatsächlich beobachtet wird, hervorrufen muß.

Zum Zeitpunkt des Aufleuchtens möge vom Stern eine Gashülle, deren optische Dicke im kontinuierlichen Spektrum groß gegen 1 ist, abgestoßen werden. Mit der Expansion dieser Hülle nimmt ihre optische Dicke ab. Bis zu dem Zeitpunkt jedoch, wo die optische Dicke noch nicht von der Größenordnung 1 wird, dient diese Hülle nicht nur als umkehrende Schicht, sondern auch als Photosphäre. Dann muß aber bei annähernd gleichbleibender Oberflächentemperatur die Ausdehnung der Hülle zu einem Anwachsen der Sternhelligkeit führen. Infolge der Annäherung an den Beobachter erfahren die Absorptionslinien, die in dem ihm zugekehrten Teil der Hülle entstehen, eine Violettverschiebung Dieses Spektrum wird auf dem ansteigenden Ast der Lichtkurve einer Nova beobachtet.

Im Helligkeitsmaximum wird die optische Dicke der Hülle im kontinuierlichen Spektrum von der Größenordnung 1. Dann beginnt die direkt vom

Stern kommende Strahlung bis zu den äußersten Schichten der Hülle vorzudringen, und es leuchten Emissionslinien auf. Das Auftreten von Emissionslinien hat dieselbe Ursache wie bei Gasnebeln, nämlich die Fluoreszenz. Die Strahlung in diesen Linien gelangt jetzt nicht nur aus den dem Beobachter nächsten Schichten zu ihm, sondern auch von weiter entfernten. Sie wird wegen des DOPPLER-Effekts nicht in der Hülle absorbiert. Die Breite der Emissionslinien entspricht daher der doppelten Expansionsgeschwindigkeit der Gashülle. An der violetten Seite einer Emissionslinie beobachtet man eine Absorptionslinie, die in dem Teil der expandierenden Hülle entsteht, der dem Beobachter zugekehrt ist und den Stern gewissermaßen abschirmt. Das Schema des Entstehens von Spektrallinien in der expandierenden Gashülle einer Nova finden wir in Abb. 62.

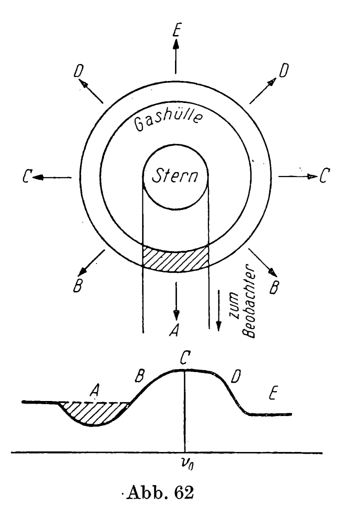


Abb. 62

Nach dem Maximum der Helligkeit nimmt mit der weiteren Expansion der Hülle die optische Dicke in den Spektrallinien ab. Demzufolge werden die dunklen Begleiter der Emissionslinien schwächer und verschwinden schließlich. Gleichzeitig wächst der Anregungs- und Ionisationsgrad der Atome in der Nebelhülle, wodurch der Spektraltyp nach der Zusammensetzung der zu beobachtenden Linien von A in B und danach in O übergeht. Zu einem gewissen Zeitpunkt sind dann in der Hülle die für das Erscheinen von verbotenen Linien notwendigen Bedingungen geschaffen, d.h. die Materie- und die Strahlungsdichte sind hinreichend klein geworden. Mit dem Auftreten verbotener Linien beginnt das Nebelstadium der Nova, das so lange andauert, wie die Helligkeit der sich zerstreuenden Hülle nicht kleiner als die Helligkeit des Sterns selbst ist. Das Spektrum der Nova, das zu dieser Zeit zum WOLF-RAYET-Typ gehört, zeigt, daß noch immer Materie vom Stern ausgeworfen wird. Wenn dieser Prozeß beendet ist, geht das Sternspektrum zu einem O-Spektrum ohne Emissionslinien über.

Es ist verständlich, daß die kontinuierliche Emission von Materie aus dem Stern gleich nach dem Abstoßen der Hülle beginnt. In einigen Fällen werden vom Stern mehrere Hüllen abgestoßen, was zum Auftreten sekundärer Maxima auf dem absteigenden Ast der Helligkeitskurve einer Nova und ebenso zum Auftreten zusätzlicher Systeme von Absorptionslinien führt. Der Prozeß der kontinuierlichen Materieemission aus dem Stern, der nach dem Abstoßen der Gashülle beginnt, erklärt auch eine Reihe weiterer Eigenarten des Novaspektrums.

Die dargelegten Deutungen der Erscheinungen, die beim Aufleuchten eines neuen Sterns auftreten, stehen in großen Zügen gut mit den beobachteten Ent-

wicklungsstadien einer Nova in Einklang. Unlängst kam jedoch E. R. MUSTEL, der die Beobachtungsbefunde aus der Epoche um das Helligkeitsmaximum eingehend untersuchte, zu dem Schluß, daß man in der Frage nach dem Abstoßen der Hülle zwei Standpunkte einnehmen kann (Hypothese A und B).

Nach der Hypothese A, die schon oben dargelegt wurde, vollzieht sich die Ablösung der Hülle vom Stern zum Zeitpunkt des Aufleuchtens. Zunächst ist die optische Dicke der Hülle im kontinuierlichen Spektrum groß gegen 1, dann nimmt sie ab und wird zur Zeit des Helligkeitsmaximums größenordnungsmäßig 1 (dadurch ist das Maximum ja überhaupt bedingt).

Nach der Hypothese B beginnt zur Zeit des Aufleuchtens eine Expansion des ganzen Sterns. Im Helligkeitsmaximum löst sich vom Stern die Hülle ab, und der Stern selbst beginnt zu kontrahieren, wodurch auch seine Helligkeit abnimmt. Die optische Dicke der abgestoßenen Hülle im kontinuierlichen Spektrum ist zu Beginn des Prozesses kleiner als 1; mit anderen Worten, die Abstoßung der Hülle vollzieht sich im Innern der umkehrenden Schicht des Sterns. E. R. MUSTEL bringt in seinen Arbeiten[1]) mehrere Einwände gegen die Hypothese A zugunsten der Hypothese B. Es würde jedoch über den Rahmen dieses Lehrbuchs hinausführen, näher auf diese wichtigen Arbeiten einzugehen. Es soll nur noch erwähnt werden, daß für die Zeiten, die weit vom Helligkeitsmaximum entfernt sind, praktisch kein Unterschied zwischen den beiden Hypothesen A und B besteht.

Die dargelegte Deutung des Aufleuchtens neuer Sterne ermöglicht, einfache Methoden zur Bestimmung ihrer Parallaxen anzugeben. Diese sind darum um so bedeutungsvoller, als trigonometrische Parallaxen für die Novae wegen ihrer geringen Größe nicht zu erhalten sind.

Eine der Methoden zur Bestimmung der Parallaxe einer Nova, die jedoch nicht sehr genau ist, beruht auf der Gegenüberstellung der Verschiebung der Absorptionslinien und der Geschwindigkeit der Helligkeitszunahme vor dem Maximum. Aus der Beobachtung kennt man für zwei Zeiten t_1 und t_2 die scheinbaren Helligkeiten m_1 und m_2 sowie die Temperaturen T_1 und T_2 (aus der Spektralklasse) der Nova. Benutzt man die bekannte Formel, die den Zusammenhang zwischen der absoluten Helligkeit des Sterns M, seiner Temperatur T und dem Radius R darstellt,

$$M = \frac{29\,500}{T} - 5 \lg R - 0{,}08\,, \tag{26.1}$$

und die Tatsache, daß die Differenz der scheinbaren Helligkeiten des Sterns gleich der Differenz der absoluten Helligkeiten ist, d. h. $m_2 - m_1 = M_2 - M_1$, so erhalten wir folgenden Ausdruck für das Verhältnis der Sternradien zu den Zeiten t_1 und t_2:

$$\lg \frac{R_2}{R_1} = \frac{5900}{T_2} - \frac{5900}{T_1} - \frac{m_2 - m_1}{5}\,. \tag{26.2}$$

[1]) E. R. MUSTEL, Astr. Journ. 22, 65, 1945; Nachrichten des Krim-Observatoriums IX, 152, 1949 (Э. Р. Мустель, Астрономический журнал 22, 65, 1945; Известия Крымской АО, IX, 152, 1949).

Die Differenz der Sternradien zu den Zeiten t_1 und t_2 beträgt andererseits

$$R_2 - R_1 = v\,(t_2 - t_1)\,, \tag{26.3}$$

worin v die Expansionsgeschwindigkeit der Photosphäre ist, die man aus der Verschiebung der Absorptionslinien findet. Aus den Beziehungen (26.2) und (26.3) lassen sich die Radien R_1 und R_2 einzeln bestimmen. Damit können wir dann aus (26.1) die absolute Helligkeit der Nova ermitteln und durch Vergleich mit ihrer scheinbaren Helligkeit ihre Parallaxe.

Eine andere Methode zur Bestimmung der Parallaxe einer Nova beruht auf der Messung der Expansionsgeschwindigkeit ihrer Hülle. Diese Geschwindigkeit erhält man einmal aus der Breite der Emissionsbänder im Spektrum in km/sec, zum anderen aus der im Winkelmaß gemessenenen Ausdehnung der Nebelhülle. Ein Vergleich beider Größen liefert dann die Parallaxe der Nova. Dieses Verfahren ist genauer als das zuvor beschriebene. In Tabelle 20 sind die Entfernungen und absoluten Helligkeiten im Maximum, wie sie nach dieser Methode bestimmt wurden, für einige Novae aufgeführt.

Auf interessante Weise wurde die Parallaxe der Nova Persei 1901 gefunden. Man beobachtete um diese Nova einen Nebel, der sich so schnell ausdehnte, daß man ihn keinesfalls mit der beim Aufleuchten abgestoßenen Hülle identifizieren konnte. Man mußte vielmehr annehmen, daß die Nova Persei im Innern eines Staubnebels aufgeleuchtet sei und um sich einen leuchtenden Bereich ausbildete, der sich mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnte. Diese Annahme wurde dadurch bestätigt, daß das ein halbes Jahr nach dem Aufleuchten erhaltene Nebelspektrum dasselbe war wie das Spektrum des Sterns zur Zeit des Helligkeitsmaximums.

Die Parallaxe der Nova Persei 1901 konnte also nach der zweiten der oben aufgeführten Methoden bestimmt werden, indem man als „Expansionsgeschwindigkeit" des leuchtenden Teils die Lichtgeschwindigkeit, also 300000 km/sec, einsetzte. In der Folgezeit wurde dann um die Nova Persei ein zweiter Nebel entdeckt, der sich weitaus langsamer als der erste ausdehnte. Das war die „wirkliche" Hülle, die beim Aufleuchten abgestoßen wurde.

3. Die Deutung der Lichtkurve

Wir kommen jetzt zur theoretischen Interpretation der Beobachtungsdaten. Zuerst wollen wir die Lichtkurve einer Nova unter der Voraussetzung, daß sich zur Zeit des Aufleuchtens eine Hülle mit großer optischer Dicke im kontinuierlichen Spektrum vom Stern loslöst (Hypothese A) berechnen. Die ersten, die derartige Berechnungen durchführten, waren V. A. Ambarzumjan und ausführlicher Sch. G. Gordeladse[1]).

Die Struktur der Hülle einer Nova ist sehr kompliziert; in erster Näherung können wir sie jedoch durch eine homogene Kugel mit einheitlicher Temperatur

[1]) Sch. G. Gordeladse, Bulletin des Abastumani-Observatoriums **1**, 55, 1937 (Ш. Г. Горделадзе, Бюллетень Абастуманской обсерватории **1**, 55, 1937).

ersetzen. Die Leuchtkraft einer solchen Kugel ist leicht zu berechnen. Da nach der gemachten Voraussetzung $\varrho = \text{const}$ und $T = \text{const}$ ist, so kann man annehmen, daß auch der Emissionskoeffizient ε und der Absorptionskoeffizient k konstant sind. Die Intensität der Strahlung, die von der Entfernung r vom Mittelpunkt ausgeht (siehe Abb. 63), ist dann gleich

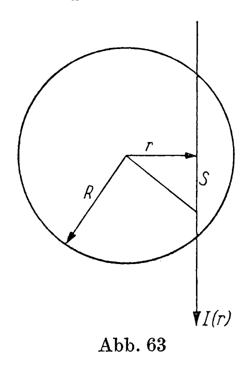


Abb. 63

$$I(r) = \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{+\sqrt{R^2-r^2}} \varepsilon\, e^{-k(\sqrt{R^2-r^2}-s)}\, ds,$$

oder nach Ausführung der Integration

$$I(r) = \frac{\varepsilon}{k}\left(1 - e^{-2k\sqrt{R^2-r^2}}\right). \tag{26.4}$$

Die Gesamtenergie, die von der Kugel ausgestrahlt wird, d. h. also ihre Leuchtkraft L, erhält man aus (26.4) durch Integration über die ganze Scheibe und Multiplikation mit 4π:

$$L = 4\pi \cdot 2\pi \int_0^R I(r)\, r\, dr.$$

Die Integration ergibt

$$L = 4\pi^2 R^2 \frac{\varepsilon}{k}\left[1 + \frac{1}{kR} e^{-kR} - \frac{1}{2k^2R^2}(1 - e^{-2kR})\right].$$

Nehmen wir lokales thermodynamisches Gleichgewicht an, so können wir $\frac{\varepsilon}{k} = B$ setzen, wobei B die Intensität der Strahlung eines absolut schwarzen Körpers bei der gegebenen Temperatur ist. Dabei ist kR nichts anderes als der *optische Radius* der Kugel, den wir mit τ_0 bezeichnen. Damit erhalten wir für L

$$L = 4\pi^2 R^2 B\left[1 + \frac{1}{\tau_0} e^{-2\tau_0} - \frac{1}{2\tau_0^2}(1 - e^{-2\tau_0})\right]. \tag{26.5}$$

Gleichung (26.5) bestimmt die Leuchtkraft einer Kugel in Abhängigkeit vom Radius R und ihrem optischen Radius τ_0. Um eine Beziehung zwischen R und τ_0 aufstellen zu können, müssen wir die Gleichung

$$k = \beta \frac{\varrho^2}{T^{\frac{9}{2}}}$$

für den Volumen-Absorptionskoeffizienten benutzen. Hierin ist β eine Konstante [10, S. 222]. Für τ_0 haben wir dann

$$\tau_0 = kR = \beta \frac{\varrho^2 R}{T^{\frac{9}{2}}},$$

oder, wenn man die Dichte ϱ durch die Masse $\mathfrak{M}$ der Kugel und ihren Radius R ausdrückt,

$$\tau_0 = \frac{9\beta}{16\pi^2} \frac{\mathfrak{M}^2}{T^{\frac{9}{2}} R^5} . \tag{26.6}$$

Setzt man R nach (26.6) in (26.5) ein, so findet man

$$L = 4\pi^2 B \left(\frac{9\beta}{16\pi^2}\right)^{\frac{2}{5}} \frac{\mathfrak{M}^{\frac{4}{5}}}{T^{\frac{9}{5}}} f(\tau_0) , \tag{26.7}$$

mit

$$f(\tau_0) = \tau_0^{-\frac{2}{5}} \left[1 + \frac{1}{\tau_0} e^{-2\tau_0} - \frac{1}{2\tau_0} (1 - e^{-2\tau_0})\right] . \tag{26.8}$$

Gleichung (26.7) für die Leuchtkraft einer Kugel wenden wir jetzt auf die Hülle einer Nova an. Hierbei setzen wir voraus, daß bei der Expansion der Hülle ihre Masse $\mathfrak{M}$ und Temperatur T konstant bleiben. Dann hängt die Leuchtkraft L nur von der einen Veränderlichen τ_0 ab. Zu Beginn des Ausbruchs ist $\tau_0 \gg 1$. Danach wächst R an, und folglich nimmt τ_0 nach (26.6) ab. Bei einem gewissen Wert für τ_0 besitzt die Leuchtkraft L ein Maximum. Es ist leicht zu zeigen, daß das Maximum der Funktion $f(\tau_0)$ für $\tau_0 = 1{,}7$ erreicht ist und der Maximalwert dieser Funktion $f_{\max} = 0{,}84$ beträgt. Wir finden daher für die Leuchtkraft einer Nova im Maximum

$$L_{\max} = 4\pi^2 B \left(\frac{9\beta}{16\pi^2}\right)^{\frac{2}{5}} \frac{0{,}84}{T^{\frac{9}{5}}} \mathfrak{M}^{\frac{4}{5}} . \tag{26.9}$$

Die Leuchtkraft einer Nova ist also bei gegebener Temperatur im Maximum um so höher, je größer die Masse der abgestoßenen Hülle ist. Dieses wichtige Ergebnis werden wir im folgenden zur Bestimmung der Masse der Hülle benutzen.

Gleichung (26.7) schreiben wir jetzt wie folgt um:

$$L = 1{,}2 L_{\max} f(\tau_0) . \tag{26.10}$$

Durch diese Formel ist die Lichtkurve einer Nova bestimmt, wenn man beachtet, daß τ_0 als Funktion von R durch (26.6) gegeben ist und R als Funktion von der Zeit t durch die Beziehung $R = vt$, wobei v die Expansionsgeschwindigkeit der äußeren Grenze der Hülle ist. Aus den Gleichungen (26.5) und (26.6) ist ersichtlich, daß für $\tau_0 \gg 1$ die Leuchtkraft wie R^2 zunimmt und für $\tau_0 \ll 1$ wie R^{-3} abfällt. Dies bedeutet, daß die Zunahme der Leuchtkraft sehr schnell erfolgt, die Abnahme dagegen wesentlich langsamer. Die theoretische Lichtkurve gleicht also in ihrem Charakter der beobachteten.

Ein genauerer Vergleich zeigt jedoch, daß die beobachtete Lichtkurve nach dem Maximum oberhalb der theoretischen liegt. Danach nimmt also die Leuchtkraft einer Nova langsamer ab, als dies aus der Theorie folgt. Die Ursache hierfür ist leicht einzusehen. Zur Herleitung der Gleichung, welche die Leuchtkraft einer Nova bestimmt, wurde vorausgesetzt, daß die Masse des leuchtenden

Gases zeitlich unveränderlich ist. Tatsächlich setzt aber nach der Abstoßung der Haupthülle ein kontinuierlicher Materiestrom aus dem Stern ein. Dieser Prozeß führt zur Entstehung einer ausgedehnten Photosphäre um den Stern, deren Strahlung zu der schwächer werdenden Strahlung der Haupthülle hinzukommt. Würde man diesen Sachverhalt berücksichtigen, so wäre die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung besser.

Trotzdem muß man aber annehmen, daß die Grundvoraussetzungen unserer Theorie (die Konstanz von Dichte und Temperatur in der Hülle, Unveränderlichkeit der Temperatur mit der Zeit, Unabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Frequenz) ziemlich weit von den tatsächlichen Verhältnissen entfernt sind. Daher ist eine Vervollkommnung der Theorie sehr zu wünschen.[1])

4. Die Deutung des Novaspektrums

Wir brachten bereits eine qualitative Erklärung der Novaspektren, die auf der Vorstellung der Expansion einer vom Stern abgestoßenen Hülle beruht. Die quantitative Interpretation der Spektren stößt jedoch wegen ihrer außerordentlichen Kompliziertheit auf große Schwierigkeiten. Eine Ausnahme stellen allerdings die Spektren der Novae im Nebelstadium dar. Für diesen Fall können die Ergebnisse benutzt werden, wie sie für planetarische Nebel erhalten wurden. Die Novaspektren im Nebelstadium wollen wir jetzt betrachten.

Das Nebelstadium einer Nova beginnt dann, wenn die Hülle so weit vom Stern entfernt ist, daß solche Bedingungen vorliegen, wie sie für das Auftreten verbotener Linien notwendig sind. Man kann zeigen, daß die Bedingung für die Strahlungsdichte früher erreicht wird als für die Materiedichte. Daher beginnt das Nebelstadium der Nova zu dem Zeitpunkt, wo die Dichte der freien Elektronen der Hülle so gering geworden ist, daß die spontanen Übergänge in verbotenen Linien ebenso oft vorkommen wie Stöße zweiter Art. Dieser Sachverhalt ermöglicht, die Dichte der freien Elektronen in den Nebelhüllen der Novae für die Zeit des Auftretens verbotener Linien in ihren Spektren abzuschätzen, wenn die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten bekannt sind. Andererseits kann man für denselben Zeitpunkt aus der Expansionsgeschwindigkeit der Hülle und der Zeit, die seit dem Aufleuchten der Nova vergangen ist, das Volumen der Hülle abschätzen. All dies führt zu einer angenäherten Bestimmung der Masse der abgestoßenen Hülle. Sie liegt in der Größenordnung 10^{27}–10^{28} g. Exaktere Methoden zur Bestimmung der Massen von Novahüllen sollen im weiteren beschrieben werden.

Im Nebelstadium läßt sich auch die Elektronentemperatur der Hülle bestimmen. Am einfachsten geschieht dies mit Hilfe der Methode von V. A. Am-

[1]) Die dargelegte Theorie gibt auch eine Antwort auf die Frage, auf Grund welcher Energie die Novahülle strahlt und wie die Energieübertragungen durch diese Hülle vor sich geht. Der Untersuchung dieser Fragen ist eine Arbeit des Verfassers gewidmet (A. P. **31,** 15, 1954). Die darin enthaltenen Schlußfolgerungen über die Änderung des Leuchtens und der Temperatur der Hülle mit der Zeit (und zwar während des Zeitraums vom Beginn des Leuchtens bis zum Erreichen des Leuchtmaximums) stimmen im allgemeinen mit den Beobachtungen überein.

BARZUMJAN, d.h. aus dem Verhältnis der Intensitäten der verbotenen Linien $N_1 + N_2$ und 4363 Å des O III. Wie aus Gleichung (24.13), die das Intensitätsverhältnis der genannten Linien bestimmt, ersichtlich ist, müssen die ersteren immer heller sein als die zweiten. Wir wissen schon, daß dies in planetarischen Nebeln auch tatsächlich der Fall ist. Das analoge Intensitätsverhältnis der Linien $N_1 + N_2$ und 4363 Å wird auch in den Novaspektren beobachtet, wenn die Bedingungen in den Hüllen denen der Nebel ähnlich werden. Die Elektronentemperaturen in den Hüllen sind zu dieser Zeit, ebenso wie bei den Nebeln, von der Größenordnung 6000°–10000°.

Zum Zeitpunkt des Auftretens der Linien $N_1 + N_2$ und 4363 Å in den Spektren der neuen Sterne ist jedoch das Intensitätsverhältnis gerade umgekehrt wie das in den Nebelspektren beobachtete, d.h., die Linie 4363 Å ist heller als die Linien $N_1 + N_2$, was im Widerspruch zur Gleichung (24.13) steht. Die Erklärung für diese Erscheinung liegt in folgendem: Bei der Ableitung der Formel (24.13) wurde vorausgesetzt, daß die Zahl der spontanen Übergänge in den verbotenen Linien weit größer als die Zahl der Stöße zweiter Art ist (was für Nebel und Novahüllen im Spätstadium durchaus gerechtfertigt ist). Zur Zeit des Auftretens verbotener Linien in den Novaspektren jedoch ist die Zahl der Stöße zweiter Art noch mit der Zahl der spontanen Übergänge vergleichbar. Gleichung (24.13) ist deshalb für diesen Zeitpunkt nicht anwendbar und muß durch eine andere ersetzt werden, die sowohl die spontanen Übergänge als auch die Stöße zweiter Art berücksichtigt. Der Einfachheit halber wollen wir den Fall betrachten, wo die Stöße zweiter Art die spontanen Übergänge übertreffen. Dann werden die Übergänge der O III-Ionen aus niedrigen Zuständen in höhere durch Stöße erster Art fast vollständig durch Übergänge aus höheren Zuständen in niedrigere durch Stöße zweiter Art kompensiert. Die Verteilung der O III-Ionen auf die Zustände wird daher nahezu durch die BOLTZMANN-Gleichung für die Temperatur des Elektronengases der Hülle dargestellt. Das Verhältnis der Zahl der O III-Ionen im Zustand $^1S_0$ zur Zahl der O III-Ionen im Zustand $^1D_2$ ist danach

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{g_3}{g_2} e^{-\frac{h\nu_{23}}{kT_e}}.$$

Für das Intensitätsverhältnis der Linien $N_1 + N_2$ und 4363 Å ergibt dies

$$\frac{E_{N_1+N_2}}{E_{\lambda 4363}} = \frac{A_{21}}{A_{32}} \frac{\nu_{12}}{\nu_{23}} \frac{g_2}{g_3} e^{\frac{h\nu_{23}}{kT_e}}. \tag{26.11}$$

Für das O III-Ion übersteigt der Koeffizient A_{32} den Koeffizienten A_{21} um mehr als das Hundertfache, und das Verhältnis $\frac{g_2}{g_3}$ ist gleich 5. Daher wird der Bruch $\frac{E_{N_1+N_2}}{E_{\lambda 4363}}$ im betrachteten Falle größer als 1, wenn $T_e > 10000°$, und kleiner als 1, wenn $T_e < 10000°$ ist. Wie wir wissen, zeigen die Beobachtungen, daß die Linie 4363 Å in der Epoche des Auftretens verbotener Linien heller als die Linien $N_1 + N_2$ ist; daher ist die Elektronentemperatur der Hülle in dieser Epoche relativ hoch.

Da das Leuchten der Hülle einer Nova im Nebelstadium dem Leuchten planetarischer Nebel vollkommen analog ist, läßt sich die Methode von ZANSTRA zur Bestimmung der Sterntemperatur ebenfalls auf die Novae anwenden. Dies geschah erstmalig bei der Nova Aquilae 1918. Aus den He II-Linien ergab sich, daß die Sterntemperatur drei Monate nach dem Aufleuchten 65000° betrug. Später wendete man die Methode von ZANSTRA auch auf Novae in einem früheren Stadium an. Doch sind dann, wenn die Hülle sich nahe am Stern befindet, die Voraussetzungen, die der Methode zugrunde liegen, nur schlecht erfüllt (siehe Kap. VI).

Große Bedeutung haben die Resultate, die man aus der Untersuchung der Konturen der Emissionsbänder in den Novaspektren erhält. Da die Gashülle einer Nova mit sehr großer Geschwindigkeit abgestoßen wird, ist die Kontur eines Emissionsbandes hauptsächlich durch den DOPPLER-Effekt bestimmt. Man kann also aus der Form der Konturen auf die Geschwindigkeitsverteilung in der Hülle schließen. Für die erste Zeit nach dem Helligkeitsmaximum jedoch, wenn die Hülle in den Linien noch nicht durchsichtig ist, ist die Theorie der Emissionsbänder sehr kompliziert. Sie vereinfacht sich wesentlich in der Folgezeit, wenn die die Emissionsbänder begleitenden Absorptionslinien verschwinden. Am gesichertsten ist die Analyse der Konturen der verbotenen Linien, bei denen die Selbstumkehr keine Rolle spielt, da der Absorptionskoeffizient in den verbotenen Linien sehr klein ist.

Wir wollen nun annehmen, daß die Hülle für Strahlung in einer gegebenen Linie durchsichtig ist. Ist die Hülle kugelsymmetrisch und bewegen sich alle ihre Schichten mit gleicher Geschwindigkeit, dann wird die Kontur des Emissionsbandes flach, d.h., die Intensität im Innern des Bandes ist konstant. Bei einer Reihe von Novae haben die Konturen der verbotenen Linien tatsächlich einen derartigen Verlauf, wenigstens in erster Näherung. In anderen Fällen jedoch erscheinen die Bänder in zwei Teile gespalten. Eine solche besonders ausgeprägte Spaltung wurde im Spektrum der Nova Herculis 1934 beobachtet. Diese Spaltung der Emissionsbänder läßt sich nicht durch eine Geschwindigkeitsstreuung erklären. Man muß daher annehmen, daß die Hüllen einiger Novae keine Kugelsymmetrie besitzen, d.h., daß die Materie nicht in allen Richtungen gleichmäßig ausgeschleudert wird.

Im Zusammenhang damit steht die Beobachtung einzelner Verdichtungen in den sich um die Novae ausbreitenden Nebeln, wie sie erstmalig bei der Nova Pictoris 1925 gemacht wurde. Man deutete diese Erscheinung zuerst als eine Teilung des Sterns beim Ausbruch in drei Komponenten. Diese „Komponenten" entfernten sich auf Geraden von einem Punkt aus und wurden allmählich in ihrer Helligkeit schwächer. Auch bei der Nova Herculis 1934 wurde ein halbes Jahr nach dem Aufleuchten eine „Verdoppelung" des Sterns festgestellt. Später gelang es auch, Spektren von jeder dieser „Komponenten" zu erhalten, die für Gasnebel charakteristisch waren. Dieser Befund legte den Schluß nahe, daß beim Aufleuchten einer Nova in Wirklichkeit keine Teilung des Sterns in zwei oder drei Komponenten erfolgt, sondern daß der Stern einige Materieklumpen ausstößt, die unter der Wirkung der Sternstrahlung leuchten. Derartige Materieklumpen, die sich mit verschiedener Radialgeschwindigkeit be-

wegen, erklären ohne weiteres die Spaltung der Emissionsbänder, wie sie auch im Spektrum der Nova Herculis beobachtet wurde.

Wie schon gesagt, wollen wir uns hier nicht eingehender mit den Spektren neuer Sterne in der Periode vom Helligkeitsmaximum bis zum Nebelstadium beschäftigen. Diese Spektren sind sehr kompliziert, und selbst ihre qualitative Deutung stößt auf Schwierigkeiten. Wir erwähnen jedoch, daß heute beim Zustandekommen der Spektren nicht nur der Haupthülle, sondern auch der Materie, die vom Stern nach der Loslösung der Hülle emittiert wird, eine große Rolle zugeschrieben wird und daß als Anregungsmechanismus der Emissionslinien nicht nur die Fluoreszenz angenommen wird, sondern auch Stöße zwischen den einzelnen Teilchen der ausgestoßenen Materie. Wertvolle Resultate bei der Untersuchung von Novaspektren dieser Periode erhielt E. R. Mustel [48], [49], [50].

5. Die Nova Herculis 1934

Das oben entworfene Bild von der Änderung der Helligkeit und des Spektrums ist für die Mehrzahl der Novae charakteristisch, aber nicht für alle. Einige Novae zeigen sehr wesentliche Abweichungen von diesem Bild. Eine von diesen „besonderen" Novae ist die Nova Herculis 1934. Die Lichtkurve dieses Sterns ist in Abb. 64 wiedergegeben. Seine Helligkeit wuchs zunächst von

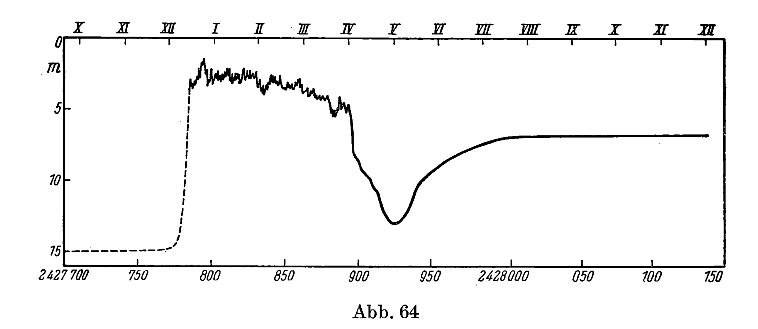


Abb. 64

14^m–15^m auf 1^m3 an (22. Dezember), dann nahm sie im Verlauf dreier Monate langsam ab. Im April 1945 sank die Helligkeit plötzlich auf 13^m1, um darauf wieder bis auf ungefähr 7^m anzusteigen. Danach setzte aufs neue eine langsame Helligkeitsabnahme ein. In der Epoche des langsamen Sinkens der Helligkeit der Nova nach dem Dezembermaximum gehörte ihr Spektrum zum Typ F mit Emissionslinien von H, Fe II, Ca II, u.a. Die Absorptionslinien zeigten eine Violettverschiebung, die einer Geschwindigkeit von rund 400 km/sec entsprach. Nach dem Aprilminimum wurde das Spektrum schon ein typisches Nebelspektrum. Die Intensitätszunahme in den Linien dieses Spektrums bedingte auch das Anwachsen der Helligkeit auf 7^m.

Diese Änderung der Helligkeit und des Spektrums der Nova Herculis läßt sich wie folgt deuten: Im Laufe von mehr als drei Monaten nach dem Aufleuchten der Nova wurden aus dem Stern gewaltige Materiemengen ausgeschleudert, die zur Bildung einer sehr ausgedehnten Hülle um den Stern führten. Die alleräußersten Teile der Hülle leuchteten in dieser Periode jedoch nicht, da die ultraviolette Sternstrahlung nicht bis zu ihnen vordrang. Diese Strahlung wurde in den dem Stern näheren und dichteren Teilen der Hülle absorbiert, die sie im kontinuierlichen Spektrum mit einer Energieverteilung, die einer niedrigeren Temperatur als der Sterntemperatur selbst entsprach, wieder ausstrahlten. Die dem Stern nächsten Schichten der Hülle spielten sozusagen zu dieser Zeit die Rolle einer ausgedehnten Photosphäre. Im April ließ der Materiestrom katastrophal nach, die ausgedehnte Photosphäre zerstreute sich und gab einen sehr heißen Stern (mit einer Temperatur von etwa 70000°) frei. Wegen der Zerstreuung der ausgedehnten Photosphäre nahm die Helligkeit der Nova im sichtbaren Spektralbereich stark ab. In der Folge begannen jedoch die äußersten, verdünnten Schichten der Hülle unter der Einwirkung der ultravioletten Sternstrahlung zu leuchten, ganz analog zum Leuchten planetarischer Nebel, wodurch die Helligkeit der Nova im Sichtbaren wieder wuchs. Diese Helligkeitszunahme der Nova dauerte so lange, wie die Intensität der Emissionslinien im Spektrum der Gashülle nicht im Gleichgewicht mit der ultravioletten Sternstrahlung stand. Die weitere langsame Abnahme der Novahelligkeit beruhte dann auf der allmählichen Zerstreuung der Nebelhülle.

Von besonderem Interesse ist das Leuchten der Hülle der Nova Herculis nach dem Helligkeitsminimum im April. In der theoretischen Astrophysik wird für Sternhüllen im allgemeinen Strahlungsgleichgewicht vorausgesetzt. Selbst in den Fällen, wo sehr rasche Änderungen der physikalischen Bedingungen in den Hüllen vor sich gehen, nimmt man an, daß sich Strahlungsgleichgewicht einstellt; man denkt sich die Entwicklung der Hülle als eine Aufeinanderfolge von Gleichgewichtszuständen. Wir kennen jedoch heute eine Reihe von Beispielen für das Leuchten von Hüllen, in denen kein Strahlungsgleichgewicht herrscht. Eins dieser Beispiele ist auch die Hülle der Nova Herculis nach ihrem Helligkeitsminimum im April. Wir haben schon gesehen, daß die Nebelhülle noch nicht leuchtete, obwohl zum Zeitpunkt des Minimums die Ultraviolettquanten des Sterns bis dorthin vordrangen. Zu dieser Zeit war offensichtlich kein Strahlungsgleichgewicht vorhanden. In der Folgezeit entwickelte sich die Nebelhülle in Richtung eines Strahlungsgleichgewichts. Diesen Prozeß konnte man erst mit Erreichen des sekundären Helligkeitsmaximums als beendet ansehen.

Wir wollen uns nun mit der theoretischen Deutung des Leuchtens der Hülle der Nova Herculis nach dem Helligkeitsminimum im April beschäftigen [51]. Der Einfachheit halber betrachten wir eine Wasserstoffhülle konstanter Dichte. Die Hülle besitze Kugelsymmetrie, wobei ihre Dicke klein gegen ihren Abstand vom Stern sei ($r_2 - r_1 \ll r_1$). Sind nun $n_1(r, t)$ und $n^+(r, t)$ die Zahlen der neutralen und ionisierten Atome pro cm³ im Abstand r vom Stern zur Zeit t, und ist n die Gesamtzahl der Wasserstoffatome in 1 cm³, dann ist

$$n_1(r, t) + n^+(r, t) = n. \qquad (26.12)$$

Im Anfangszeitpunkt, für den wir die plötzliche Vergrößerung der Sterntemperatur annehmen, sind alle Atome der Hülle nicht ionisiert, es ist also $n_1(r, 0) = n$, $n^+(r, 0) = 0$.

Danach erfolgt die Ionisation der Atome durch Absorption von Quanten, die vom Stern jenseits der Grenze der LYMAN-Serie ausgestrahlt werden. Die Zahl dieser Quanten, die auf 1 cm² der Innenfläche der Hülle auftreffen, wollen wir mit H bezeichnen. Ist k der Absorptionskoeffizient pro Atom, so ist die Gesamtzahl der Ionisationen, die in einer Sekunde in 1 cm³ im Abstand r vom Stern zur Zeit t erfolgen, gleich

$$n_1(r, t)\, k H e^{-\tau(r, t)},$$

wobei $\tau(r, t)$ der optische Abstand des gegebenen Volumenelements von der inneren Begrenzung der Hülle ist, d.h.

$$\tau(r, t) = \int_{r_1}^{r} n_1(r, t)\, k\, dr. \tag{26.13}$$

Neben den Ionisationen erfolgen in der Hülle auch umgekehrte Prozesse, d.h. Rekombinationen. Die Zahl der Rekombinationen auf das i-te Niveau pro Sekunde und cm³ im Abstand r vom Stern zur Zeit t ist gleich

$$n_e(r, t)\, n^+(r, t)\, C_{if}(T_e),$$

wobei $n_e(r, t)$ die Zahl der freien Elektronen in 1 cm³ und $C_{if}(T_e)$ die durch (24.14) bestimmte Funktion ist.

Da die Änderung der Ionenzahl gleich der Differenz zwischen der Zahl der Ionisationen und der Zahl der Rekombinationen ist, haben wir

$$\frac{\partial n^+}{\partial t} = n_1 k H e^{-\tau} - n_e n^+ \sum_{i=2}^{\infty} C_{if}. \tag{26.14}$$

In Gleichung (26.14) sind die Rekombinationen auf das erste Niveau und die Ionisationen durch die diffuse Nebelstrahlung nicht berücksichtigt, da diese Prozesse sich gegenseitig kompensieren.

Die Bestimmung der Änderung der Ionenzahl in der Hülle besteht also in der Lösung der Gleichung (26.14) unter Beachtung der Bedingungen (26.12) und (26.13). Der Leser findet diese Lösung in einer Arbeit von W. W. SOBOLEW [51]. Hier wollen wir nur ein Resultat bringen, das wir im folgenden brauchen werden.

Die optische Dicke der Hülle jenseits der Grenze der LYMAN-Serie sei zur Zeit $t = 0$ wesentlich größer als 1, d.h. $\tau(r_2, 0) \gg 1$. Weiter sei die Sternstrahlung so stark, daß sie in der Hülle einen Ionisationsgrad, der wesentlich größer als 1 ist $\left(\frac{n^+}{n_1} \gg 1\right)$, bedingt. Dann kann man in jedem Augenblick die Hülle in zwei Bereiche einteilen, einen „ionisierten" $\left(\frac{n^+}{n_1} \gg 1\right)$ und einen „nichtionisierten" $\left(\frac{n^+}{n_1} \ll 1\right)$. Die Grenze zwischen beiden Bereichen ist sehr scharf, und der

Prozeß der allmählichen Zunahme der Ionisation in der Hülle kann als ein Verschieben dieser Grenze angesehen werden. Die Grenze befindet sich etwa dort, wo im betrachteten Augenblick $\tau \approx 1$ ist (Abb. 65). Dieses Resultat ist durchaus verständlich, denn bis zu dem Zeitpunkt, wo für die betrachtete Schicht $\tau \gg 1$ ist, dringt die ionisierende Sternstrahlung gar nicht bis zu dieser vor. Erst dann, wenn infolge der Ionisierung in dem dem Stern zugewendeten Teil der Hülle die optische Dicke etwa 1 wird, beginnt die Ionisation dieser Schicht.

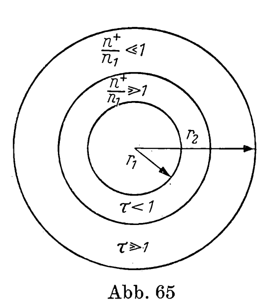


Abb. 65

Mit diesem Resultat läßt sich die zeitliche Änderung der Gesamtzahl der ionisierten Atome in der Hülle, d.h. der Größe

$$N^+ = \int n^+ dV,$$

leicht finden. Wir integrieren auf beiden Seiten der Gleichung (26.14) über das gesamte Hüllenvolumen. Ist H die Gesamtzahl der Quanten, die vom Stern jenseits der Grenze der LYMAN-Serie in einer Sekunde ausgestrahlt werden, so erhalten wir

$$\frac{dN^+}{dt} = \overline{H} - N^+ n \sum_{i=2}^{\infty} C_{if}. \tag{26.15}$$

Dem letzten Glied der Gleichung (26.15) liegt die Beziehung

$$\int n_e n^+ dV = n N^+ \tag{26.16}$$

zugrunde.

Sie folgt daraus, daß im ionisierten Bereich $n_e \approx n$ und im nichtionisierten $n_e \approx 0$ ist.

Die Lösung der Gleichung (26.15), die die Anfangsbedingung $N^+(0) = 0$ befriedigt, hat die Form

$$N^+(t) = \frac{\overline{H}}{n \sum_{i=2}^{\infty} C_{if}} \left(1 - e^{-tn \sum_{i=2}^{\infty} C_{if}}\right). \tag{26.17}$$

Aus dieser Gleichung leitet sich eine sehr wichtige Folgerung ab. Die Zeit

$$t_* = \frac{1}{n \sum_{i=2}^{\infty} C_{if}} \tag{26.18}$$

kann man als Einstellzeit des Strahlungsgleichgewichtes (oder *Relaxationszeit* des betrachteten Prozesses) ansehen. Sie ist um so größer, je geringer die Materiedichte in der Hülle ist.

Zur Abschätzung der Relaxationszeit bemerken wir, daß für Wasserstoff $\sum_{i=2}^{\infty} C_{if} \approx 3 \cdot 10^{-13}$ (für $T_e = 10000°$) ist. Dies bedeutet, daß für $n \approx 10^{10}$ die Re-

laxationszeit in der Größenordnung einiger Minuten liegt. In der Zeit nach dem Helligkeitsmaximum ist in den Novahüllen $n > 10^{10}$. Man kann daher annehmen, daß die Einstellung des Strahlungsgleichgewichts der Änderung der physikalischen Bedingungen sofort folgt. Im Falle der Nova Herculis 1934 jedoch wuchs die Sterntemperatur plötzlich an, als die Materiedichte in der Hülle schon sehr gering war. Daher zog sich die Einstellung des Strahlungsgleichgewichts in der Nova Herculis nahezu über einen Monat hin.

Mit Hilfe der Gleichung (26.17) kann man die Änderung der Gesamtenergie, die von der Hülle in einer beliebigen Spektrallinie ausgestrahlt wird, finden. Die Energie, die von der Hülle in einer Linie der Frequenz ν_{ik} ausgestrahlt wird, beträgt

$$E_{ki} = A_{ki} h \nu_{ik} z_k \int n_e n^+ dV, \tag{26.19}$$

mit $z_k = \frac{n_k}{n_e n^+}$. Unter Benutzung der Gleichungen (26.16) und (26.17) erhalten wir daraus

$$E_{ki} = A_{ki} h \nu_{ik} z_k \frac{\overline{H}}{\sum\limits_{i=2}^{\infty} C_{if}} \left(1 - e^{-tn \sum\limits_{i=2}^{\infty} C_{if}}\right). \tag{26.20}$$

Für Nova Herculis lassen sich die nach Gleichung (26.20) errechneten Werte mit der Beobachtung vergleichen. Es zeigt sich, daß die beobachtete Änderung der Intensität in den Balmer-Linien ziemlich gut durch (26.20) wiedergegeben wird. Man muß dabei eine Atomkonzentration in der Hülle von $n = 3 \cdot 10^6$ annehmen.

§ 27. *Die Bedeutung der Ausstoßung der Hülle in der Entwicklung einer Nova*

1. Die Hüllenmassen

Von großem Interesse ist die Frage nach der Masse der Hülle, die beim Ausbruch einer Nova vom Stern ausgestoßen wird. Man kann erstens aus den Massen der Hüllen auf die Schichten schließen, in denen sich die Loslösung der Hülle vom Stern vollzieht, sowie auf die Kräfte, die zu dieser Ablösung führen.

Es ist jedoch zu bemerken, daß in der Periode der wiederholten Zunahme der Strahlung von Nova Herculis die Intensität der roten Komponente der Emissionslinien langsamer zunimmt als die Intensität der violetten Komponente. Diese Erscheinung kann ebenfalls auf Grund der Leuchthüllenvorstellung beim Fehlen eines Strahlungsgleichgewichts erklärt werden. Hierzu braucht nur angenommen zu werden, daß in den von uns entfernteren und in den näher zu uns liegenden Teilen der Hülle die Substanzdichte verschieden ist. Infolgedessen ist dann auch die Relaxationszeit verschieden. Diese Erklärung befindet sich mit der Tatsache in Übereinstimmung, daß in der Hülle der Nova Herculis zwei Substanzanhäufungen bei Beobachtungen gefunden wurden, von denen eine näher und die andere weiter von uns entfernt ist.

Zweitens gibt uns die Kenntnis der Hüllenmasse einen Hinweis auf die kosmogonische Rolle der Ausbrüche. Ist die Masse der Hülle der Sternmasse vergleichbar, so muß ein Ausbruch eine radikale Änderung des ganzen Sterns herbeiführen. Ist dagegen die Masse der Hülle klein im Vergleich zur Masse des Sterns, so ist die Änderung, die ein Stern durch sein Aufleuchten erfährt, offensichtlich nur auf die Oberflächenschichten beschränkt.

Zur Bestimmung der Hüllenmassen wurden mehrere Methoden vorgeschlagen. Wir wollen hier drei davon bringen.

1. Die Bestimmung der Hüllenmasse aus der Leuchtkraft im Maximum. Diese Methode beruht auf Gleichung (26.9), die wir zur Deutung der Lichtkurve einer Nova aufgestellt hatten. Formel (26.9) bringt zum Ausdruck, daß die Leuchtkraft einer Nova im Maximum um so größer, je größer die Masse der ausgestoßenen Hülle ist. Gehen wir in Gleichung (26.9) von der Leuchtkraft des Sterns zu seiner absoluten Helligkeit über und nehmen T zu 10000° an, so erhalten wir

$$M_{\max} = -17{,}2 - 2 \lg \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot}, \tag{27.1}$$

wobei $\mathfrak{M}_\odot$ die Sonnenmasse bedeutet. Da die absoluten Helligkeiten der Nova im Maximum um -6^m streuen, erhält man aus (27.1) für die Massen der Hüllen größenordnungsmäßig 10^{-6}–$10^{-4}\,\mathfrak{M}_\odot$.

2. Die Bestimmung der Hüllenmasse aus der Leuchtkraft und dem Volumen im Nebelstadium. Im Nebelstadium einer Nova läßt sich die Masse ihrer Hülle genauso wie bei planetarischen Nebeln bestimmen. Sie ist genähert gleich

$$\mathfrak{M} = C\sqrt{LV}, \tag{27.2}$$

worin C eine Konstante, L die Leuchtkraft und V das Hüllenvolumen bedeuten. Die Bestimmung der Massen der Novahüllen nach Formel (27.2) führt ebenfalls auf Werte von 10^{-6}–$10^{-4}\,\mathfrak{M}_\odot$. Für einzelne Novae gibt diese Methode jedoch genauere Ergebnisse als die unter 1. beschriebene.

3. Die Bestimmung der Masse der Hülle aus der Relaxationszeit. Diese Methode läßt sich nur auf solche Novae anwenden, die sich ähnlich wie Nova Herculis 1934 verhalten. Wir haben schon gesehen, daß in diesem Falle das Leuchten der Hülle vor dem sekundären Helligkeitsmaximum nicht im Strahlungsgleichgewicht stattfindet. Aus der Lichtkurve findet man die Einstellzeit für das Strahlungsgleichgewicht (Relaxationszeit) und kann mit Hilfe der Gleichung (26.18) die Dichte der Hülle bestimmen. Andererseits ermöglichen die Geschwindigkeit und die Dauer des Materieausstoßes aus dem Stern eine Abschätzung des Hüllenvolumens. Daraus folgt die Masse der abgestoßenen Hülle.

Um die Schätzung des Hüllenvolumens, die mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist, zu umgehen, kann man folgendermaßen vorgehen. Wir schreiben

Gleichung (26.18) um:

$$t_* n_e \sum_{i=2}^{\infty} C_{if} = 1 .$$

(Hierin haben wir n durch n_e ersetzt, da $n_e = n^+ \approx n$ ist.) Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit n^+ und integrieren über das ganze Hüllenvolumen, so erhalten wir

$$t_* \int n_e n^+ \sum_{i=2}^{\infty} C_{if} dV = \int n^+ dV.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt die Gesamtzahl der Wasserstoffionen in der Hülle dar und das Integral auf der linken Seite die Gesamtzahl der Rekombinationen auf alle Niveaus, angefangen mit dem zweiten. Letztere ist jedoch gleich der Gesamtzahl der Balmer-Quanten, die von der Hülle in einer Sekunde emittiert werden. Demnach haben wir

$$t_* N_{\mathrm{Ba}} = N^+. \tag{27.3}$$

Gleichung (27.3) gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt vor dem sekundären Helligkeitsmaximum. Aus der Relaxationszeit t_* und der Anzahl der von der Hülle ausgestrahlten Balmer-Quanten N_{Ba} liefert sie die Anzahl der Wasserstoffionen N^+ im leuchtenden, d.h. ionisierten Teil der Hülle. Da im ionisierten Bereich $\frac{n^+}{n_1} \gg 1$, ist N^+ fast gleich N, d.h. gleich der Gesamtzahl der Wasserstoffatome in diesem Bereich. Die Ausdehnung des ionisierten Teils der Hülle nimmt mit der Zeit zu und erreicht mit der Einstellung des Strahlungsgleichgewichts ihr Maximum. Die Zahl N, die für diesen Zeitpunkt nach (27.3) bestimmt wurde, hat die Bedeutung entweder der Gesamtzahl der Wasserstoffatome in der Hülle (wenn die Hülle vollständig ionisiert ist) oder der unteren Grenze dieser Zahl (wenn die Hülle nur teilweise ionisiert ist). Für die Nova Herculis 1934 errechnete man aus (27.3) für die Zeit des sekundären Helligkeitsmaximums $N = 1{,}4 \cdot 10^{52}$, was $\mathfrak{M} = m_{\mathrm{H}} N = 2{,}3 \cdot 10^{28}$ g bedeutet.

So sehen wir, daß alle aufgezählten Methoden der Massenbestimmung von Novahüllen auf Werte von der Größenordnung 10^{-6}–10^{-4} Sonnenmassen führen. Die Abweichungen, die man für einzelne Novae nach den verschiedenen Methoden erhält, erklären sich nicht nur aus den Fehlern dieser Methoden, sondern auch dadurch, daß sie auf verschiedene Zeiten angewendet werden. Wir wissen, daß im Laufe der Zeit infolge des kontinuierlichen Materieausstoßes aus dem Stern die Hüllenmasse zunimmt. Die zweite und die dritte der oben gebrachten Methoden müssen daher höhere Werte für die Massen ergeben als die erste.

Man muß jedoch erwähnen, daß keine der aufgezählten Methoden die gesamte Materiemenge erfaßt, die durch einen Novaausbruch emittiert wird, da der Materiestrom auch dann noch anhält, wenn die Nova schon wieder ihre Minimumshelligkeit erreicht hat. Dies können wir aus dem Wolf-Rayet-Spektrum der Nova zu dieser Zeit schließen. Die Dauer dieses Wolf-Rayet-Sta-

diums kann man auf einige zehn Jahre schätzen. Die Materiemenge, die während dieser Zeit vom Stern ausgestoßen wird, erreicht etwa dieselbe Größenordnung wie die, welche die Nova bei dem Ausbruch selbst verliert.

Wir sind also zu dem Ergebnis gelangt, daß die bei einem Novaausbruch ausgestoßene Masse nur ein sehr geringer Teil der Sternmasse ist. Das bedeutet, daß der Ausbruch der Nova nicht von einer wesentlichen Änderung in der Struktur des Sterns begleitet ist. Dies steht auch damit in Einklang, daß einige Novae wiederholt aufleuchten.

Von großer Bedeutung ist auch die Abschätzung der Materiemenge, die bei einem Supernovaausbruch ausgeschleudert wird. Die außerordentlich große Helligkeit der Supernovae im Maximum zwingt zu der Annahme, daß die von Supernovae ausgestoßene Masse um ein Vielfaches größer ist als die bei einem gewöhnlichen Novaausbruch. Eine gewisse Vorstellung von der Masse der Hülle einer Supernova gibt uns die Gleichung (27.1). Setzt man in sie für die absolute Helligkeit im Maximum den Wert $M_{\max} = -15^{\mathrm{m}}$ ein, so erhält man für die Masse der Hülle einen Wert von $\mathfrak{M} = 0{,}1\ \mathfrak{M}_{\odot}$. Es ist jedoch nicht ohne weiteres sicher, daß man Gleichung (27.1) auch auf Supernovae anwenden kann.

Zuverlässiger ist die Abschätzung der Masse des Krebsnebels, der bekanntlich bei einem Supernovaausbruch im Jahre 1054 ausgeschleudert worden ist, nach Gleichung (27.2). Man muß dabei allerdings beachten, daß sich das Spektrum des Krebsnebels ziemlich stark von den Spektren der planetarischen Nebel und denen der Hüllen der Novae im Nebelstadium unterscheidet. Die Emissionslinien des Wasserstoffs sind in ihm sehr schwach, der kontinuierliche Untergrund ist hingegen intensiv. Demzufolge ist der Wert der Konstanten C ein etwas anderer als bei planetarischen Nebeln. Berücksichtigt man dies, so ergibt sich aus Gleichung (27.2), daß die Masse des Krebsnebels etwa zwei Sonnenmassen ausmacht.

Diese Abschätzung spricht dafür, daß bei einem Supernovaausbruch ein beträchtlicher Teil der Sternmasse ausgestoßen wird.

2. Die Dynamik der Novahüllen

Die Beobachtungen zeigen, daß die Verschiebung der Absorptionslinien in den Spektren der Novae in einigen Fällen merkliche Änderungen erfährt. Diese Tatsache, die als Änderung der Geschwindigkeit der Hülle gedeutet wird, erlaubt eine Beurteilung der auf die Hülle wirkenden Kräfte.

Zuvor ist jedoch zu sagen, daß eine Beschleunigung oder Bremsung der Hülle nicht die einzig mögliche Erklärung dieser beobachteten Änderungen der Verschiebung der Absorptionslinien darstellt. Eine andere Ursache hierfür kann die Änderung des effektiven Niveaus der absorbierenden Materie in einer Hülle mit einem Geschwindigkeitsgradienten sein. Wir wollen beispielsweise annehmen, daß sich die äußeren Schichten der Hülle mit größerer Geschwindigkeit ausdehnen als die inneren. In diesem Falle wird sich, je nach der Zerstreuung der äußeren Schichten, das effektive Niveau der absorbierenden Materie

nach innen verlagern, und die Verschiebung der Absorptionslinien wird sich verkleinern. Ein weiterer Grund für die Änderung der Verschiebung kann auch der Einfluß der Materie sein, die nach dem Helligkeitsmaximum noch aus dem Stern ausgestoßen wird, weil die Geschwindigkeit dieser Materie im allgemeinen nicht mit der der Haupthülle übereinstimmt. Diese Überlegungen nötigen zur Vorsicht hinsichtlich aller Folgerungen, die auf Grund der beobachteten Verschiebungen der Absorptionslinien zur Dynamik der Novahüllen angestellt werden.

In der Zeit vom Aufleuchten der Nova bis zum Helligkeitsmaximum beobachtet man in den Spektren einiger Novae eine Abnahme der Verschiebung der Absorptionslinien. Eine Reihe von Autoren deutet diesen Effekt als eine Bremsung der Hülle infolge der Anziehung durch den Stern, was eine Möglichkeit bietet, die Massen der Novae abzuschätzen. Die vollständigste Untersuchung dieses Problems wurde von E. R. Mustel durchgeführt [49, S. 11].

Er erhielt Massen für eine Anzahl von Novae zwischen 70 $\mathfrak{M}_\odot$ (Nova Cygni 1920) und 1300 $\mathfrak{M}_\odot$ (Nova Aquilae 1918). Derartig große Massen begegnen uns bei keiner anderen der uns bekannten Sternarten. Man könnte sich natürlich vorstellen, daß solche ungewöhnlichen Sterne, wie es die Novae sind, auch ungewöhnlich große Massen besitzen. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß die Verringerung der Absorptionslinienverschiebung teilweise auch durch die oben erwähnte Erscheinung der Verschiebung des effektiven Niveaus der absorbierenden Materie hervorgerufen wird.

Im Zusammenhang mit der Frage nach den Novamassen ist zu erwähnen, daß der Schluß auf die enormen Massenwerte unvermeidlich ist wegen der von E. R. Mustel aufgestellten „Hypothese B“ (siehe § 26). Wie wir schon wissen, beginnt nach dieser Hypothese zur Zeit des Aufleuchtens eine Expansion des ganzen Sterns, und im Helligkeitsmaximum lösen sich seine äußeren Schichten ab; die Photosphäre verbleibt dabei beim Stern. Demzufolge muß zur Zeit des Helligkeitsmaximums die Expansionsgeschwindigkeit der Photosphäre kleiner sein als die parabolische Geschwindigkeit in einem Abstand vom Mittelpunkt des Sterns, der gleich dem Radius der Photosphäre zu dieser Zeit ist. Es muß, mit anderen Worten, die Ungleichung

$$v_p < \sqrt{2\frac{G\mathfrak{M}_*}{r_p}}$$

gelten, woraus

$$\mathfrak{M}_* > \frac{v_p^2 r_p}{2G} \tag{27.4}$$

folgt.

Bestimmt man v_p und r_p nach derselben Methode wie zur Berechnung der Parallaxe einer Nova, so erhält man aus der Ungleichung (27.4) die untere Grenze der Sternmasse. E. R. Mustel fand durch (27.4) für die Novamassen dieselben großen Werte wie auch aus der Abnahme der Verschiebung der Absorptionslinien. Für die Nova Aquilae 1918 ergab sich zum Beispiel eine Masse von 1700 $\mathfrak{M}_\odot$.

Den schwerwiegendsten Einwand gegen die großen Novamassen führt E. R. MUSTEL selber an. Bekanntlich besitzen die Novae in der Epoche der minimalen Helligkeit einen sehr kleinen Radius (von der Größenordnung 0,1 Sonnenradien). Man müßte daher bei so großen Massen in den Novaspektren eine „Rotverschiebung" beobachten. Dies ist jedoch nicht der Fall. Die außerordentlich wichtige Frage nach den Novamassen muß also heute noch als offen angesehen werden.[1])

Unmittelbar nach dem Helligkeitsmaximum nimmt die Verschiebung der Absorptionslinien in den Novaspektren stark zu (zum Beispiel von 70 auf 285 km/sec im Spektrum der Nova Pictoris 1925). Zunächst erscheinen neben den Linien, die bis zum Helligkeitsmaximum beobachtet werden, neue, relativ zu den vorigen nach Violett verschobene Linien. Allmählich wächst die Intensität der neuen Linien, während die der früheren abnimmt, bis sie schließlich fast ganz verschwinden. Es entsteht der Eindruck, als ob das zweite Spektrum auf Kosten des ersten entsteht. E. R. MUSTEL deutet diese Umwandlung des einen Spektrums in das andere durch die Wirkung des selektiven Strahlungsdrucks. Nach E. R. MUSTELS Meinung beginnt gleich nach dem Helligkeitsmaximum eine Absorption der Photosphärenstrahlung durch die Atome der dem Stern nächsten Schichten der Hülle in den Spektrallinien, was eine Vergrößerung der Geschwindigkeit dieser Atome zur Folge hat. Infolge des DOPPLER-Effekts werden aber die dem Stern nächsten Schichten der Hülle für die Photosphärenstrahlung dieser Frequenzen durchsichtig, und die Photosphärenstrahlung wird dann durch die Atome der nächstfolgenden Schichten der Hülle absorbiert. Dieser Prozeß setzt sich so lange fort, bis die ganze Hülle keine größere Geschwindigkeit mehr gewinnt. Zur Deutung der Vergrößerung der Verschiebung der Absorptionslinien in den Novaspektren nach dem Helligkeitsmaximum wurden noch andere Hypothesen vorgeschlagen, doch besitzt die von E. R. MUSTEL aufgestellte die größte Wahrscheinlichkeit.

Zweifellos spielen die beiden oben erwähnten Kräfte – die Anziehung des Sterns und der Strahlungsdruck – eine große Rolle in der Dynamik einer Novahülle, solange sich diese nahe am Stern befindet. In einem späteren Stadium kann die Bremsung der Hülle durch den Widerstand des interstellaren Mediums wichtiger werden. Auf diesen Effekt wollen wir kurz eingehen.

Wir nehmen an, daß die Nova in einem homogenen Medium der Dichte ϱ aufleuchtete. Mit zunehmender Ausdehnung der Hülle werden die Teilchen des interstellaren Mediums in sie eindringen, und die Masse der Hülle wird zunehmen. War zur Zeit des Aufleuchtens die Masse der Hülle gleich $\mathfrak{M}$, so wird sie im Abstand r vom Stern gleich

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho + \mathfrak{M}.$$

---

[1]) In der letzten Zeit wurde gezeigt, daß die Nova Herculis ein Doppelstern vom Typ Agol ist, dessen Massenkomponente wesentlich kleiner ist als die der Sonnenmasse (M. F. WALKER, P. A. S. P. **66**, 230, 1954; Ap. J. **123**, 68, 1956).

Nach dem Impulserhaltungssatz können wir

$$\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho + \mathfrak{M}\right) v = \mathfrak{M} v_0 \tag{27.5}$$

schreiben, wobei v_0 die Geschwindigkeit der Hülle im Anfangsmoment und v die Geschwindigkeit der Hülle im Abstand r vom Stern ist. Setzt man in Gleichung (27.5) $\frac{dr}{dt}$ an Stelle von v und integriert, so erhält man

$$\frac{1}{3}\pi r^4 \varrho + \mathfrak{M} r = \mathfrak{M} v_0 t, \tag{27.6}$$

wobei t die Zeit ist, die seit dem Aufleuchten vergangen ist. Gleichung (27.6) gibt uns den Radius der Hülle in Abhängigkeit von der Zeit t.

Die zeitliche Änderung der Expansionsgeschwindigkeit der Hülle findet man aus (27.5) und (27.6). Wir suchen beispielsweise die Zeit, in der die Geschwindigkeit um die Hälfte abgenommen hat. Aus (27.5) ergibt sich

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho + \mathfrak{M}}. \tag{27.7}$$

Da v gleich $\frac{1}{2} v_0$ ist, wird dann

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho = \mathfrak{M}. \tag{27.8}$$

Setzen wir (27.8) in (27.6) ein, erhalten wir für die gesuchte Zeit

$$t = \frac{5}{4 v_0}\left(\frac{3\mathfrak{M}}{4\pi\varrho}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{27.9}$$

In Tabelle 22 finden wir die Zeiten, in denen die Expansionsgeschwindigkeit der Hülle auf die Hälfte bzw. auf ein Hundertstel abgenommen hat, sowie die Hüllenradien zu diesen Zeiten. Als Dichte des interstellaren Mediums wurde ein Mittelwert von $\varrho = 3 \cdot 10^{-24}$ g/cm³, für die Anfangsgeschwindigkeit der Hülle $v_0 = 1000$ km/sec angenommen, t und r wurden aus den Gleichungen (27.7) bis (27.9) berechnet. Die Tabelle enthält drei Werte für die Hüllenmassen: 10^{-5}, 10^{-4} und $10\ \mathfrak{M}_\odot$. Die beiden ersten Werte entsprechen den Novahüllen, der letzte den Hüllen von Supernovae.

Wir sehen, daß die Bremsung der Novahüllen nach einigen Jahrzehnten merklich werden müßte. Dies wird jedoch allgemein nicht beobachtet. Die Nova Aquilae 1918 z.B. dehnt sich schon 30 Jahre ohne Verlangsamung aus. Offensichtlich rührt das Fehlen einer merklichen Bremsung in diesem Falle von der

Tabelle 22

	$\mathfrak{M} = 10^{-5}\,\mathfrak{M}_\odot$		$\mathfrak{M} = 10^{-4}\,\mathfrak{M}_\odot$		$\mathfrak{M} = 10\,\mathfrak{M}_\odot$	
	$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{2}$	$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{100}$	$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{2}$	$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{100}$	$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{2}$	$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{100}$
t in Jahren	48	4500	102	9800	4800	450000
r in parsec	0,04	0,18	0,08	0,38	3,8	17,6

relativ großen Masse der Novahülle her ($10^{-4}\,\mathfrak{M}_\odot$). Eine andere mögliche Erklärung besteht darin, daß es der Nova in der Zeit zwischen den Ausbrüchen nicht gelingt, den Bereich zu verlassen, aus dem die interstellare Materie durch den vorangegangenen Ausbruch schon „vertrieben" worden ist.

Wenn der Ausbruch einer Nova an einem Ort mit erhöhter Dichte des interstellaren Mediums stattfindet, wird eine Bremsung der Hülle wahrscheinlicher. In diesem Zusammenhang ist die Nova Persei 1901 von großem Interesse, denn sie leuchtete, wie wir wissen, im Innern eines Staubnebels auf, den sie erhellte. Oort verglich Aufnahmen der Hülle dieser Nova aus den Jahren 1917 und 1934 und entdeckte, daß die Hülle ihre Geschwindigkeit in dieser Zeit verlangsamte und an einigen Stellen sich deformiert hatte. Letzteres deutete er durch die Inhomogenität des Nebels. Interessant ist dabei, daß die deformierten Ränder der Hülle sehr hell sind. Nach der Ansicht von Oort wird dieses Leuchten durch Zusammenstöße der Hüllenatome mit den Staubteilchen des Nebels hervorgerufen. Oort sieht darin eine weitere Bestätigung für die Bremsung der Hülle.

3. Die bei einem Novaausbruch freiwerdende Energie

Im ersten Abschnitt dieses Paragraphen haben wir die Masse bestimmt, die bei einem Novaausbruch ausgestoßen wird. Jetzt wollen wir die hierbei freiwerdende Energie berechnen. Sie setzt sich aus drei Anteilen zusammen:

1. der Strahlungsenergie,
2. der kinetischen Energie der Hülle,
3. der Ablösungsenergie der Hülle vom Stern.

Wir wollen diese drei Anteile gesondert betrachten.

Die Strahlungsenergie ist durch die Gleichung

$$E_{\mathrm{Str}} = \int L(t)\,dt \qquad (27.10)$$

gegeben, wobei $L(t)$ die Leuchtkraft der Nova darstellt und die Integration sich über die ganze Zeitdauer des Ausbruchs erstreckt. Für jede Nova kann das

Integral (27.10) mit Hilfe der Lichtkurve ausgerechnet werden. Es zeigt sich, daß

$$E_{\mathrm{Str}} \approx 10^{45} - 10^{46}\,\mathrm{erg}$$

ist.

Die kinetische Energie der Hülle ist gleich

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}v^2. \tag{27.11}$$

Nimmt man an, daß die Hüllenmassen zwischen 10^{28} und 10^{29} g liegen und ihre Expansionsgeschwindigkeiten von der Größenordnung 1000 km/sec sind, so erhalten wir für $E_{\mathrm{kin}} \approx 10^{44}$–$10^{45}$ erg.

Zur Berechnung der Ablösungsenergie der Hülle vom Stern benutzt man die Gleichung

$$E_{\mathrm{Abst.}} = G\frac{\mathfrak{M}_*\mathfrak{M}}{R}. \tag{27.12}$$

Hierin setzen wir für die Massen der Novae Werte von der Größenordnung einiger Sonnenmassen ein. Der Radius der Nova zur Zeit der Ablösung der Hülle soll gleich dem Radius nach dem Aufleuchten sein, d.h. $R = 0{,}1\ R_{\odot}$. Mit diesen Größen ergibt Gleichung (27.12) $E_{\mathrm{Abst.}} \approx 10^{44}-10^{45}$ erg.

Wir erhalten also für die Gesamtenergie bei einem Novaausbruch 10^{45} bis 10^{46} erg. Eine solche Energiemenge wird von der Sonne in 10^5 bis 10^6 Jahren ausgestrahlt.

Sehr wichtig ist die Frage nach den Schichten, aus denen die freigesetzte Energie eines Novaausbruches stammt. Man kann hier zwei Annahmen machen:

1. Die Energie wird in den tiefsten Schichten des Sterns frei und auf irgendeine Weise nach außen transportiert,

2. die Energie wird in den Oberflächenschichten des Sterns frei, die unmittelbar unterhalb der abgestoßenen Hülle liegen.

Es ist leicht zu zeigen, daß der Energietransport im ersten Falle nicht durch Strahlung erfolgen kann. Wäre dies der Fall, wären nicht weniger als eine Million Jahre erforderlich, bis die Energie durch den ganzen Stern gelangt. Außerdem wäre auch zum Austritt der Energie nach außen eine Zeit von derselben Größenordnung nötig. Demnach würde man eine Explosion, die sich in den zentralen Bereichen des Sterns abspielt, in Form einer sehr geringen Zunahme der Leuchtkraft, die sich über einen enormen Zeitraum erstreckt, beobachten. Die Erscheinungen, die für Novaausbrüche charakteristisch sind, würden also gar nicht auftreten.

Ein anderer Transportmechanismus der Explosionsenergie aus den Tiefen des Sterns nach außen, und zwar die Ausbreitung von Stoßwellen, wurde von L. E. Gurewitsch und A. I. Lebedinski [52] eingehend untersucht. Diese Autoren haben gezeigt, daß der Transport der Explosionsenergie an die Sternoberfläche dann nur 10 Minuten dauern würde. Eine Stoßwelle, die sich in einem Medium mit abnehmender Dichte ausbreitet, bewegt sich be-

schleunigt und kann an der Oberfläche mit einer Geschwindigkeit von einigen 1000 km/sec austreten.

Wahrscheinlicher ist jedoch die zweite der oben erwähnten Hypothesen, nach der die Explosion am Ort der Ablösung der Hülle vom Stern selbst erfolgt. Würden wir die Struktur der Photosphäre des Sterns vor dem Aufleuchten gut kennen, so könnten wir unter Benutzung der bekannten Hüllenmasse die physikalischen Bedingungen am Ort der Ablösung bestimmen. Unser Überblick über den Zustand der neuen Sterne vor dem Aufleuchten reicht leider für solche Rechnungen noch nicht aus.

4. Die Rolle des Helligkeitsausbruchs in der Entwicklung des Sterns

Von Milne wurde die Vermutung ausgesprochen, daß ein Novaausbruch die Umwandlung eines Hauptreihensterns in einen weißen Zwerg darstellt. Begründet wurde diese Annahme damit, daß die Novae nach dem Aufleuchten weiße Zwerge (mit einer absoluten Helligkeit von etwa $+5^{m}$) vom Spektraltyp Wolf-Rayet sind. Wenn sich jedoch bei einem Novaausbruch tatsächlich ein Übergang des Sterns von einer Gleichgewichtskonfiguration (Hauptreihenstern) in eine andere (weißer Zwerg) vollzieht, so müßte dabei eine gewaltige Energie, die gleich dem Unterschied zwischen den Gravitationsenergien beider Konfigurationen ist, frei werden. Größenordnungsmäßig müßte diese Energie gleich

$$\Delta E = G\mathfrak{M}_*^2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \tag{27.13}$$

sein, worin $\mathfrak{M}_*$ die Sternmasse und R_1 bzw. R_2 die Radien vor und nach dem Aufleuchten sind. Bei einer Novamasse von der Größe einiger Sonnenmassen ergibt (27.13) $\Delta E \approx 10^{50}$ erg. Wir sahen inzwischen, daß beim Aufleuchten gewöhnlicher Novae eine Energie von 10^{45}–10^{46} erg frei wird, d. h. 10^4 bis 10^5 mal weniger, als dies die Hypothese von Milne fordert. Dieser Widerspruch ließe sich beseitigen, wenn man annimmt, daß die frei werdende Gravitationsenergie zur Vergrößerung anderer Energiearten im Stern dient (z. B. zur Erhöhung der Temperatur im Sterninnern). Eine derartig genaue Kompensation durch diese Energien, die nur einen verschwindenden Teil der freigesetzten Gravitationsenergie verbrauchen, ist jedoch wenig wahrscheinlich.

Ein anderer Einwand gegen die Milnesche Hypothese ergibt sich aus der Statistik der Novae. Es ist bekannt, daß im Andromedanebel im Mittel 30 Novae pro Jahr aufleuchten. Die Zahl der in unserem Milchstraßensystem jährlich aufleuchtenden Novae ist anscheinend noch größer, doch ist eine genaue Schätzung schwierig, da nur die Novae der Sonnenumgebung beobachtet werden können. Nimmt man als mittleres Alter der Sterne 10^{10} Jahre an, so müßten während der Lebensdauer des Milchstraßensystems nicht weniger als $3 \cdot 10^{11}$ Novae aufgeleuchtet sein. Die Gesamtzahl der Sterne in unserem Milchstraßensystem beträgt jedoch annähernd $3 \cdot 10^{10}$. Danach müßte jeder Stern

im Mittel 10 mal aufgeleuchtet sein. Wir wissen andererseits aber mit Sicherheit, daß die Sonne während $2 \cdot 10^9$ Jahren keine derartige Katastrophe erlebt hat, denn diese hätte zum Schmelzen der Erdrinde geführt, was sich jedoch während dieser Zeit nicht ereignet hat. Man kann annehmen, daß auch andere sonnenähnliche Sterne keine Ausbrüche während Zeiten gleicher Größenordnung erlitten haben, was die Zahl der Ausbrüche, die auf die übrigen Sterne kämen, noch erhöhen würde. Man kommt also zu dem Schluß, daß es eine spezielle Klasse von Sternen gibt, die sehr viele Male aufleuchten. Wie wir uns erinnern, wurde eine derartige Vermutung schon auf Grund der Analogie zwischen den typischen und wiederkehrenden Novae geäußert.

Diese Überlegungen, die gegen die Hypothese von MILNE sprechen, führten zu einem Ersatz dieser Hypothese durch die Annahme, daß ein gewöhnlicher Stern nicht durch einen einzigen Novaausbruch in einen weißen Zwerg umgewandelt wird, sondern durch eine ganze Reihe derartiger Ausbrüche. In ihrer allgemeinsten Form wurde diese Hypothese von B. A. WORONZOW-WELJAMINOW [43, Heft 2 u. 3] entwickelt.

Vor allem lenkte B. A. WORONZOW-WELJAMINOW die Aufmerksamkeit darauf, daß die Novae in den Zeiten zwischen den Ausbrüchen (d.h. also in ihrem Normalzustand) sehr unterschiedliche Leuchtkräfte besitzen, sie also im HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramm den Bereich von den WOLF-RAYET-Sternen bis zu den blauen und weißen Zwergen besetzen. Eine genauere Behandlung dieses Problems führte zur Entdeckung einer neuen kontinuierlichen Folge im HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramm, die nach B. A. WORONZOW-WELJAMINOW die *weiß-blaue* genannt wird. Diese Frage beginnt bei den Sternen vom Typ O und B, führt über die Sterne des WOLF-RAYET-Typs zu den wiederkehrenden und gewöhnlichen Novae und endet bei den blauen und weißen Zwergen. Da die Massen der Sterne vom Typ O etwa 40 $\mathfrak{M}_\odot$, die der Sterne vom WOLF-RAYET-Typ etwa 10 $\mathfrak{M}_\odot$ und die Massen der weißen Zwerge etwa eine Sonnenmasse oder weniger betragen, so äußerte B. A. WORONZOW-WELJAMINOW die Vermutung, daß die weiß-blaue Folge eine Entwicklung charakterisiert: die massereichsten Sterne bewegen sich, indem sie Masse verlieren, im Laufe ihrer Entwicklung längs dieser Folge und werden letzten Endes in weiße Zwerge umgewandelt. Der Massenverlust vollzieht sich anfänglich in Form eines kontinuierlichen Stroms, später durch Ausbrüche, zwischen denen die Zeitintervalle immer größer werden.

Ohne Zweifel ist die Tatsache der Existenz einer weiß-blauen Folge im HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramm von großem Interesse. Doch kann der damit verbundenen Entwicklungshypothese heute nicht zugestimmt werden. Gegen sie sprechen folgende Einwände [22], [53]:

1. Wir nehmen an, daß sich die Sterne vom Spektraltyp O in WOLF-RAYET-Sterne, dann in Novae und schließlich in weiße Zwerge umwandeln. Da die WOLF-RAYET-Sterne und Novae sehr intensiv Masse verlieren, so ist ihre „Lebensdauer" relativ klein (10^5–10^6 Jahre für WOLF-RAYET-Sterne und 10^7–10^8 Jahre für Novae). Es ist klar, daß sich während einer so kurzen Zeit weder die Verteilung der Sterne im Raum noch die Verteilung ihrer Geschwindigkeiten merklich

ändern kann. Daher müßten alle Objekte der weiß-blauen Folge annähernd gleiche räumliche und kinematische Charakteristika aufweisen. Die Beobachtung spricht jedoch gegen diesen Schluß.

2. Wir wenden uns den Begleitern der Sterne der weiß-blauen Folge zu. Es ist bekannt, daß die O- und Wolf-Rayet-Sterne sehr oft Doppelsterne bilden, wobei ihre Begleiter heiße Riesen sind. Die Novae besitzen dagegen keine Begleiter, oder es sind dies nur sehr schwache Sterne. Jedenfalls wurde bis heute nur für Nova Herculis diese Duplizität festgestellt. Die weißen Zwerge sind nun aber wieder Begleiter der verschiedensten Sterne (z. B. des Sirius, des langperiodischen Veränderlichen Mira, usw.). Nimmt man nun eine Entwicklung der Sterne der weiß-blauen Folge längs dieser Folge an, so wird es sehr schwierig, die Entwicklung ihrer Begleiter zu erklären.

So können wir also heute noch nichts Bestimmtes über die Rolle des Aufleuchtens in der Entwicklung der Sterne aussagen. Wir unterstreichen nur noch einmal, daß sich die aufleuchtenden Sterne ihrer Charakteristik nach stark von den übrigen Sternen unterscheiden. Sonnenähnliche Sterne z. B. können nicht aufleuchten.

Wir wollen noch einige Worte über die Supernovaausbrüche sagen. Wenden wir auf diese die Gleichungen des vorangegangenen Abschnitts an, so erhalten wir für die beim Ausbruch einer Supernova frei werdende Energie etwa 10^{50} erg. Diese Energie ist schon mit der Gravitationsenergie des Sterns vergleichbar (wenn die Masse einer Supernova die Sonnenmasse nicht um ein Vielfaches übertrifft). Außerdem ist die Masse, die bei einem Supernovaausbruch ausgestoßen wird, der Sternmasse vergleichbar (wiederum unter der Voraussetzung, daß die Supernovamasse von der Größenordnung der Sonnenmasse ist). Man könnte daher annehmen, daß sich bei einem Supernovaausbruch der Übergang des Sterns von einer Gleichgewichtskonfiguration in eine andere, die sich von der ersten wesentlich unterscheidet, vollzieht. Es wäre z. B. nicht ausgeschlossen, daß ein Supernovaausbruch den Übergang eines gewöhnlichen Sterns in den Zustand eines weißen Zwergs charakterisiert. Jedoch erfolgen Supernovaausbrüche zu selten, als daß auf diesem Wege alle im Milchstraßensystem vorhandenen weißen Zwerge innerhalb von 10^{10} Jahren entstehen könnten.

KAPITEL VI

Sterne mit hellen Spektrallinien

§ 28. Das Zustandekommen von Emissionslinien

1. Sterne vom Spektraltyp Wolf-Rayet, P Cygni und Be

Dieses Kapitel ist im wesentlichen den Sternen der frühen Spektralklassen mit Emissionslinien im Spektrum gewidmet, d.h. Sternen vom Spektraltyp Wolf-Rayet, P Cygni und Be. Diese Sterne sind heute genauer untersucht als die Sterne der anderen Typen mit Emissionslinien. Dies ist im wesentlichen dadurch begründet, daß die sich in den Atmosphären der genannten Sterne abspielenden physikalischen Prozesse weniger kompliziert sind.

Wolf-Rayet-Sterne entsprechen ihrem Anregungs- und Ionisationsgrad nach den Sternen vom Spektraltyp O. Ihre Spektren bestehen aus breiten hellen Bändern von H, He I, He II, C III, N III und anderen Atomen mit sehr hohen Ionisationspotentialen, die einem kontinuierlichen Untergrund überlagert sind. Am violetten Ende einiger dieser hellen Bänder sind schwache Absorptionslinien sichtbar. Die Breite der hellen Bänder beträgt einige zehn Ångström, und ihre Intensität im Innern übertrifft die des kontinuierlichen Spektrums zuweilen um das Zehn- bis Zwanzigfache. Infolgedessen ist die Energie, die vom Stern in den hellen Linien ausgestrahlt wird, der im kontinuierlichen Spektrum (im sichtbaren oder photographischen Bereich) ausgestrahlten vergleichbar. In Abb. 66 sind einige Mikrophotogramme von Spektren einzelner Wolf-Rayet-Sterne wiedergegeben.

Eine wichtige Besonderheit der Spektren der Wolf-Rayet-Sterne ist ihre Einteilung in zwei Reihen (in Wirklichkeit nicht ganz streng): eine Stickstoff- und eine Kohlenstoffreihe. In den Spektren der ersten Reihe sind die Linien des Stickstoffs in den verschiedenen Ionisationsstufen vertreten, es finden sich aber keine Bänder von Kohlenstoff und Sauerstoff. In den Spektren der zweiten Gruppe treten die Bänder des Kohlenstoffs und Sauerstoffs in den verschiedenen Ionisationsstufen auf, aber es fehlen die des Stickstoffs. Hinsichtlich des Anregungs- und Ionisationsgrades der Atome ähneln sich beide Reihen. Offensichtlich haben wir es hier mit realen Unterschieden in der chemischen Zusammensetzung der Sterne zu tun.

Im letzten Jahrzehnt wurden einige spektroskopische Doppelsterne mit Wolf-Rayet-Komponenten entdeckt, worunter das System HD 193576 sich

außerdem als bedeckungsveränderlich erwies. Das Studium dieser Doppelsternsysteme gab wertvolle Aufschlüsse über die WOLF-RAYET-Sterne. Speziell wurde festgestellt, daß ihre Massen in der Größenordnung von 10 Sonnenmassen liegen.

Die absoluten Helligkeiten der WOLF-RAYET-Sterne liegen bei — 3^m. Diese Sterne gehören zu den hellsten Objekten des Milchstraßensystems. Wie wir schon wissen, besitzen auch Novae einige Jahre nach ihrem Aufleuchten und

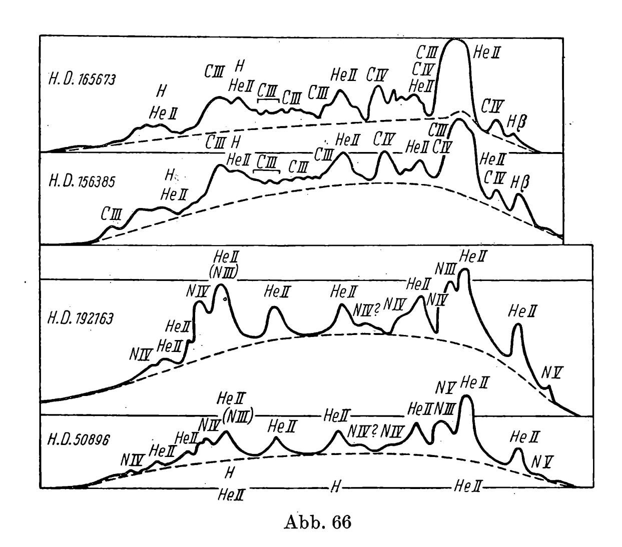


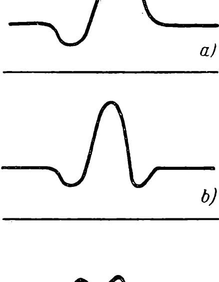
Abb. 66

die Zentralsterne mancher planetarischer Nebel ein WOLF-RAYET-Spektrum. Diese Sterne haben jedoch eine wesentlich geringere absolute Helligkeit als die „gewöhnlichen“ WOLF-RAYET-Sterne; sie beträgt im Mittel + 5^m.

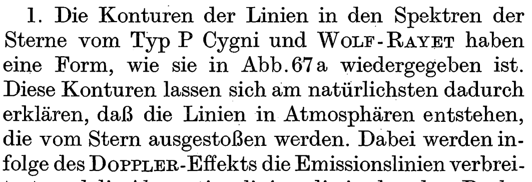
Den WOLF-RAYET-Sternen nahe stehen die Sterne vom Typ P Cygni, die zur Spektralklasse B gehören. In den Spektren dieser Sterne treten ebenso wie bei den WOLF-RAYET-Sternen Emissionslinien auf, die annähernd symmetrisch zur Linienmitte liegen und an ihrer violetten Seite von Absorptionslinien begleitet sind (Abb. 67a). Im Unterschied zu den Spektren der WOLF-RAYET-Sterne ist hier jedoch die Breite der Emissionslinien nicht so groß, und im Gegensatz dazu sind die Absorptionslinien intensiver.

Die Sterne vom Typ P Cygni sind nicht die einzigen Vertreter der Spektralklasse B mit Emissionslinien. Der weitaus größere Teil dieser Sterne (man bezeichnet sie einfach als Typ Be) besitzt Linienkonturen, wie sie in Abb. 67b und 67c zu sehen sind. Diese Konturen lassen sich wie folgt charakterisieren: Einer breiten und nicht sehr tiefen Absorptionslinie überlagert sich eine weniger

breite Emissionslinie; letztere ist in einigen Fällen einfach, in anderen doppelt. Die Spektren vom Typ Be ändern sich im Laufe der Zeit nicht unbeträchtlich. Beispielsweise variieren die relativen Intensitäten der Komponenten der Emissionslinien, die zuweilen sogar ganz verschwinden, so daß der Be-Stern zum normalen B-Stern wird. Zusammen mit den spektralen Änderungen wird auch eine geringe Helligkeitsschwankung des Sterns beobachtet.



2. Das Ausströmen von Materie aus dem Stern



Die Beobachtungsdaten der Sterne vom Typ Wolf-Rayet und P Cygni führen zu dem Schluß, daß aus diesen Sternen kontinuierlich Materie ausströmt. Wir wollen für diese grundlegende Tatsache Beweise anführen.

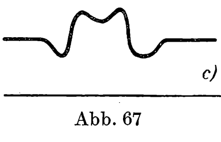


Abb. 67

1. Die Konturen der Linien in den Spektren der Sterne vom Typ P Cygni und Wolf-Rayet haben eine Form, wie sie in Abb. 67a wiedergegeben ist. Diese Konturen lassen sich am natürlichsten dadurch erklären, daß die Linien in Atmosphären entstehen, die vom Stern ausgestoßen werden. Dabei werden infolge des Doppler-Effekts die Emissionslinien verbreitert, und die Absorptionslinien, die in den dem Beobachter zugekehrten Schichten der Atmosphäre zustande kommen, sind nach Violett verschoben.

2. Analoge Konturen besitzen die Linien in den Spektren der Novae, also Objekten, bei denen das Ausstoßen von Materie keinem Zweifel unterliegt. Im Unterschied zu den Novaspektren ändern sich jedoch die Wolf-Rayet- und P-Cygni-Spektren nicht merklich im Laufe der Zeit. Dieser Umstand zwingt zu der Annahme, daß wir es hier nicht mit einem Ablösen und Entfernen der Hülle vom Stern zu tun haben, sondern mit einem kontinuierlichen Materieausstoß von der Oberfläche des Sterns. Infolge dieses Prozesses bilden sich um die Sterne ausgedehnte Atmosphären, deren Materie ständig erneuert wird.

3. Wenn die Verbreiterung der Emissionslinien durch den Doppler-Effekt hervorgerufen wird, so muß die Breite einer Linie gleich $\Delta\lambda = 2\frac{v}{c}\lambda$ sein, wobei v die Ausstoßgeschwindigkeit der Materie und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Diese Abhängigkeit zwischen der Linienbreite $\Delta\lambda$ und der Wellenlänge λ ist tatsächlich in den Spektren von Wolf-Rayet- und P-Cygni-Sternen erfüllt. Wir haben dadurch die Möglichkeit, die Ausstoßgeschwindigkeit der Materie zu bestimmen. Sie ergibt sich zu etwa 1000 km/sec für Wolf-Rayet-Sterne und etwa 100 km/sec für Sterne vom Typ P Cygni.

4. Einige der Wolf-Rayet-Sterne sind Komponenten enger Doppelsterne. Hier deuten die spektroskopischen und photometrischen Befunde darauf hin,

daß sich die Begleiter der Wolf-Rayet-Sterne in den ausgedehnten Atmosphären bewegen, die diese Sterne umgeben.

Die Existenz ausgedehnter Atmosphären bei Sternen vom Typ Wolf-Rayet und P Cygni macht die Hypothese über das Zustandekommen der Emissionslinien in den Spektren dieser Sterne durch Fluoreszenz, im großen und ganzen so, wie sie in den planetarischen Nebeln verläuft, ganz natürlich. Bekanntlich ist für das Entstehen der Fluoreszenz ein kleiner Wert des Verdünnungsfaktors der Strahlung notwendig. Diese Bedingung ist in den ausgedehnten Atmosphären der betrachteten Sterne so gut wie erfüllt. Es ist jedoch

Tabelle 23

Stern	He I	He II
HD 192163	1815	1550
177230	785	520
192103	1290	975
184738	1075	540

zu bemerken, daß der Verdünnungsfaktor in diesen Atmosphären bei weitem nicht so klein wie in den Nebeln ist. Wir werden weiterhin sehen, daß infolgedessen der Prozeß des Leuchtens der ausgedehnten Sternatmosphären wesentlich komplizierter als das Nebelleuchten wird.

Sehr wichtig ist, zu wissen, ob eine merkliche Beschleunigung oder Bremsung der Atome, die von den Sternen ausgestoßen werden, existiert. Eine erste Orientierung darüber kann man sich aus der Analyse der Linienkonturen (siehe Abschnitt 3) verschaffen. Eine andere Methode zur Lösung dieser Frage ist die folgende: Da sich der Leuchtvorgang in den betrachteten Hüllen im Prinzip nicht von dem Leuchten der planetarischen Nebel unterscheidet, muß in diesen Hüllen dieselbe Strahlungsschichtung vorhanden sein wie in den Nebeln. Die Linien der Atome mit hohem Ionisationspotential müssen also in tieferen Schichten der Hülle entstehen als die Linien mit niedrigerem Ionisationspotential. Bei Vorhandensein eines Geschwindigkeitsgradienten in der Hülle müßten dann die Emissionslinien der verschiedenen Atome eine unterschiedliche Breite besitzen. Dabei wird die Linienbreite mit dem Ionisationspotential zunehmen, wenn sich die Atome in der Hülle verlangsamt bewegen, und abnehmen, wenn eine Beschleunigung der Atome stattfindet. Die beobachteten Breiten von Emissionslinien des He I ($\lambda = 5875$ Å) und He II ($\lambda = 5411$ Å) in den Spektren einiger Wolf-Rayet-Sterne finden sich in Tabelle 23. Aus der Tabelle ist zu ersehen, daß die Linien des neutralen Heliums breiter sind als die des ionisierten. Nach dem eben Gesagten bedeutet dies, daß die Atome in der Atmosphäre der Wolf-Rayet-Sterne beschleunigt werden.

Wichtig ist auch eine Abschätzung der Materiemenge, die in der Zeiteinheit aus dem Stern ausströmt. In der Zeit dt tritt durch ein Oberflächenelement im Abstand r vom Zentrum des Sterns eine Materiemenge $\varrho(r)v(r)dt$ hindurch, wobei $\varrho(r)$ die Dichte und $v(r)$ die Geschwindigkeit am betrachteten Ort der Hülle ist. Die Materiemenge, die durch eine Kugeloberfläche vom Radius r in der Zeit dt austritt, ist dann

$$d\mathfrak{M} = 4\pi r^2 \varrho(r)\, v(r)\, dt. \qquad (28.1)$$

Zur Abschätzung von $\frac{d\mathfrak{M}}{dt}$ setzen wir für r den Radius der Photosphäre und für $\varrho(r)$ den Wert der Dichte, wie er für die untere Grenze der umkehrenden Schicht gilt, d.h. eine Dichte von der Größenordnung 10^{-11} g/cm³ (dieser Wert von ϱ wird im folgenden noch präzisiert). Aus Formel (28.1) erhalten wir, daß ein Stern vom WOLF-RAYET- oder P-Cygni-Typ im Jahr eine Masse verliert, die genähert 10^{-5} Sonnenmassen gleich ist. Ein derart enormer jährlicher Massenverlust spricht vor allem dafür, daß ein Stern nur verhältnismäßig kurze Zeit im WOLF-RAYET- oder P-Cygni-Stadium verweilen kann.

Daß man auch bei den Be-Sternen ein Ausströmen von Materie und ausgedehnte Atmosphären annehmen muß, geht sowohl auf das Vorhandensein von Emissionslinien in ihren Spektren als auch auf eine Reihe weiterer spektraler Besonderheiten zurück. Wir wollen allerdings vorläufig nur auf eine dieser spektralen Eigenarten hinweisen: Nach den Konturen der breiten Absorptionslinien zu schließen, gehören die Be-Sterne zu den schnell rotierenden Sternen. Ihre Rotationsgeschwindigkeiten erreichen am Äquator einige 100 km/sec. Die Materie, die aus dem Stern geschleudert wird und die ausgedehnte Atmosphäre bildet, nimmt selbstverständlich auch an der Rotation teil. Dadurch erklärt sich die Verbreiterung der Emissionslinien, die in der Hülle durch Fluoreszenz entstehen. Die Rotationsgeschwindigkeit der ausgeschleuderten Materie nimmt jedoch mit ihrer Entfernung vom Stern ab (wegen der Erhaltung des Drehimpulses). Infolgedessen besitzen die Emissionslinien geringere Breite als die Absorptionslinien, denen sie sich überlagern.

Anscheinend fördert die schnelle Rotation der Be-Sterne das Ausstoßen der Materie aus dem Stern, jedoch kann man sie nicht als Ursache dieses Materieausstoßes annehmen. Dies folgt daraus, daß das Emissionsspektrum der Be-Sterne unregelmäßige zeitliche Änderungen erfährt (und zuweilen sogar ganz verschwindet). Demnach trägt auch das Ausstoßen der Materie aus den Be-Sternen einen unregelmäßigen Charakter, was nicht möglich wäre, wenn die Materie infolge der Rotation ausströmte.

Der Materiestrom aus den Be-Sternen ist relativ gering, denn mit Ausnahme einzelner Fälle übt die Hülle kaum einen Einfluß auf die Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum des Sterns aus. In erster Näherung kann man das Spektrum eines Be-Sterns als Überlagerung von Emissionslinien über ein mehr oder weniger normales B-Spektrum ansehen. Die Hülle der Be-Sterne spielt also die Rolle der höchsten Atmosphärenschichten. In dieser Hinsicht unterscheiden sich die Be-Sterne von den Sternen des Typs WOLF-RAYET und

P Cygni, deren Hüllen den Stern „selbst“ unsichtbar machen. Die Hüllen der Wolf-Rayet- und P-Cygni-Sterne sind so mächtig, daß sie nicht nur die Rolle der Atmosphäre, sondern auch die der Photosphäre spielen. Im weiteren wollen wir jedoch, wenn wir von den Hüllen der Wolf-Rayet-Sterne sprechen, nur diejenigen ihrer Schichten verstehen, in denen die Spektrallinien entstehen, d.h. die Atmosphäre. Von den Hüllen der Wolf-Rayet-Sterne und von den Photosphären, wo das kontinuierliche Spektrum entsteht, wird in § 33 die Rede sein.

3. Die Konturen der Emissionslinien

Einen wertvollen Überblick über den Bewegungscharakter der aus dem Stern ausgestoßenen Materie gibt uns das Studium der Konturen der Emissionslinien in den Sternspektren.

Die theoretische Erfassung der Linienkonturen, die in einer sich bewegenden Hülle gebildet werden, bereitet große Schwierigkeiten. In dem Falle jedoch, in dem die Geschwindigkeit der Hülle die mittlere thermische Geschwindigkeit der Atome wesentlich übertrifft, können die Linienkonturen ziemlich leicht berechnet werden. Man kann dann alle Faktoren, die die Kontur der Linie beeinflussen, außer der Bewegung der Hülle selbst vernachlässigen. Nur in diesem Falle läßt sich auch die umgekehrte Aufgabe hinreichend genau lösen, nämlich das Auffinden der Parameter, die die Bewegung der Hülle charakterisieren, aus den beobachteten Linienkonturen.

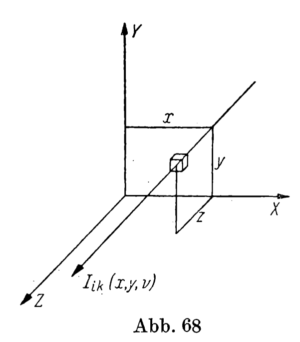


Abb. 68

Man kann annehmen, daß dieser Fall in sehr guter Näherung in den Hüllen der Sterne vom Typ Wolf-Rayet, P Cygni und Be (und auch denen der Novae) realisiert ist. Wir wollen ihn daher im weiteren betrachten.

Wir wählen ein Koordinatensystem XYZ mit dem Ursprung im Sternzentrum. Die Z-Achse sei auf den Beobachter zu gerichtet. Um die Kontur einer Emissionslinie zu bestimmen, die beim Übergang eines Atoms aus dem k-ten in den i-ten Zustand entsteht, berechnen wir zunächst die Intensität der Strahlung $I_{ik}(x, y, \nu)$ mit der Frequenz ν in der Linienmitte, die von einem Punkt der Sternscheibe mit den Koordinaten x, y ausgeht (Abb. 68). Die Gesamtenergie, die in der Frequenz ν in der Richtung zum Beobachter (in der Raumwinkeleinheit) ausgestrahlt wird, ist dann durch die Gleichung

$$\mathcal{E}_{ik}(\nu) = \iint I_{ik}(x, y, \nu)\, dx\, dy \tag{28.2}$$

bestimmt.

Wir wissen zunächst nicht, ob die Hülle für Strahlung in der gegebenen Linie durchsichtig oder undurchsichtig ist. Daher führen wir neben dem Volumen-Emissionskoeffizienten $\varepsilon_{ik}(\nu - \nu'_{ik})$ den Volumen-Absorptionskoeffizien-

ten $\alpha_{ik}(\nu - \nu'_{ik})$ in unsere Betrachtung ein. Hierin ist ν'_{ik} die Frequenz der Linienmitte, die von dem gegebenen Volumenelement, das sich relativ zum Beobachter bewegt, ausgestrahlt wird. Diese Frequenz ist gegenüber der Frequenz ν_{ik} in der Mitte einer Linie, die in einem für den Beobachter ruhenden Volumenelement entsteht, um

$$\nu'_{ik} - \nu_{ik} = \nu_{ik} \frac{v_z}{c} \tag{28.3}$$

verschoben. Dabei ist v_z die Projektion der Geschwindigkeit des betrachteten Volumenelements auf die Z-Achse; ε_{ik} ist der Zahl $n_k(x, y, z)$ der strahlenden Atome in 1 cm³ und α_{ik} der Zahl $n_i(x, y, z)$ der absorbierenden Atome pro cm³ proportional.

Für die Intensität $I_{ik}(x, y, \nu)$ der Strahlung haben wir somit

$$I_{ik}(x, y, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{ik}(\nu - \nu'_{ik})\, e^{-\int_z^\infty \alpha_{ik}(\nu - \nu'_{ik})\, dz}\, dz. \tag{28.4}$$

Bei der Aufstellung der Gleichung (28.4) wurden keinerlei Annahmen über das Geschwindigkeitsfeld in der Hülle gemacht. Wir nehmen jedoch jetzt in Einklang mit dem oben Gesagten an, daß die Geschwindigkeit der Hülle die Wärmebewegung der Atome wesentlich übertrifft. Wir können dann ohne besonderen Verlust an Genauigkeit die komplizierten Funktionen ε_{ik} und α_{ik} der Frequenz durch einfachere ersetzen. Wir nehmen an, daß ε_{ik} und α_{ik} nur im Frequenzintervall $\nu'_{ik} - \frac{\Delta\nu_{ik}}{2}$ bis $\nu'_{ik} + \frac{\Delta\nu_{ik}}{2}$ von Null verschieden und konstant und außerhalb dieses Intervalls gleich Null sind. Hierbei ist

$$\Delta\nu_{ik} = 2\nu_{ik} \frac{u}{c} \tag{28.5}$$

mit u als mittlerer thermischer Geschwindigkeit der Atome.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist es klar, daß die Strahlung der Frequenz ν nicht von der ganzen Hülle zum Beobachter gelangt, sondern nur von einem gewissen Bereich, der zu beiden Seiten einer Oberfläche gleicher Radialgeschwindigkeiten liegt, die der Frequenz ν entsprechen. Die Gleichung dieser Oberfläche hat die Form

$$\nu = \nu_{ik} + \frac{\nu_{ik}}{c} v_z(x, y, z). \tag{28.6}$$

Wie leicht einzusehen ist, liegen die Grenzen des erwähnten Gebiets in Richtung des Visionsradius (d.h. der Z-Achse) in einem Abstand von der Fläche (28.6), der einer Frequenzänderung von $\frac{\Delta\nu_{ik}}{2}$ entspricht. Somit erhalten wir

an Stelle der Gleichung (28.4)

$$I_{ik}(x, y, \nu) = \int_{z_1}^{z_2} \varepsilon_{ik} e^{-\int_z^{z_2} \alpha_{ik} dz} dz, \tag{28.7}$$

wobei sich die Integrationsgrenzen z_1 und z_2 aus den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \nu - \frac{\Delta\nu_{ik}}{2} &= \nu_{ik} + \frac{\nu_{ik}}{c} v_z(x, y, z_1), \\ \nu + \frac{\Delta\nu_{ik}}{2} &= \nu_{ik} + \frac{\nu_{ik}}{c} v_z(x, y, z_2) \end{aligned}\right\} \tag{28.8}$$

ergeben [oder aus Bedingungen, die sich von (28.8) durch das Vorzeichen von $\frac{\Delta\nu_{ik}}{2}$ unterscheiden].

Es ist unter den gemachten Voraussetzungen weiter klar, daß die „Dicke" der Schicht, die Strahlung der Frequenz ν aussendet (d. h. die Differenz $z_2 - z_1$), relativ klein sein wird (einzelne Stellen ausgenommen). Dies erlaubt uns, α_{ik} und ε_{ik} in dieser Schicht als konstant und gleich ihren Werten auf der Oberfläche (28.6) anzunehmen. Führt man die Integration in Gleichung (28.7) aus, so findet man

$$I_{ik}(x, y, \nu) = \frac{\varepsilon_{ik}}{\alpha_{ik}} [1 - e^{-\alpha_{ik}(z_2 - z_1)}]. \tag{28.9}$$

Die Differenz $z_2 - z_1$ erhält man aus den Bedingungen (28.8). Berechnet man eine davon aus der anderen und setzt

$$v_z(x, y, z_2) - v_z(x, y, z_1) = \frac{\partial v_z}{\partial z} (z_2 - z_1), \tag{28.10}$$

so erhält man

$$\Delta\nu_{ik} = \frac{\nu_{ik}}{c} \left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right| (z_2 - z_1). \tag{28.11}$$

Mit (28.5) ergibt dies

$$z_2 - z_1 = \frac{2u}{\left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|}. \tag{28.12}$$

Wir müssen nun den erhaltenen Ausdruck für $I_{ik}(x, y, \nu)$ in Gleichung (28.2) einsetzen, die uns die Gesamtenergie $\mathscr{E}_{ik}(\nu)$ angibt, die von der Hülle in der Frequenz ν ausgestrahlt wird. Unter Berücksichtigung von (28.12) findet man

$$\mathscr{E}_{ik}(\nu) = \iint \frac{\varepsilon_{ik}}{\alpha_{ik}} \left[1 - e^{-\frac{2u}{\left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|} \alpha_{ik}} \right] dx\, dy. \tag{28.13}$$

Hier erstreckt sich die Integration über die Oberfläche (28.6).

Die in Gleichung (28.13) eingehenden ε_{ik} und α_{ik} lassen sich bekanntlich wie folgt durch die Konzentrationen der absorbierenden und emittierenden Atome n_i und n_k ausdrücken:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{n_k A_{ki} h\nu_{ik}}{4\pi \Delta\nu_{ik}}, \tag{28.14}$$

$$\alpha_{ik} = \frac{n_i B_{ik} h\nu_{ik}}{\Delta\nu_{ik} c}\left(1 - \frac{g_i}{g_k}\frac{n_k}{n_i}\right). \tag{28.15}$$

Hierin sind die A_{ki} und B_{ik} die EINSTEINschen Übergangswahrscheinlichkeiten. Unter Beachtung der zwischen A_{ki} und B_{ik} bestehenden Beziehung erhalten wir:

$$\frac{\varepsilon_{ik}}{\alpha_{ik}} = \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2}\frac{1}{\frac{g_k}{g_i}\frac{n_i}{n_k} - 1}. \tag{28.16}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß Gleichung (28.16), wie es auch sein muß, in das PLANCKsche Gesetz übergeht, wenn $\frac{n_k}{n_i}$ sich nach der BOLTZMANN-Gleichung bestimmen läßt.

Es ist somit zur Berechnung der Kontur einer Emissionslinie, d.h. der Größe $\mathscr{E}_{ik}(\nu)$, notwendig, sowohl die Geschwindigkeitsverteilung in der Hülle als auch die Verteilung der absorbierenden und emittierenden Atome zu kennen. Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, wie man den Anregungsgrad der Atome in den verschiedenen Teilen der Hülle bestimmt. Dadurch ist dann die Aufgabe der Berechnung der Linienkonturen im Prinzip vollständig gelöst. Wir wollen hier noch einige allgemeine Überlegungen anschließen, die für beliebige Hüllen Geltung haben.

Vor allem ist zu bemerken, daß die Hülle in zwei Bereiche eingeteilt werden kann: einen, der für die Strahlung der betrachteten Linie durchsichtig ist, und einen, der für diese Strahlung undurchsichtig ist. Im ersten ist $\frac{2u}{\left|\frac{\partial v_z}{\partial z}\right|}\alpha_{ik} > 1$, im zweiten < 1. Infolgedessen kann man das Integral (28.13) näherungsweise in zwei Teile zerlegen, und zwar erstens in ein Integral jenes Teils der Oberfläche (28.6), der im undurchsichtigen Bereich liegt:

$$\mathscr{E}'_{ik}(\nu) = \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2}\iint \frac{dx\,dy}{\frac{g_k}{g_i}\frac{n_i}{n_k} - 1}, \tag{28.17}$$

und zweitens in ein Integral des Teils der Oberfläche (28.6), der im durchsichtigen Bereich liegt:

$$\mathscr{E}''_{ik}(\nu) = \frac{A_{ki} h\nu_{ik}}{4\pi \Delta\nu_{ik}}\iint n_k \frac{2u}{\left|\frac{\partial v_z}{\partial z}\right|}\,dx\,dy. \tag{28.18}$$

Es ist klar, daß für die einen Frequenzen im Innern einer gegebenen Linie $\mathcal{E}'_{ik}(\nu)$ überwiegt, für die anderen $\mathcal{E}''_{ik}(\nu)$.

Von großem Interesse ist auch die folgende Frage: Kann man aus den beobachteten Linienkonturen auf die Gesamtdurchsichtigkeit der Hülle für Strahlung in diesen Linien schließen? Es ist leicht einzusehen, daß dies dann sicher der Fall sein wird, wenn wir die Konturen zweier Linien haben, die beim Übergang eines Atoms von einem gemeinsamen oberen Niveau in zwei verschiedene niedrigere entstehen. Ist die Hülle vollständig durchsichtig für Strahlung in den betrachteten Linien, so folgt aus Gleichung (28.18), daß die Intensitäten im Innern der Linien für entsprechende Punkte (d.h. für gleiche Werte von $\frac{\nu - \nu_{ik}}{\nu_{ik}}$) einander proportional werden. Findet dagegen in der Hülle eine Absorption der Strahlung in den Linien statt, so wird, wie Gleichung (28.17) zeigt, diese Proportionalität nicht erfüllt werden. Folglich kann man aus dem Bestehen der erwähnten Proportionalität auf die Gesamtdurchsichtigkeit der Hülle für die Strahlung in den gegebenen Linien schließen.

Es ist jedoch nicht immer möglich, zwei Linien mit gemeinsamem oberem Niveau zu beobachten, und dies ist auch gar nicht notwendig. Zur Lösung der gestellten Frage ist es ausreichend, die Konturen einiger Linien ein und desselben Atoms zu haben. Ist die Hülle vollkommen durchsichtig für Strahlung in den Nebenserien des betrachteten Atoms, so erfolgt das Leuchten der Hülle in den Linien dieses Atoms genauso, wie es in den Nebeln geschieht, d.h. durch Photoionisation aus dem Grundzustand und nachfolgende Rekombination. Hierbei wird das Verhältnis der Zahl der Übergänge in einer beliebigen Linie zur Gesamtzahl der Rekombinationen an allen Orten der Hülle das gleiche sein. Mit anderen Worten, n_k kann in der Form $n_k = z_k n_e n^+$ dargestellt werden, wobei z_k sich innerhalb der Hülle nicht ändert. Demzufolge werden für eine Hülle, die in den Linien der Nebenserien vollständig durchsichtig ist, die Intensitäten im Innern der Linie die oben erwähnte Proportionalitätsbedingung wiederum befriedigen.

Wir betrachten jetzt einen Sonderfall, der wichtig für die Anwendung ist. Wir nehmen an, daß aus dem Stern in allen Richtungen mit gleicher Intensität Materie ausströmt. Wir bezeichnen mit $v(r)$ die Geschwindigkeit der Materie im Abstand r vom Sternzentrum und mit ϑ den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung der Materie und der Richtung zum Beobachter. Dann ist die Projektion der Geschwindigkeit auf den Visionsradius gleich $v_z = v(r) \cos\vartheta$. Daraus ergibt sich leicht

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{dv}{dr}\cos^2\vartheta + \frac{v}{r}\sin^2\vartheta . \tag{28.19}$$

Wir haben in diesem Fall an Stelle von (28.13)

$$\mathcal{E}_{ik}(\nu) = 2\pi \int \frac{\varepsilon_{ik}}{\alpha_{ik}} \left[1 - e^{-\frac{2u\alpha_{ik}}{\left|\frac{dv}{dr}\cos^2\vartheta + \frac{v}{r}\sin^2\vartheta\right|}} \right] a\,da \tag{28.20}$$

mit

$$a = r \sin\vartheta . \tag{28.21}$$

Die Integration in Gleichung (28.20) erstreckt sich über die Oberfläche gleicher Radialgeschwindigkeiten:

$$\nu = \nu_{ik} + \nu_{ik} \frac{v(r)}{c} \cos\vartheta . \tag{28.22}$$

Ändert sich die Geschwindigkeit der Materie in der Hülle nicht, so nimmt die Gleichung (28.20) folgende Form an:

$$\mathscr{E}_{ik}(\nu) = 2\pi \sin^2\vartheta \int \frac{\varepsilon_{ik}}{\alpha_{ik}} \left(1 - e^{-\frac{2ur\alpha_{ik}}{v\sin^2\vartheta}}\right) r\,dr , \tag{28.23}$$

worin

$$\cos\vartheta = \frac{c}{v} \frac{\nu - \nu_{ik}}{\nu_{ik}} \tag{28.24}$$

ist. Aus (28.23) erhalten wir für den Fall vollständiger Durchsichtigkeit der Hülle

$$\mathscr{E}_{ik}(\nu) = 4\pi \frac{u}{v} \int \varepsilon_{ik} r^2 dr \tag{28.25}$$

und für den Fall vollständiger Undurchsichtigkeit

$$E_{ik}(\nu) = 2\pi \sin^2\vartheta \int \frac{\varepsilon_{ik}}{\alpha_{ik}} r\,dr \tag{28.26}$$

oder unter Berücksichtigung von (28.24)

$$\mathscr{E}_{ik}(\nu) = 2\pi \left[1 - \left(\frac{c}{v} \frac{\nu - \nu_{ik}}{\nu_{ik}}\right)^2\right] \int \frac{\varepsilon_{ik}}{\alpha_{ik}} r\,dr . \tag{28.27}$$

Somit ergibt eine vollständig durchsichtige Hülle Emissionslinien mit rechtwinkligen Konturen (*a*) und eine vollständig undurchsichtige Hülle Emissionslinien mit parabolischen Konturen (*b*) (siehe Abb. 69).

Man kann sich vorstellen, daß bei den Wolf-Rayet-Sternen ein solcher kontinuierlicher Materiestrom mit gleicher Stärke nach allen Richtungen vor sich geht. Ausführliche Untersuchungen der Linienkonturen in den Spektren dieser Sterne haben gezeigt, daß in einem Falle (beim Stern HD 193793) die Linienkonturen Rechteckgestalt haben. Dies zeugt von einer vollständigen Durchsichtigkeit der Hülle für Strahlung in diesen Linien und von dem Fehlen eines Geschwindigkeitsgradienten in der Hülle. Im allgemeinen jedoch sind die Konturen der Emissionslinien abgerundet, was man als Beschleunigung oder Bremsung der aus dem Stern ausströmenden Atome wie auch als Undurchsichtigkeit der Hülle für die Strahlung in diesen Linien deuten kann. Ein Vergleich der Konturen der Linien des ionisierten Heliums $\lambda = 4686, 5411, 4340$ Å

im Spektrum des Sterns HD 192163 hat gezeigt, daß die Ordinaten der Konturen in entsprechenden Punkten einander proportional sind. Man muß daher auf die erste der beiden erwähnten Möglichkeiten schließen. Für diesen Stern wurde aus der Linienkontur die Geschwindigkeitsverteilung in der Hülle berechnet [55].

Für einige Linien sind jedoch die Hüllen der Wolf-Rayet-Sterne unbedingt undurchsichtig. Zu ihnen gehören vor allem solche Linien, deren unterer Zustand metastabil ist. Als Beispiel kann man die Linie $\lambda = 3889$ Å des neutralen Heliums anführen. Ihr unterer Zustand 2^3S besitzt bekanntlich eine sehr große Lebensdauer. Auf eine große optische Dicke der Hüllen der Wolf-Rayet-Sterne in der Linie 3889 Å kann man daraus schließen, daß in den Spektren aller Wolf-Rayet-Sterne das betreffende Emissionsband an seiner violetten Seite von einer breiten und tiefen Absorptionslinie begrenzt ist.

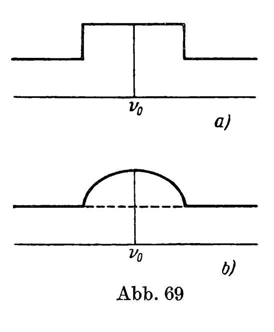


Abb. 69

Mit Hilfe der Gleichung (28.13) lassen sich die Konturen der Emissionslinien bestimmen, wenn das Ausstoßen von Materie aus schnell rotierenden Sternen geschieht. Es zeigt sich, daß in diesem Falle die Konturen der Emissionslinien dieselbe Form haben wie die Konturen der Linien in den Spektren der Be-Sterne (siehe Abb. 67 b und c). Die Rechnungen bestätigen die Ansicht, daß die Sterne vom Typ Be schnell rotierende Sterne sind, aus denen Materie ausgestoßen wird. Die in den Spektren dieser Sterne beobachteten unregelmäßigen Änderungen der Intensität und der Form der Spektrallinien lassen sich durch eine Änderung der Dichte und Geschwindigkeit der Hülle, d.h. durch ein unregelmäßiges Ausstoßen der Materie aus dem Stern, erklären.

Wir wollen nun die Gesamtenergie ausrechnen, die von der Hülle in einer gegebenen Linie ausgestrahlt wird. Hierzu müssen wir $\mathcal{E}_{ik}(\nu)$ über alle Frequenzen und alle Richtungen integrieren, d.h. das Integral

$$E_{ik} = \int\int \mathcal{E}_{ik}(\nu)\, d\nu\, d\omega \tag{28.28}$$

lösen. Benutzt man für $\mathcal{E}_{ik}$ den Ausdruck (28.13) und geht von der Integrationsvariablen ν zur Integrationsvariablen z (gemäß (28.6) über, so erhält man

$$E_{ik} = 4\pi \Delta\nu_{ik} \int\int\int \varepsilon_{ik} \beta_{ik}\, dx\, dy\, dz, \tag{28.29}$$

worin

$$\beta_{ik} = \int \left(1 - e^{-\frac{2u}{\left|\frac{\partial v_z}{\partial z}\right|}\alpha_{ik}}\right) \frac{1}{2u\alpha_{ik}} \left|\frac{\partial v_z}{\partial z}\right| \frac{d\omega}{4\pi} \tag{28.30}$$

ist. Der Wert β_{ik} hat einen einfachen physikalischen Sinn. Da $4\pi\Delta\nu_{ik}\varepsilon_{ik}$ die Gesamtenergie darstellt, die in der betrachteten Linie von der Volumeneinheit ausgestrahlt wird, so ist β_{ik} nichts anderes als der Bruchteil dieser Energie, der

die Hülle nach außen verläßt. Ist die Hülle am betrachteten Ort in allen Richtungen undurchsichtig, so ist

$$\beta_{ik} = \frac{1}{2u\alpha_{ik}} \overline{\left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|}, \tag{28.31}$$

worin $\overline{\left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|}$ die über alle Richtungen gemittelte Größe $\left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|$ ist. Ist die Hülle am betrachteten Ort in allen Richtungen durchsichtig $\left(\text{d.h.} \frac{2u}{\left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|} \alpha_{ik} \ll 1 \right)$, so ist, wie es auch sein muß,

$$\beta_{ik} = 1. \tag{28.32}$$

Wir kommen im folgenden Abschnitt auf Gleichung (28.30) zurück.

4. Die Intensitäten der Emissionslinien

Bereits früher haben wir für planetarische Nebel die Berechnung der Intensitäten von Emissionslinien durchgeführt. Dazu hatten wir angenommen, daß in den Nebeln unter der Wirkung der Strahlung des Zentralsterns die Ionisation der Atome aus dem Grundzustand erfolgt, worauf Einfänge von Elektronen durch die Ionen und daran anschließende Übergänge der Elektronen von höheren zu niedrigeren Niveaus zur Ausstrahlung von Quanten führen, welche dann den Nebel ungehindert verlassen (außer den Quanten der Grundserie). Diese Tatsache, d.h. die vollständige Durchsichtigkeit des Nebels für Strahlung in den Linien der Nebenserien, erleichtert die Bestimmung der Intensitäten der Emissionslinien außerordentlich. Wie wir uns erinnern, führte dies auf die Lösung eines Systems linearer algebraischer Gleichungen (die die Stationaritätsbedingungen für jedes Energieniveau des betrachteten Atoms ausdrückten).

Wir wollen uns jetzt mit der Berechnung der Intensitäten der Emissionslinien, die in den Hüllen der Sterne vom Typ Wolf-Rayet, P Cygni, Be (und auch Novae) entstehen, beschäftigen. Das Leuchten dieser Hüllen vollzieht sich im Prinzip genauso wie das Leuchten der Nebel, doch ist der Anregungsgrad der Atome in diesen Hüllen bei weitem nicht so klein wie in den Nebeln. Infolgedessen kann die Ionisation nicht nur vom Grundzustand aus erfolgen, sondern auch aus angeregten Zuständen, und die Hüllen können auch für Strahlung in den Linien der Nebenserien undurchsichtig sein. Unter diesen Bedingungen können die Quanten, die im Innern der Hülle (nach Ionisation und Rekombination) entstehen, diese nur verlassen, wenn sie nach vielen Streuungen, Zerteilungen usw. nahe genug an ihre Außengrenze gelangen. Daher führt die Aufgabe der Berechnung der Intensitäten der hellen Linien hier zur Lösung eines sehr komplizierten Systems von Integro-Differentialgleichungen, die sowohl die Stationaritätsbedingungen für jedes einzelne Niveau als auch die Gleichungen

des Strahlungstransports für jede Linie und jedes Kontinuum enthalten. Ein derartiges Gleichungssystem wurde zuerst von V. A. AMBARZUMJAN [54] behandelt.

Die Berücksichtigung der Bewegung der Hülle erschwert die Behandlung der Aufgabe noch weiter. Wenn jedoch der Geschwindigkeitsgradient in der Hülle hinreichend groß ist (in den betrachteten Sternhüllen ist dies der Fall), so vereinfacht dies die Theorie. Bei Vorhandensein eines Geschwindigkeitsgradienten in der Hülle können die Quanten in den Linien den Nebel nicht nur aus dessen Grenzbereichen verlassen, sondern infolge des DOPPLER-Effekts auch aus den zentralen Teilen. Daher hängt bei hinreichend großem Geschwindigkeitsgradienten die Lösung der Aufgabe über die Strahlung im Innern einer Linie an einem beliebigen Ort der Hülle nur wenig davon ab, was in derselben Linie an anderen Orten der Hülle ausgestrahlt wird. So besteht auch in diesem Falle die Aufgabe der Bestimmung der Intensitäten heller Linien in erster Näherung in der Lösung eines Systems algebraischer Gleichungen (allerdings nicht linearer) [56], [57].

Wir betrachten diese Aufgabe nun etwas eingehender. Es seien $n_i B_{ic} \varrho_{ic}$ die Anzahl der Ionisationen vom i-ten Niveau, $n_e n^+ C_i(T_e)$ die Anzahl der Einfänge auf das i-te Niveau und $n_k A_{ki}$ die Anzahl der spontanen Übergänge aus dem k-ten Niveau in das i-te, die sich an einem gegebenen Ort der Hülle pro Sekunde und cm³ ereignen.

Wenn ein Geschwindigkeitsgradient in der Hülle fehlte, so würden die Übergänge vom k-ten in das i-te Niveau, die in den inneren Bereichen der Hülle stattfinden, gleich der Anzahl der Übergänge vom i-ten in das k-te Niveau sein, da alle Quanten, die in den Spektrallinien ausgestrahlt werden, in der Hülle selbst absorbiert würden. Bei Vorhandensein eines Geschwindigkeitsgradienten jedoch ist die Anzahl der Übergänge aus dem k-ten in das i-te Niveau größer als die Anzahl der umgekehrten Übergänge, da ein gewisser Bruchteil der Quanten der betreffenden Linie infolge des DOPPLER-Effekts den Nebel verläßt. Diesen Bruchteil wollen wir mit β_{ik} bezeichnen. Dann wird der Überschuß der Übergänge $k \to i$ über die Übergänge in umgekehrter Richtung gleich $n_k A_{ki} \beta_{ik}$.

Im stationären Zustand muß die Anzahl der Übergänge der Atome aus dem i-ten Zustand in alle anderen der Anzahl der Übergänge in den i-ten Zustand gleich sein. Es gilt also

$$n_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} A_{ik} \beta_{ki} + B_{ic} \varrho_{ic} \right) = \sum_{k=i+1}^{\infty} n_k A_{ki} \beta_{ik} + n_e n^+ C_{if}(T_e) . \qquad (28.33)$$

In diesen Gleichungen gelten die Größen ϱ_{ic} als bekannt und sind gleich

$$\varrho_{ic} = W \varrho_{ic}^* \qquad (28.34)$$

mit ϱ_{ic}^* als Strahlungsdichte jenseits der Grenze der i-ten Serie an der Sternoberfläche und W als Verdünnungsfaktor der Strahlung.

Die Größen β_{ik} wurden schon im vorangegangenen Abschnitt aus den Konturen der Emissionslinien berechnet, die in sich bewegenden Hüllen entstehen. Wir wollen jedoch dieses Resultat nicht benutzen, sondern die β_{ik} auf direktem

Wege bestimmen. Hierzu nehmen wir wie früher an, daß sowohl der Absorptionskoeffizient α_{ik} als auch der Emissionskoeffizient ε_{ik} in einer Linie der Frequenz ν_{ik} nur im Intervall $\Delta\nu_{ik} = 2\frac{u}{c}\nu_{ik}$ von Null verschieden und konstant ist. Außerhalb dieses Intervalls seien sie gleich Null. Außerdem setzen wir voraus, daß der Bereich, in dem die Strahlung in der betreffenden Linie absorbiert wird, relativ klein ist (wegen des großen Geschwindigkeitsgradienten), so daß man die Materiedichte und den Geschwindigkeitsgradienten in diesem Bereich als konstant ansehen kann.

Wir wollen nun das Schicksal der Quanten betrachten, die in einer Linie der Frequenz ν_{ik} von einem bestimmten Volumenelement in der Z-Richtung in den Raumwinkel $d\omega$ ausgestrahlt werden. Auf dem Wege von z nach $z + dz$ wird der Bruchteil

$$e^{-\alpha_{ik}z}\left(1 - \frac{|\nu'_{ik} - \nu_{ik}|}{\Delta\nu_{ik}}\right)\alpha_{ik}dz \tag{28.35}$$

dieser Quanten absorbiert. Hier berücksichtigt der Faktor $e^{-\alpha_{ik}z}$ die Absorption der Quanten auf dem Wege von Null bis z und der Faktor $1 - \frac{|\nu'_{ik} - \nu_{ik}|}{\Delta\nu}$ die Frequenzänderung der Strahlung infolge des DOPPLER-Effekts. Hierbei ist

$$\nu'_{ik} - \nu_{ik} = \frac{\nu_{ik}}{c}\frac{\partial v_z}{\partial z}z. \tag{28.36}$$

Weiterhin ist klar, daß die Strahlung in der betrachteten Linie nur auf dem Wege von Null bis z_1 absorbiert wird, wobei z_1 durch die Bedingung

$$\Delta\nu_{ik} = \frac{\nu_{ik}}{c}\left|\frac{\partial v_z}{\partial z}\right| z_1 \tag{28.37}$$

gegeben ist. Mit (28.36) und (28.37) nimmt (28.35) folgende Form an:

$$e^{-\alpha_{ik}z}\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\alpha_{ik}dz. \tag{28.38}$$

Multipliziert man den Ausdruck (28.38) mit $\frac{d\omega}{4\pi}$ und integriert zunächst über z von 0 bis z_1 und dann über den Raumwinkel, so erhält man den Bruchteil der im betrachteten Volumenelement ausgestrahlten Quanten, die in der Hülle absorbiert werden. Dieser Bruchteil ist gleich $1 - \beta_{ik}$. Wir finden daher für β_{ik}

$$\beta_{ik} = \int (1 - e^{-\alpha_{ik}z_1})\frac{1}{\alpha_{ik}z_1}\frac{d\omega}{4\pi}. \tag{28.39}$$

Setzt man hierin den Ausdruck für z_1 nach (28.37) ein, so kommt man wiederum zu der schon früher erhaltenen Gleichung (28.30).

Aus dem Gleichungssystem (28.33) läßt sich also zusammen mit den Beziehungen (28.30) der Anregungs- und Ionisationsgrad in der Hülle bestimmen. Die in (28.30) eingehenden Absorptionskoeffizienten α_{ik} werden durch Gleichung (28.15) bestimmt.

Sind die Gleichungen (28.33) für verschiedene Teile der Hülle gelöst, so können wir die Gesamtenergie angeben, die von der Hülle in einer beliebigen Spektrallinie ausgestrahlt wird. Hierzu dient nachstehende Gleichung:

$$E_{ik} = A_{ki} h \nu_{ik} \int n_k \beta_{ik} dV. \tag{28.40}$$

Die Integration erstreckt sich hierin über das ganze Hüllenvolumen. Es ist leicht zu sehen, daß die Gleichung (28.40) mit Gleichung (28.29), die wir im vorigen Abschnitt erhalten haben, übereinstimmt.

Da an verschiedenen Orten der Hülle unterschiedliche Bedingungen bestehen, werden auch die Gleichungen (28.33) verschiedene Form haben. Am einfachsten sind die Bedingungen in den äußersten Schichten der Hülle, wo sie denen der Nebel ähnlich sind. Wir können annehmen, daß diese Teile der Hülle für Strahlung in den Linien der Nebenserie vollständig durchsichtig sind, und dementsprechend in den Gleichungen (28.33)

$$\beta_{ik} = 1, \quad i = 2, 3, 4, \ldots$$

setzen. Vernachlässigt man auch die Ionisationen aus angeregten Zuständen, so erhält man an Stelle von (28.33)

$$n_i \left(A_{i1} \beta_{1i} + \sum_{k=2}^{i-1} A_{ik}\right) = \sum_{k=i+1}^{\infty} n_k A_{ki} + n_e n^+ C_{if}(T_e) \tag{28.41}$$
$$(i = 2, 3, 4, \ldots).$$

In den Linien der Hauptserie ist die Hülle in hohem Maße undurchsichtig, d. h. $\beta_{1i} \ll 1$. Wie aus (28.41) ersichtlich ist, kann man für alle Niveaus außer dem zweiten ohne großen Fehler $\beta_{1i} = 0$ setzen. Wir haben daher für die äußeren Teile der Hülle

$$n_i \sum_{k=2}^{i-1} A_{ik} = \sum_{k=i+1}^{\infty} n_k A_{ki} + n_e n^+ C_{if}(T_e) \tag{28.42}$$
$$(i = 3, 4, 5, \ldots).$$

Die Gleichung (28.42) wurde schon in dem Kapitel über Nebel behandelt. Dort wurde auch die Lösung dieser Gleichung für das Wasserstoffatom gebracht und das Balmer-Dekrement ausgerechnet. Wir erinnern uns daran, daß sich dieses als sehr schwach von der Elektronentemperatur abhängig erwies $\left(\frac{\mathrm{H}\alpha}{\mathrm{H}\beta} = 3, \frac{\mathrm{H}\gamma}{\mathrm{H}\beta} = 0{,}5\right)$.

Den anderen Grenzfall erhält man für die Schichten der Hülle, wo diese für Strahlung in den Linien aller Serien undurchsichtig ist. In diesem Falle müssen

wir für β_{ik} den Ausdruck (28.31) benutzen. Setzt man diesen in Gleichung (28.39) ein und macht man Gebrauch davon, daß

$$A_{ki}\beta_{ik} = \frac{\frac{g_2}{g_1} n_1 - n_2}{\frac{g_k}{g_i} n_i - n_k} \left(\frac{\nu_{ik}}{\nu_{12}}\right)^3 A_{21}\beta_{12}, \tag{28.43}$$

so erhalten wir

$$n_i \left[x \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\frac{g_2}{g_1} n_1 - n_2}{\frac{g_i}{g_k} n_k - n_i} \left(\frac{\nu_{ki}}{\nu_{12}}\right)^3 + \frac{B_{ic}\varrho_{ic}^*}{A_{21}} \right]$$

$$= x \sum_{k=i+1}^{\infty} n_k \frac{\frac{g_2}{g_1} n_1 - n_2}{\frac{g_k}{g_i} n_i - n_k} \left(\frac{\nu_{ik}}{\nu_{12}}\right)^3 + \frac{n_e n^+ C_{if}}{W A_{21}}. \tag{28.44}$$

Hierin ist

$$x = \frac{\beta_{12}}{W}. \tag{28.45}$$

Wir sind so zu einem System algebraischer Gleichungen in den Unbekannten $\frac{n_i}{n_1}$ und $\frac{n_e n^+}{W n_1}$ gekommen. Die Parameter, die in diesen Gleichungen auftreten, sind außer der Größe x die Sterntemperatur (die über $B_{ic}\varrho_{ic}^*$ eingeht) und die Elektronentemperatur der Hülle (die über C_{if} eingeht). Das Gleichungssystem (28.44) ist leicht numerisch zu lösen. Wir bringen weiter unten als Beispiel das Balmer-Dekrement, das nach diesem System für das Wasserstoffatom (für $T_* = 20000°$ und $T_e = 20000°$) berechnet wurde.

Tabelle 24

x	0	0,01	0,1	1,0
H α	0,67	0,98	2,0	5,20
H β	1,00	1,00	1,00	1,00
H γ	0,97	0,79	0,44	0,21
H δ	0,87	0,58	0,22	0,06

Wir wollen uns jetzt den Beobachtungsdaten zuwenden. Das Balmer-Dekrement in den Spektren der Wolf-Rayet-Sterne zu bestimmen ist ziemlich schwierig, da die Wasserstofflinien in diesen Spektren mit den Linien des ioni-

sierten Heliums verschmelzen. Auch bei den Spektren der Be-Sterne bestehen gewisse Schwierigkeiten bei der Bestimmung des BALMER-Dekrements, weil hier die Emissionslinien den Absorptionslinien überlagert sind. Dennoch kann man behaupten, daß sich bei den Be-Sternen das BALMER-Dekrement stark von dem der planetarischen Nebel unterscheidet. Zum Beispiel kommt das Intensitätsverhältnis der Linien $\frac{\mathrm{H}\alpha}{\mathrm{H}\beta}$ in den Spektren der Be-Sterne sowohl größer als 3 als auch kleiner als 3 $\left(\text{im Mittel } \frac{\mathrm{H}\alpha}{\mathrm{H}\beta} = 2{,}25\right)$ vor. Außerdem ändert sich das BALMER-Dekrement nicht nur beim Übergang von einem Stern zum anderen, sondern auch im Lauf der Zeit im Spektrum ein und desselben Sterns.

Die Deutung für ein derartiges Verhalten des BALMER-Dekrements in den Spektren der Be-Sterne besteht darin, daß die Hüllen dieser Sterne neben Teilen, die für die Strahlung in den Linien der Nebenserien durchsichtig sind, d.h. in ihren Bedingungen den Nebeln ähneln, auch Teile besitzen, die für die Strahlung in den Linien dieser oder jener Nebenserien undurchsichtig sind. Die zum Beobachter gelangende Linienstrahlung setzt sich aber aus der Strahlung der verschiedenen Gebiete der Hülle zusammen (mit zeitlich sich ändernden Anteilen).

Einen analogen Charakter hat auch das BALMER-Dekrement in den Spektren der Novae in der Epoche nahe dem Helligkeitsmaximum. Zum Beispiel war im Spektrum der Nova Herculis 1934 innerhalb der ersten drei Monate nach dem Ausbruch das Intensitätsverhältnis der Linien $\frac{\mathrm{H}\alpha}{\mathrm{H}\beta}$ im Mittel gleich 1,9.

Interessant ist, daß in den Spektren einiger Novae einige Monate nach dem Ausbruch ein sehr großes Intensitätsverhältnis der Linien $\frac{\mathrm{H}\alpha}{\mathrm{H}\beta}$ beobachtet wird. So hatte dieses Verhältnis im Spektrum der Nova Lacertae 1936 den Wert 5–6, und im Spektrum RS Ophiuchi 1933 betrug es sogar 10–12. Anscheinend ist dies dadurch zu erklären, daß während der Beobachtungsperiode beträchtliche Teile der Hülle dieser Sterne für Strahlung in den Linien der LYMAN- und BALMER-Serie undurchsichtig waren und für die Strahlung in den Linien anderer Serien durchsichtig. In diesem Falle führt nämlich die Lösung der Gleichungen (28.33) zu solchen großen Werten des Intensitätsverhältnisses $\frac{\mathrm{H}\alpha}{\mathrm{H}\beta}$.

Aus einem genaueren Vergleich der oben dargelegten Theorie mit der Beobachtung kann man eine Reihe wichtiger Charakteristika der Sternhüllen erhalten. Als Beispiel wollen wir die theoretischen und die Beobachtungswerte der Intensitäten der Linien des Wasserstoffs und des ionisierten Heliums in den Spektren der Sterne vom Typ WOLF-RAYET vergleichen. Hierbei wollen wir der Einfachheit halber (und auch, um die Ungenauigkeit der Beobachtungsdaten zu berücksichtigen) annehmen, daß die Hüllen der WOLF-RAYET-Sterne in den Linien der Nebenserien dieser Atome vollständig durchsichtig sind.

Ist die Hülle für Strahlung in den Linien der Nebenserien eines gegebenen Atoms durchsichtig, so ist die Gesamtenergie, die von der Hülle in einer be-

liebigen dieser Linien ausgestrahlt wird, nach Gleichung (28.40) (mit $\beta_{ik} = 1$) gleich

$$E_{ik} = 4\pi A_{ki} h\nu_{ik} \int_{r_0}^{r_1} n_k r^2 dr, \tag{28.46}$$

wobei r_0 der Radius der unteren Grenze der Hülle ist und r_1 der Radius der oberen Grenze des Teils der Hülle, der in den Linien des betrachteten Atoms leuchtet. Zur Bestimmung von n_k dienen die Gleichungen (28.42). Aus ihnen findet man $z_k = \frac{n_k}{n_e n^+}$, die nur von T_e abhängen. Nimmt man an, daß sich T_e in der Hülle nicht ändert, so erhält man an Stelle von (28.46)

$$E_{ik} = 4\pi A_{ki} h\nu_{ik} z_k \int_{r_0}^{r_1} n_e n^+ r^2 dr. \tag{28.47}$$

Zur Berechnung des Integrals (28.47) setzen wir voraus, daß die aus der Hülle ausgestoßenen Atome sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Dann wird nach der Beziehung (28.1) die Dichte in der Hülle umgekehrt proportional dem Quadrat des Radius abnehmen, und wir können schreiben

$$n_e = n_e^0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \quad n^+ = n_0^+ \left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \tag{28.48}$$

worin n_e^0 und n_0^+ die Werte von n_e und n^+ an der inneren Hüllengrenze sind. Setzt man (28.48) in Gleichung (28.47) ein und nimmt zur Vereinfachung $r_1 = \infty$ an, so findet man

$$E_{ik} = 4\pi A_{ki} h\nu_{ik} z_k n_e^0 n_0^+ r_0^3. \tag{28.49}$$

Ein sehr interessantes Ergebnis erhält man bei Benutzung der Gleichung (28.49) zur Bestimmung der relativen Häufigkeiten des Wasserstoffs und Heliums in den Atmosphären der Wolf-Rayet-Sterne [58]. Wendet man (28.49) auf die Linie $\lambda = 4686$ Å des ionisierten Heliums (Übergang $4 \to 3$) und dann auf die Linie Hβ des Wasserstoffs an, so erhalten wir aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{E'_{34}}{E_{24}} = \frac{A'_{43}}{A_{42}} \frac{\nu'_{34}}{\nu_{24}} \frac{z'_4}{z_4} \frac{n'^+_0}{n_0^+}. \tag{28.50}$$

Hierin beziehen sich die gestrichenen Größen auf das ionisierte Helium und die ungestrichenen auf den Wasserstoff (n'^+_0 ist zum Beispiel die Anzahl der zweifach ionisierten Heliumatome in 1 cm³ an der inneren Hüllengrenze). Für den Stern HD 192163 ist das Intensitätsverhältnis der Linien $\lambda = 4686$ Å und Hβ ungefähr gleich 20 [55]. Weiter haben wir $\frac{A'_{43}}{A_{42}} = 16$, $\frac{\nu'_{34}}{\nu_{24}} \approx 1$, $\frac{z'_4}{z_4} \approx 2$ (für $T_e = 50000°$). Mit diesen Werten finden wir aus (28.50) $\frac{n'^+_0}{n_0^+} = 2{,}5$. Wir kommen

also zu dem Schluß, daß in den Atmosphären der WOLF-RAYET-Sterne die Zahl der Heliumatome etwa 2,5mal größer ist als die der Wasserstoffatome. Dieses Ergebnis verdient um so mehr Beachtung, als in den Atmosphären anderer Sterne und auch den planetarischen Nebeln das Verhältnis der Zahl der Heliumatome zur Zahl der Wasserstoffatome etwa $\frac{1}{10}$ beträgt. Demnach besitzen also die Atmosphären der WOLF-RAYET-Sterne eine chemische Zusammensetzung, die sich von der der Atmosphäre anderer Sterne unterscheidet. Diese Tatsache ist ohne Zweifel für unsere Vorstellungen über die Natur der WOLF-RAYET-Sterne von großer Bedeutung, besonders im Hinblick auf die Quellen der Sternenergie, die nach unserem heutigen Wissen Kernreaktionen sind, bei denen Wasserstoff in Helium umgewandelt wird.

Es darf jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß die oben gebrachte Abschätzung des Wasserstoff- und Heliumgehalts in den Atmosphären der WOLF-RAYET-Sterne ziemlich grob ist, da hierbei die mögliche Undurchsichtigkeit der Hüllen der WOLF-RAYET-Sterne für Strahlung in den Linien der Nebenserien der betrachteten Atome sowie einige andere Faktoren nicht berücksichtigt wurden.

Mit Hilfe der Gleichung (28.49) läßt sich auch die Konzentration der freien Elektronen an der inneren Hüllengrenze (d.h. an der Oberfläche der „Photosphäre") abschätzen. Berücksichtigt man, daß in den Atmosphären der WOLF-RAYET-Sterne Helium das verbreitetste Element ist und daß sich die Heliumatome vorwiegend im zweifach ionisierten Zustand befinden, so können wir $n_e = 2\,n'^{+}$ annehmen. Wir erhalten infolgedessen bei der Anwendung der Gleichung (28.49) auf die Linie $\lambda = 4686$ Å des ionisierten Heliums

$$E'_{34} = 4\pi A'_{43} h\nu'_{34} z'_4 \frac{1}{2} n_e^{0^2} r_0^3 . \tag{28.51}$$

Andererseits kann die Energie, die von der Hülle in der Linie $\lambda = 4686$ Å ausgestrahlt wird, durch A_{4686} ausgedrückt werden, die aus der Beobachtung zu finden ist:

$$E'_{34} = \frac{8\pi^2 r_0^2 h\nu'^4_{34}}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu'_{34}}{kT_*}} - 1} A_{4686} . \tag{28.52}$$

Die Beziehungen (28.51) und (28.52) ergeben

$$A'_{43} z'_4 n_e^{0^2} r_0 = \frac{4\pi \nu'^3_{34}}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu'_{34}}{kT_*}} - 1} A_{4686} . \tag{28.53}$$

Zur Bestimmung von n_e^0 aus Gleichung (28.53) muß man außer A_{4686} auch den Radius der Photosphäre r_0 und die Sterntemperatur aus den Beobachtungen kennen. Weil jedoch n_e^0 in Gleichung (28.53) im Quadrat eingeht, sind genaue

Werte dieser Größen zur Abschätzung von n_e^0 nicht notwendig. Wir nehmen $r_0 = 5\,r_\odot$, $T_* = 50000°$ an. Für die WOLF-RAYET-Sterne ist A_{4686} größenordnungsmäßig einige Hundertstel (für den Stern HD 192163 ist z.B. $A_{4686} = 0{,}047$). Mit diesen Daten erhalten wir aus Gleichung (28.53) $n_e^0 = 1{,}5 \cdot 10^{12}$. Dieser Wert wurde oben schon zur Bestimmung der Materiemenge, die jährlich von einem WOLF-RAYET-Stern ausgestoßen wird, benutzt.

§ 29. Physikalische Probleme der Sterne mit hellen Spektrallinien

1. Die Sterntemperaturen

Zur Bestimmung der Temperaturen der Sterne mit hellen Linien in den Spektren läßt sich die Methode benutzen, die ZANSTRA zur Bestimmung der Temperaturen der Zentralsterne planetarischer Nebel vorgeschlagen hat. Diese Methode beruht auf der Annahme, daß sich das Leuchten des Nebels in den Linien irgendeines Atoms auf Kosten der Sternenergie jenseits der Grenze der Hauptserie dieses Atoms vollzieht. Zur Bestimmung der Sterntemperatur dient die Gleichung

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{e^x - 1} = \sum \frac{x_i^3 A_i}{e^{x_i} - 1}. \qquad (29.1)$$

Hierin sind $x_0 = \frac{h\nu_0}{kT_*}$, $x_i = \frac{h\nu_i}{kT_*}$, ν_0 die Ionisierungsfrequenz des Atoms, ν_i die Frequenz der beobachteten Linie, $\nu_i A_i$ das aus der Beobachtung zu erhaltende Verhältnis der Energie, die von dem Nebel in der Linie ausgestrahlt wird, zur Energie in der Einheit des Frequenzintervalls des kontinuierlichen Spektrums nahe der Linie.

Diese Methode wurde zur Bestimmung der Temperaturen von WOLF-RAYET-, P Cygni- und Be-Sternen mehrfach angewandt. In letzter Zeit bestimmte B. A. WORONZOW-WELJAMINOW [59] die Temperaturen von 6 WOLF-RAYET-Sternen und BEALS und HATCHER die Temperaturen von 52 Sternen der Spektralklassen von A 4 bis O 6 mit Emissionslinien im Spektrum.

Die Ergebnisse von B. A. WORONZOW-WELJAMINOW sind in Tabelle 25 aufgeführt. In der ersten Spalte steht die HD-Nummer, in den folgenden Spalten die Sterntemperaturen (in tausend Grad), wie sie aus den Linien der verschiedenen Ionen gefunden wurden (unter dem Symbol des Ions steht dessen Ionisationspotential in eV). Die letzte Spalte wird noch erläutert werden.

Die Ergebnisse von BEALS und HATCHER sind in Abb. 70 wiedergegeben. Auf der Abszisse sind die Spektralklassen, auf der Ordinate die Sterntemperaturen, wie sie aus den Linien von H, He I, Fe II, He II, N III, C III folgen, abgetragen. Die ausgezogene Linie im Diagramm stellt die nach der Ansicht der genannten Autoren wahrscheinlichste Abhängigkeit der Temperaturen von der Spektralklasse dar.

Aus den Beobachtungsdaten ist ersichtlich, daß die für ein und denselben Stern aus den Linien der verschiedenen Atome gefundene Temperatur sehr voneinander abweichende Werte haben kann. Dabei fällt auf, daß die Temperatur mit zunehmendem Ionisationspotential des Atoms, aus dessen Linien sie bestimmt wurde, anwächst. Es ist möglich, daß sich der erwähnte Unterschied in einem gewissen Grad durch eine Abweichung der Sternstrahlung vom

Tabelle 25

Stern	He I 24,5	C III oder N III 47,4	He II 54,2	C IV 64,2	N IV 77,0	T_{sp}
HD 192163	32	65	73	—	84	15
191765	35	62	69	—	75	15
193077	29	51	59	—	74	13
193576	29	48	60	—	62	14
192103	33	64	63	69	—	12
192641	—	59	55	70	—	7

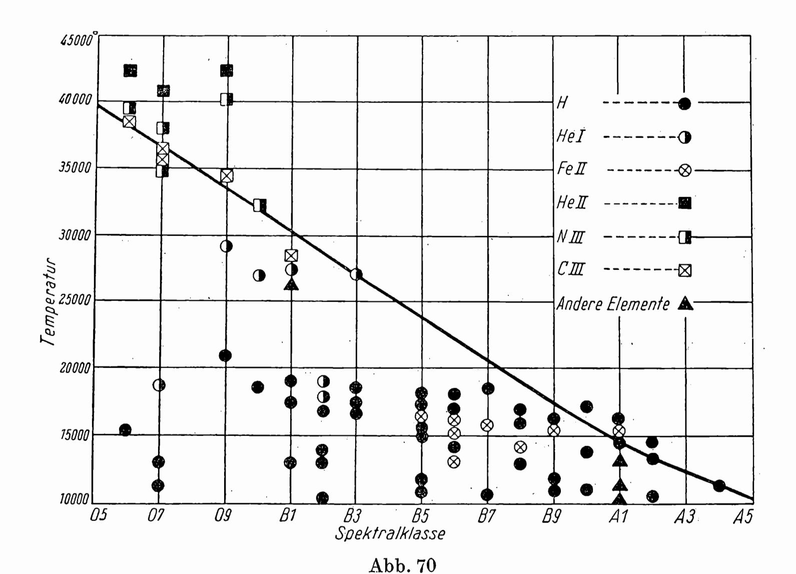


Abb. 70

PLANCKschen Gesetz erklären läßt. Andererseits gibt es eine Reihe von Ursachen für größere Fehler in der Berechnung der Sterntemperaturen nach dieser Methode. Wir zählen die wichtigsten dieser Ursachen auf:

1. Bei der Ableitung der Gleichung (29.1) wurde vorausgesetzt, daß die Hülle die gesamte Sternstrahlung jenseits der Grenze der Hauptserie des Atoms absorbiert, d.h., daß ihre optische Dicke jenseits dieser Grenze größer als 1 ist. Im allgemeinen Falle werden wir an Stelle von (29.1)

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} \left[1 - e^{-\tau_0 \left(\frac{x_0}{x}\right)^3}\right] dx = \sum \frac{x_i^3 A_i}{e^{x_i} - 1} \tag{29.2}$$

haben. Hierin bezeichnet τ_0 die optische Dicke der Hülle unmittelbar nach der Grenze der Hauptserie des Atoms. Außerdem wurde angenommen, daß der Absorptionskoeffizient umgekehrt proportional der dritten Potenz der Frequenz ist $\left(\alpha_\nu \sim \frac{1}{\nu^3}\right)$. Ist $\tau_0 \ll 1$, so führt die Benutzung der Gleichung (29.1) statt (29.2) offensichtlich zu einer Erniedrigung der Sterntemperatur. Dieser Effekt muß für Atome mit relativ niedrigen Ionisationspotentialen infolge ihrer starken Ionisation in den Atmosphären heißer Sterne und dem dadurch bedingten kleinen Wert von τ_0 eine Rolle spielen. Beispielsweise ist die optische Dicke der Atmosphäre von WOLF-RAYET-Sternen jenseits der Grenze der LYMAN-Serie wesentlich kleiner als 1. Infolgedessen ergeben sich ihre Temperaturen aus den Wasserstofflinien zu etwa 20000°, was für WOLF-RAYET-Sterne sehr wenig ist.

2. Strenggenommen müßte die Summation auf der rechten Seite der Gleichung (29.1) über alle Linien der zweiten Serie des Atoms (einschließlich des Kontinuums) erstreckt werden. In der Praxis lassen sich jedoch nur eine oder einige Linien der zweiten oder anderer Serien beobachten. Zur Bestimmung eines genauen Temperaturwertes muß man daher das Verhältnis der Zahl der Quanten, die von der Hülle in der zweiten Serie ausgestrahlt werden, zur Zahl der Quanten in der beobachteten Linie kennen. Da die Zahl der Quanten, die in der zweiten Serie ausgestrahlt werden, gleich der Zahl der Einfänge auf alle Niveaus ist, vom zweiten angefangen, so ist das Verhältnis für eine Linie, die beim Übergang vom k-ten auf das i-te Niveau entsteht, gleich

$$q = \frac{n_e n^+ \sum_{i=2}^{\infty} C_{if}}{n_k A_{ki}}. \tag{29.3}$$

Dieses Verhältnis läßt sich mit Hilfe der Größen $z_k = \frac{n_k}{n_e n^+}$ berechnen, die aus den Stationaritätsbedingungen für die Energieniveaus der Atome bestimmbar sind. Zum Beispiel erhalten wir für die Linie $H\beta$ des Wasserstoffs einen Wert für q von etwa 9 (mit einer sehr schwachen Abhängigkeit von der Elektronentemperatur T_e). Fast denselben q-Wert erhält man auch für die

hellste Linie des ionisierten Heliums $\lambda = 4686$ Å, weil die Atome H und He II sich ähnlich sind und die Übergangswahrscheinlichkeiten A_{42} und A_{43} nahe beieinander liegen.

Ist q bekannt, so läßt sich die Sterntemperatur aus der Gleichung

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{e^x - 1} = q \frac{x_1^3}{e^{x_1} - 1} A_1 \qquad (29.4)$$

bestimmen. Hierin beziehen sich x_1 und A_1 auf die betrachtete Linie. Die Größe q ist jedoch heute noch nicht für alle Atome bekannt. Daher wird im allgemeinen in Gleichung (29.4) der Faktor q entweder überhaupt nicht berücksichtigt oder ein beliebiger Wert eingesetzt. Der Fehler, der damit begangen wird, kann beträchtlich sein. Nimmt man z.B. für die Linie $\lambda = 4686$ Å des ionisierten Heliums $q = 2$ an statt des richtigen Wertes $q = 9$, so erhält man für die Temperatur 60000° an Stelle des richtigen Werts von 70000°.

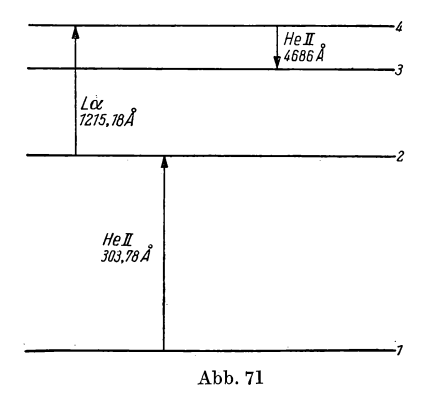


Abb. 71

3. Bei der Herleitung der Gleichung (29.1) wurde angenommen, daß die Hülle in den Linien des Atoms nur auf Kosten der Sternenergie jenseits der Grenze der Hauptserie dieses Atoms leuchtet. In einigen Fällen jedoch kann das Leuchten der Hülle in den Linien eines Atoms auch durch die Strahlung der Hülle in den Linien eines anderen Atoms angeregt werden, wenn nämlich die Frequenzen einzelner Linien dieser Atome zufällig eng benachbart sind. Bei Vorhandensein eines Geschwindigkeitsgradienten in der Hülle nimmt die Wahrscheinlichkeit solcher Prozesse beträchtlich zu. Als Beispiel führen wir die Möglichkeit des Übergangs der He II-Ionen aus dem zweiten in den vierten Zustand unter Wirkung der Strahlung des Wasserstoffatoms in der Linie Lα an (die entsprechenden Wellenlängen sind: $\lambda = 1215{,}18$ Å und $\lambda = 1214{,}68$ Å). Im weiteren kann das He II-Ion spontan aus dem vierten in den dritten Zustand übergehen, und die Linie $\lambda = 4686$ Å ist zu beobachten (Abb. 71). Ein weiteres Beispiel dieser Art ist die mögliche Anregung eines der Niveaus des O III-Ions durch Strahlung der Resonanzlinie des He II, $\lambda = 304$ Å; die Kaskadenübergänge der Elektronen von diesem Niveau sind von der Emission von Quanten im sichtbaren Spektralbereich begleitet. Es ist interessant, daß die Rückkehr des Elektrons im O III-Ion auf das frühere Niveau von Strahlung in der Linie $\lambda = 374$ Å begleitet ist, die ihrerseits eines der Niveaus des N III anregen kann, wodurch das Auftreten einer Reihe zu beobachtender Linien dieses Ions hervorgerufen wird (Abb. 72).

Wenn die erwähnten Ursachen wirken, muß die Sterntemperatur, wenn sie aus den Linien des He II und N III bestimmt wird, offenbar zu hoch sein. Nach Beals und Hatcher ist dies gerade bei den Wolf-Rayet-Sternen der Fall (was in der Kurve auf Abb. 70 zum Ausdruck gebracht werden soll). Die

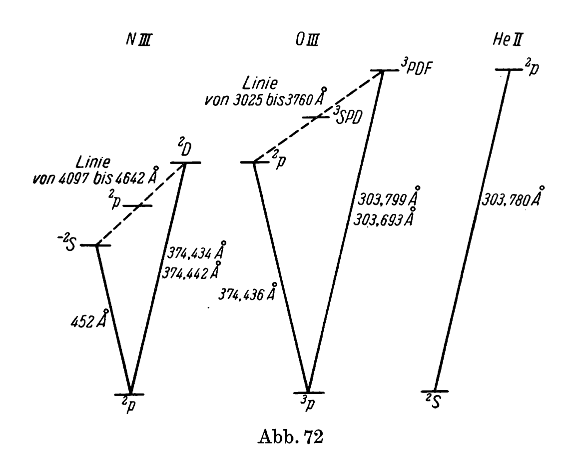


Abb. 72

Temperaturen, die aus den Linien anderer Atome ermittelt werden, liegen infolge der Wirkung der ersten der aufgezählten Ursachen (unvollständige Absorption der Sternenergie jenseits der Grenze der Hauptserie des Atoms durch die Hülle) überwiegend niedriger.

Jedoch auch nach Berücksichtigung der angegebenen Faktoren bleibt es fraglich, ob man die Anwendung der betrachteten Methode zur Bestimmung der Temperaturen der Wolf-Rayet-, P Cygni- und Be-Sterne (sowie Novae im frühen Stadium) als zulässig gelten lassen kann. Wie wir wissen, besitzen die Hüllen dieser Sterne relativ geringe Radien, und der Verdünnungsfaktor der Strahlung ist in ihnen weitaus größer als in den Nebeln. Infolgedessen kommt das Leuchten der betrachteten Hüllen durch kompliziertere Prozesse zustande als das Nebelleuchten. Da wir die Anwendung dieser Methode zur Bestimmung der Sterntemperatur betrachten, wollen wir auf das Leuchten der Hüllen mit kleinem Radius noch etwas näher eingehen.

Wir nehmen an, daß die Hülle aus Atomen besteht, die nur drei Energieniveaus besitzen. Unter der Wirkung der Sternstrahlung vollziehen sich sowohl zyklische Übergänge vom Typ $1 \to 3 \to 2 \to 1$ als auch die umgekehrt verlaufenden vom Typ $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Bei unserer Betrachtung der Nebel wurde gezeigt, daß die Zahl der Übergänge vom ersten Typ um etwa $\frac{1}{W}$mal die der zweiten Art übertrifft. Hierbei wurde jedoch die diffuse Strahlung der Hülle selbst nicht berücksichtigt.

Nun ist aber die Dichte der diffusen Nebelstrahlung in der Frequenz ν_{12} (d.h. in der Lα-Linie, wenn es sich um das Wasserstoffatom handelt) sehr groß. Demzufolge wächst die Zahl der Übergänge vom Typ $1 \to 2 \to 3 \to 1$ stark an. Dennoch ist in den Nebeln infolge der außerordentlichen Kleinheit von W die Zahl dieser Übergänge um vieles kleiner als die Zahl der Übergänge vom Typ $1 \to 3 \to 2 \to 1$. Da nun in den Hüllen mit kleinem Radius der Verdünnungsfaktor nicht so klein wie in den Nebeln ist, kommen die Übergänge vom Typ $1 \to 2 \to 3 \to 1$ darin ungefähr ebenso oft vor wie die vom Typ $1 \to 3 \to 2 \to 1$.

Auf das Wasserstoffatom angewandt, bedeutet dies, daß in Hüllen von kleinem Radius neben den Prozessen der Umwandlung von L_c-Quanten in Quanten niedrigerer Frequenz auch die umgekehrten Prozesse ablaufen, d.h. die Bildung von L_c-Quanten aus Quanten niedrigerer Frequenzen (z.B. $L\alpha + Ba_c \to L_c$, u. a. m.). Die Möglichkeit solcher Prozesse ist dadurch gegeben, daß infolge des hohen Anregungsgrades der Atome in der Hülle ihre optische Dicke jenseits der Grenzen der Nebenserien mit 1 vergleichbar und in den Nebenserienlinien größer als 1 ist.

Es ist klar, daß eine derartige Kompliziertheit des Leuchtvorgangs in den Hüllen gegenüber dem Nebelleuchten eine beträchtliche Abwandlung der Methode von ZANSTRA erfordert. Der Einfachheit halber wollen wir den Fall betrachten, bei dem die optische Dicke der Hülle jenseits der Grenze der LYMAN-Serie wesentlich größer als 1 ist. Dann können wir annehmen, daß aus jedem L_c-Quant, das vom Stern ausgestrahlt wird, in der Hülle früher oder später ein BALMER-Quant entsteht, das die Hülle verläßt. Offenbar kann die Ionisation eines Atoms aus dem angeregten Zustand und die nachfolgende Entstehung eines L_c-Quants die Bildung des BALMER-Quants nur verzögern, denn alle L_c-Quanten, die in der Hülle entstehen, werden auch wieder in ihr absorbiert. Ein Atom, das sich nach Emission eines BALMER-Quants im zweiten Anregungszustand aufhält, kann jedoch durch die Sternstrahlung wieder ionisiert werden (direkt nach der Ausstrahlung des BALMER-Quants oder nach einer Reihe von Streuungen eines Lα-Quants). Es ist leicht verständlich, daß dies zur Emission eines weiteren BALMER-Quants durch die Hülle führt. Dieser Prozeß kann sich einige Male wiederholen, bis letzten Endes beim Übergang des Atoms vom zweiten in den ersten Zustand kein Lα-Quant entsteht, das den Nebel verläßt. So kommen wir also zu dem Schluß, daß BALMER-Quanten in der Hülle nicht nur aus Quanten des LYMAN-Kontinuums entstehen, wie dies bei Nebeln der Fall ist, sondern auch aus den Quanten des BALMER-Kontinuums des Sterns, die in der Hülle absorbiert werden.

Unter Berücksichtigung dieser Überlegungen (die sich natürlich nicht nur auf das Wasserstoffatom, sondern auch auf andere Atome beziehen) müssen wir an Stelle von Gleichung (29.1)

$$\left(1 + \frac{N_2}{N_1}\right) \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{e^x - 1} = \sum \frac{x_i^3 A_i}{e^{x_i} - 1} \qquad (29.5)$$

schreiben. Hierin ist $\frac{N_2}{N_1}$ das Verhältnis der Zahl der Quanten jenseits der Grenze der zweiten Serie des Atoms, die vom Stern emittiert und von der Hülle absorbiert werden, zur Zahl der Quanten, die vom Stern jenseits der Grenze der Hauptserie ausgestrahlt werden.

Die Abschätzung des Verhältnisses $\frac{N_2}{N_1}$ ist ziemlich schwierig. Sie wurde von S. G. GORDELADSE als erstem auf der Grundlage der Anregungs- und Ionisationstheorie in Hüllen mit kleinem Radius, die von V. A. AMBARZUMJAN ausgearbeitet wurde [61], durchgeführt. GORDELADSE fand [62], daß bei der Benutzung der Gleichung (29.1) an Stelle von (29.5) Temperaturen herauskommen, die beträchtlich höher als die wahren sind. Hierbei wird der Fehler um so größer, je höher das Ionisationspotential des Atoms ist. Die Theorie von V. A. AMBARZUMJAN bezieht sich jedoch nur auf ruhende Hüllen oder solche, die sich ohne Geschwindigkeitsgradienten bewegen. Bei Vorhandensein eines Geschwindigkeitsgradienten in der Hülle wird das Verhältnis $\frac{N_2}{N_1}$ wesentlich kleiner, wodurch der Einfluß des erwähnten Effekts wesentlich herabgesetzt wird.

2. Das kontinuierliche Spektrum

Für die Charakterisierung der Strahlung der Sterne vom Typ WOLF-RAYET, P Cygni und Be besitzen neben den Temperaturen, die aus den Emissionslinien zu bestimmen sind, auch die Spektralphotometrischen (Farb-) Temperaturen, die die relative Energieverteilung im sichtbaren Teil des Sternspektrums charakterisieren, große Bedeutung. Da die betrachteten Sterne sehr weit von uns entfernt sind, wird die Energieverteilung in ihren Spektren stark durch die galaktische Absorption des Lichts, beeinflußt die bekanntlich eine „Rötung" der Objekte hervorruft. Die Berücksichtigung dieses Effekts stellt eine ernsthafte Schwierigkeit bei der Bestimmung der spektralphotometrischen Temperaturen der Sterne dar.

Spektralphotometrische Temperaturen von WOLF-RAYET-Sternen wurden von B. A. WORONZOW-WELJAMINOW bestimmt [59]. Er erhielt als mittlere Temperatur von sechs WOLF-RAYET-Sternen im Spektralbereich von 3800 bis 4800 Å den Wert $T = 8400°$ in einer Skala, in der die Temperatur eines A0-Sterns $T = 12000°$ ist. Nach Anbringen einer Korrektur, welche die Absorption des Lichts im Raum berücksichtigt, betrug die mittlere Temperatur $T = 13000°$. Die Temperaturen der einzelnen Sterne finden sich in der letzten Spalte der Tabelle 25.

Die spektralphotometrischen Gradienten von 39 Sternen vom Typ WOLF-RAYET, O und B wurden von PETRI [63] bestimmt. Zur Klärung des Einflusses der interstellaren Rötung wurden die Gradienten mit den Intensitäten der interstellaren Absorptionslinien verglichen. Die nach Korrektion der interstellaren Rötung erhaltenen Resultate für vier Sterngruppen finden sich in nachstehender Tabelle:

Tabelle 26

Gruppe	Gradient	T_1	T_2
WR 5 — WR 8	—0,05	19000°	16000°
O 5 — O 6	—0,42	90000	39500
O 7 — O 9	—0,37	58000	32500
B 0 — B 2	—0,14	24000	18500

In den beiden letzten Spalten dieser Tabelle finden sich die spektralphotometrischen Temperaturen der Sterne, zu deren Berechnung für A0-Sterne Temperaturen von 18000° bzw. 15000° angenommen wurden.

Die spektralphotometrische Untersuchung der Sterne vom Typ B wurde von Barbier und Chalonge durchgeführt [64]. Sie kamen zu dem Schluß, daß Sterne vom Spektraltyp B mit Emissionen im Mittel röter sind als B-Sterne ohne Emissionen.

Aus den zitierten Arbeiten ergeben sich zwei wichtige Resultate:

1. Sterne mit hellen Linien im Spektrum haben eine niedrigere spektralphotometrische Temperatur als Sterne desselben Spektraltyps ohne helle Linien. Dieser Unterschied ist nicht groß, wenn man Sterne der Klassen Be und B vergleicht, aber sehr groß, wenn man Sterne vom Typ Wolf-Rayet und O betrachtet.

2. Die spektralphotometrischen Temperaturen der Sterne mit hellen Spektrallinien sind niedriger als die Temperaturen, die man für diese aus den hellen Linien findet. Diese Abweichung ist für Be-Sterne nicht groß, für Wolf-Rayet-Sterne aber sehr groß.

Die Deutung dieser Beobachtungsergebnisse beruht auf der Existenz von Hüllen um die Wolf-Rayet- und Be-Sterne. Die in diesen Hüllen stattfindende Umwandlung von Sternstrahlung hoher Frequenz in Quanten niedrigerer Frequenzen führt nicht nur zur Ausstrahlung von Energie in den Spektrallinien durch die Hülle, sondern auch im kontinuierlichen Spektrum. Hierbei ist die Energie, die von der Hülle im sichtbaren Bereich des kontinuierlichen Spektrums ausgestrahlt wird, vergleichbar mit der Energie, die vom Stern selbst in diesen Teilen des Spektrums emittiert wird. Da die Strahlung der Hülle einer niedrigeren Temperatur entspricht als die Sternstrahlung, so erhält man die spektralphotometrischen Temperaturen der Sterne mit Hülle auch niedriger als die Temperaturen von Sternen ohne Hülle. Gleichzeitig liegen die Temperaturen, die aus den Emissionslinien bestimmt werden, mehr oder weniger nahe den Temperaturen des Sterns selbst. Dies erklärt die Abweichung zwischen den spektralphotometrischen und den Zanstra-Temperaturen bei Sternen mit Hülle. Es ist klar, daß diese Abweichungen um so stärker sein werden, je mächtiger die Hülle ist. Daher sind sie so scharf bei den Wolf-Rayet-Sternen und so wenig scharf bei den Be-Sternen ausgeprägt.

Wir wollen nun zu einer eingehenderen Deutung des kontinuierlichen Spektrums der Be-Sterne kommen [57, Kap. IV, V], [65]. Wie schon oben gesagt, hindern uns die Hüllen dieser Sterne nicht an der Beobachtung der Absorptionslinien, die in der umkehrenden Schicht des Sterns selbst entstehen. Dies beweist die fast vollständige Durchsichtigkeit der Hüllen der Be-Sterne im sichtbaren Spektralbereich. Da die Absorption des Lichts in den Hüllen der Be-Sterne im wesentlichen durch die Wasserstoffatome erfolgt, so können wir annehmen, daß die optische Dicke dieser Hüllen jenseits der Grenzen der Nebenserien des Wasserstoffatoms nicht über 1 hinausgeht (wenn sie auch einen beträchtlichen Bruchteil von 1 betragen kann).

So finden also in den Hüllen der Be-Sterne die folgenden Prozesse statt: Unter der Wirkung der Sternstrahlung vollzieht sich die Ionisation der Wasserstoffatome sowohl aus dem Grundzustand als auch aus angeregten Zuständen. Hierbei absorbiert die Hülle fast vollständig die Sternstrahlung jenseits der Grenze der LYMAN-Serie und zum Teil auch jenseits der Grenze der anderen Serien. Nach der Ionisation finden Einfänge von Elektronen durch die Protonen sowie frei-frei-Übergänge der Elektronen im Felde der Protonen statt. Die bei diesen Prozessen entstehenden Quanten jenseits der Grenze der Hauptserie werden wiederum fast vollständig in der Hülle absorbiert. Die Quanten jenseits der Grenze der Nebenserien verlassen jedoch in der Mehrzahl ungehindert die Hülle.

Es sei $n_e n^+ \varepsilon'_{i\nu} d\nu$ die Energiemenge, die im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ pro cm³ und sec beim Einfang von Elektronen durch Protonen auf das i-te Niveau ausgestrahlt wird. Weiter sei $n_e n^+ \varepsilon''_\nu \, d\nu$ die Energiemenge, die bei frei-frei-Übergängen von Elektronen im Felde der Protonen im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ pro cm³ und sec ausgestrahlt wird. Für $\varepsilon'_{i\nu}$ und ε''_ν liefert die Quantenmechanik folgende Ausdrücke:

$$\varepsilon'_{i\nu} = \frac{2^9 \pi^5}{(6\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{m}{kT_e}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{10}}{m^2 c^3 h^2} \frac{1}{i^3} e^{\frac{\chi_i - h\nu}{kT_e}}, \tag{29.6}$$

$$\varepsilon''_\nu = \frac{2^7 \pi^3}{(6\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^6}{m^2 c^3} \left(\frac{m}{kT_e}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{h\nu}{kT_e}}. \tag{29.7}$$

Hierin sind die χ_i das Ionisierungspotential aus dem i-ten Zustand und T_e die Temperatur des Elektronengases. Gleichung (29.6) gilt für Frequenzen, die der Bedingung $h\nu > \chi_i$ genügen. Es ist klar, daß die Gesamtenergie, die pro cm³ und sec im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ ausgestrahlt wird, gleich

$$n_e n^+ \varepsilon_\nu d\nu = n_e n^+ \left(\varepsilon''_\nu + \sum_{i=j}^{\infty} \varepsilon'_{i\nu}\right) d\nu \tag{29.8}$$

ist. Mit Hilfe der Gleichungen (29.6) und (29.7) erhalten wir für ε_ν

$$\varepsilon_\nu = \frac{2^7 \pi^3}{(6\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{m}{kT_e}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^6}{c^3 m^2} \left(1 + 2 \frac{h\nu_0}{kT_e} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{i^3} e^{\frac{\chi_i}{kT_e}}\right) e^{-\frac{h\nu}{kT_e}}. \tag{29.9}$$

Hierin ist $j = 2$ im Frequenzintervall von der Grenze der BALMER-Serie bis zur Grenze der LYMAN-Serie, $j = 3$ im Frequenzintervall von der Grenze der PASCHEN-Serie bis zur Grenze der BALMER-Serie, usw.

Da die Hülle für die Eigenstrahlung jenseits der Grenze der Nebenserien als durchsichtig vorausgesetzt wird, ist die Gesamtenergie, die von der ganzen Hülle in der Frequenz ν ausgestrahlt wird, gleich

$$E_\nu^{\text{ges}} = 4\pi\varepsilon_\nu \int\limits_{r_0}^{\infty} n_e n^+ r^2 dr, \tag{29.10}$$

wobei r_0 der Radius der unteren Grenze der Hülle ist. In Gleichung (29.10) wurde der Einfachheit halber angenommen, daß die Hülle Kugelsymmetrie besitzt und die Elektronentemperatur sich in ihr nicht ändert.

Um das Integral (29.10) auszurechnen, muß man den Ionisationsgrad der Atome in den verschiedenen Teilen der Hülle kennen. Wir setzen zunächst voraus, daß die optische Dicke jenseits der Grenze der LYMAN-Serie kleiner als 1 ist, d.h.

$$\tau_0 = k_{\nu_0} \int\limits_{r_0}^{\infty} n_1 dr < 1. \tag{29.11}$$

In diesem Falle können wir die Ionisationsformel, wie sie für die Nebel abgeleitet wurde,

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = Wp \sqrt{\frac{T_e}{T_*}} \frac{(2\pi m k T_*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\frac{h\nu}{kT_*}}, \tag{29.12}$$

benutzen, wobei $W = \frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2$ und p der Bruchteil der Einfänge auf das erste Niveau sind. Für τ_0 finden wir mit Hilfe der Gleichung (29.12)

$$\tau_0 = \frac{k_{\nu_0}}{p} \sqrt{\frac{T_*}{T_e}} \frac{h^3}{(2\pi m k T_*)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{h\nu_0}{kT_*}} \frac{4}{r_0^2} \int\limits_{r_0}^{\infty} n_e n^+ r^2 dr. \tag{29.13}$$

Wir können jetzt den Wert des Integrals $\int\limits_{r_0}^{\infty} n_e n^+ r^2 dr$ aus (29.13) in (29.10) einsetzen. Unter Benutzung der bekannten Ausdrücke für ε_ν und k_{ν_0} erhalten wir

$$E_\nu^{\text{ges}} = 4\pi^2 r_0^2 \tau_0 \frac{2h\nu_0^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu_0}{kT_*}} \frac{kT_*}{h\nu_0} p \left(\frac{1}{2} + \frac{h\nu_0}{kT_e} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{e^{\frac{\chi_i}{kT_e}}}{i^3}\right) e^{-\frac{h\nu}{kT_e}}. \tag{29.14}$$

Gleichung (29.14) hat einen einfachen physikalischen Sinn. Es ist leicht einzusehen, daß die Größe

$$4\pi^2 r_0^2 \tau_0 \frac{2h\nu_0^2}{c^2} e^{-\frac{h\nu_0}{kT_*}} \frac{kT_*}{h}$$

der Teil der Sternenergie jenseits der Grenze der LYMAN-Serie ist, der von der Hülle absorbiert wird, und die Größe

$$p\frac{d\nu}{\nu_0}\left(\frac{1}{2}+\frac{h\nu_0}{kT_e}\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{i^3}e^{-\frac{\chi_i}{kT_e}}\right)e^{-\frac{h\nu}{kT_e}}$$

das Verhältnis der Energie ist, die von der Hülle im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ ausgestrahlt wird, zur gesamten von der Hülle emittierten Energie (mit einer Genauigkeit, mit der die Ionisationsformel abgeleitet wurde). Die Gesamtenergie, die von der Hülle ausgestrahlt wird, muß aber gleich dem Teil der Sternenergie im LYMAN-Kontinuum sein, der von der Hülle absorbiert wird. Daher erhalten wir auch, wenn wir diese beiden letzten Größen miteinander multiplizieren, die Größe $E_\nu^{\text{ges}}d\nu$.

Ist das Gesetz der Dichteänderung in der Hülle bekannt, so kann man τ_0 und E_ν^{ges} durch die Dichte an der inneren Grenze der Hülle ausdrücken. Wir nehmen z. B. an, daß die Dichte in der Hülle umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstands vom Sternzentrum abnimmt. Dann haben wir unter Berücksichtigung dessen, daß für $\tau_0 < 1$ die Hülle vollständig ionisiert ist (d. h., daß in der ganzen Hülle die Ungleichung $\frac{n^+}{n_1} \gg 1$ gilt):

$$n^+ = n_e = n_e^0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2. \tag{29.15}$$

Setzt man n_e und n^+ aus (29.15) in (29.13) und (29.10) ein, so erhält man

$$\tau_0 = \frac{k_{\nu_0}}{p}\sqrt{\frac{T_*}{T_e}}\frac{h^3}{(2\pi mkT_e)^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{h\nu_0}{kT_*}}4n_e^{0^2}r_0 \tag{29.16}$$

und

$$E_\nu^{\text{ges}} = 4\pi\varepsilon_\nu n_e^{0^2}r_0^3. \tag{29.17}$$

Schwieriger ist der Fall für $\tau_0 > 1$. Dann ist der Ionisationsgrad der Atome in der Hülle mit Hilfe der Theorie des Strahlungstransports durch die Hülle zu bestimmen. Diese Theorie ist jedoch komplizierter als die Theorie des Transports der L_c-Strahlung durch den Nebel, da in den Hüllen mit kleinem Radius für $\tau_0 > 1$ die Ionisationen aus angeregten Zuständen eine große Rolle spielen. Wir wollen hier nicht näher auf diese Theorie eingehen. Hervorgehoben sei nur die Tatsache, daß im gegebenen Fall die Energie, die von der Hülle ausgestrahlt wird, die Energie, die sich aus Gleichung (29.14) für $\tau_0 = 1$ ergibt, wesentlich übertreffen kann.

Wie früher erwähnt, kann man das Spektrum eines Be-Sterns als Überlagerung des Hüllenspektrums über das Spektrum eines B-Sterns ansehen. Man kann also die Energie, die von einem Be-Stern in der Frequenz ν ausgestrahlt wird, nach der Gleichung

$$E_\nu = E_\nu^* + E_\nu^{\text{ges}} \tag{29.18}$$

berechnen. Hierin ist E_ν^* die Energie, die in der Frequenz ν von einem B-Stern ausgestrahlt wird. Wir nehmen an, daß der B-Stern wie ein absolut schwarzer Körper der Temperatur T_* strahlt, d.h.

$$E_\nu^* = 4\pi^2 r_0^2 \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT_*}} - 1}. \tag{29.19}$$

Vergleicht man die Formeln (29.14) und (29.19), so findet man, daß bei einer Sterntemperatur von 20000°–30000° und τ_0-Werten, die nicht viel kleiner als 1 sind, das Verhältnis $\frac{E_\nu^{\text{ges}}}{E_\nu^*}$ im sichtbaren Spektralbereich größenordnungsmäßig einige Zehntel ist (im violetten Teil des Spektrums kleiner, im roten größer). Wie schon gesagt, kann für $\tau_0 > 1$ dieses Verhältnis noch beträchtlicher werden. Daher kann sich die Energieverteilung im Spektrum eines Be-Sterns wesentlich von der Energieverteilung im Spektrum eines B-Sterns unterscheiden.

Auf der Grundlage obiger Gleichungen können wir behaupten, daß mit zunehmender Mächtigkeit des Materiestroms aus dem Stern folgende Änderungen in seiner Strahlung beobachtet werden müssen:

Vor allem muß die visuelle Helligkeit des Sterns anwachsen. Dies geht aus den Gleichungen (29.17) und (29.18) hervor. Wendet man diese Gleichungen auf Strahlung der Wellenlänge 5550 Å an, für die unser Auge am empfindlichsten ist, so kann man genähert die Zunahme der Sternhelligkeit mit größer werdendem n_e^0 ausrechnen.

Weiter muß die spektralphotometrische Temperatur des Sterns niedriger werden. Diese Temperatur T_c ist bekanntlich durch die Bedingung

$$\frac{d}{d\nu} \lg E_\nu = \frac{3}{\nu} - \frac{h}{kT_c} \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT_c}}} \tag{29.20}$$

gegeben, worin $\frac{d}{d\nu} \lg E_\nu$ aus der Beobachtung zu finden ist. Nehmen wir an, daß im sichtbaren Spektralbereich die Hüllenstrahlung wesentlich stärker ist als die Sternstrahlung, so können wir an Stelle von E_ν die Größe E_ν^{ges} setzen, und unter Berücksichtigung von

$$E_\nu^{\text{ges}} \sim e^{-\frac{h\nu}{kT_e}}$$

erhalten wir für T_c

$$\frac{h\nu}{k}\left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_e}\right) = 3 \tag{29.21}$$

(hier haben wir das Glied $e^{-\frac{h\nu}{kT_c}}$ gegenüber 1 vernachlässigt). Aus Gleichung (29.21) ist ersichtlich, daß die spektralphotometrische Temperatur der Hülle weit niedriger ist als ihre Elektronentemperatur. Zum Beispiel ist für $T_e = 20000°$ im Bereich der Linie Hβ $T_c = 6700°$. Dies bedeutet, daß sich mit zunehmendem

Einfluß der Hüllenstrahlung die spektralphotometrische Temperatur des Sterns verringert, und zwar beginnend mit dem Wert $T_c = T_*$ bis zu dem Wert T_c, der aus (29.21) folgt.

Mit Zunahme des Materiestroms aus dem Stern muß schließlich der BALMER-Sprung kleiner werden. Wir hatten oben angenommen, daß die Energieverteilung im Sternspektrum durch das PLANCKsche Gesetz gegeben ist. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall. Wie wir aus der Theorie der Photosphären wissen, weicht die Energieverteilung im Spektrum eines B-Sterns sehr stark von der PLANCKschen ab, wobei ein Charakteristikum dieser Verteilung der Intensitätssprung an der Grenze der BALMER-Serie ist. Da nämlich der Absorptionskoeffizient des Wasserstoffatoms jenseits der Grenze der BALMER-Serie (d.h. für $\nu > \nu_2$) größer ist als vor dieser Grenze (d.h. für $\nu < \nu_2$), ist die Intensität der Strahlung im Spektrum des Sterns jenseits der Grenze der BALMER-Serie geringer als davor. Gewöhnlich findet man aus der Beobachtung

$$D = \lg \frac{E_{\nu<\nu_2}}{E_{\nu>\nu_2}}, \tag{29.22}$$

die nach dem Gesagten für „normale" B-Sterne positiv ist. Die Strahlung der Hüllen besitzt jedoch die entgegengesetzte Eigenschaft: Für sie ist D_{ges}, die durch die Gleichung

$$D_{\text{ges}} = \lg \frac{1 + 2\frac{h\nu_0}{kT_e}\sum\limits_{i=3}^{\infty}\frac{1}{i^3}e^{\frac{\chi_i}{kT_e}}}{1 + 2\frac{h\nu_0}{kT_e}\sum\limits_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i^3}e^{\frac{\chi_i}{kT_e}}} \tag{29.23}$$

bestimmt wird, negativ. Daher führt eine Überlagerung der Hüllenstrahlung über die Sternstrahlung zu einer Verkleinerung des BALMER-Sprungs. Mit zunehmender Hüllenstrahlung kann D für Be-Sterne sogar vom Positiven ins Negative übergehen.

Es ist noch zu erwähnen, daß mit zunehmender Energie der Hüllenstrahlung im kontinuierlichen Spektrum auch die Energie, die von den Hüllen in den Spektrallinien ausgestrahlt wird, wachsen muß. Herrschten in den Hüllen der Be-Sterne dieselben Bedingungen wie in den Nebeln, so bliebe bei gegebener Elektronentemperatur das Verhältnis der Intensität einer beliebigen Linie zur Intensität einer beliebigen Stelle im Kontinuum (Linien und Kontinuum der Hauptserie ausgenommen) immer konstant. Die Hüllen mit kleinem Radius sind jedoch im Unterschied zu den Nebeln für die Strahlung in den Nebenserienlinien nicht durchsichtig, und es können in ihnen Ionisationen aus angeregten Zuständen stattfinden. Dies führt zu einer Neuverteilung der Energie zwischen Linien und Kontinuum, wobei, wie leicht zu verstehen ist, die Strahlung im Kontinuum gegenüber der in den Linien zunimmt. Entsprechende Berechnungen sind leicht auf der Grundlage der in Abschnitt 4, § 28, gebrachten Theorie und der Gleichungen dieses Abschnitts auszuführen.

Die aufgezählten theoretischen Schlußfolgerungen über die Eigenschaften der Spektren der Be-Sterne stimmen gut mit den Beobachtungen überein. Am

anschaulichsten kommt dies in den Arbeiten von W. G. GORBATZKI über einen der auffallendsten Be-Sterne, γ Cassiopeiae, zum Ausdruck [66]. Dieser helle Stern ($+\ 2^m$) zeigt unregelmäßige Veränderungen der Helligkeit und des Spektrums, die in der Periode von 1936–1941 besonders ausgeprägt waren. Das Studium des umfangreichen Beobachtungsmaterials über diesen Stern führte zu dem Schluß, daß in der erwähnten Periode dreimal die Stärke des Materiestroms aus dem Stern anwuchs und danach wieder absank (grob gesagt, der Stern stieß nacheinander drei Hüllen ab). Dabei wuchs jedesmal mit zunehmendem Materiestrom aus dem Stern seine Helligkeit, die spektralphotometrische Temperatur sank, der BALMER-Sprung D verkleinerte sich, und die Intensität der BALMER-Linien (Hδ, Abb. 73) nahm zu.

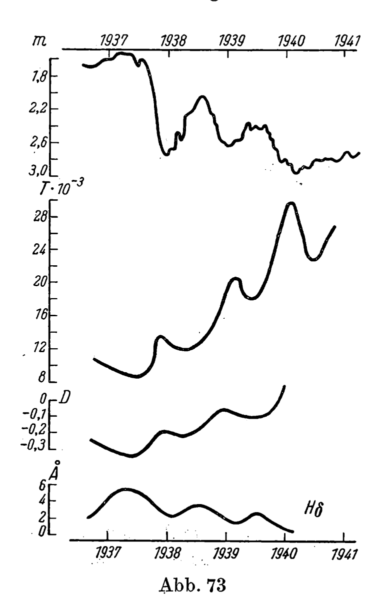


Abb. 73

Ein ausführlicher Vergleich der Theorie mit der Beobachtung ermöglichte W. G. GORBATZKI die Bestimmung einiger Charakteristika von γ Cassiopeiae. Nach seinen Rechnungen ist der Photosphärenradius gleich drei Sonnenradien, die Sterntemperatur gleich 34000°, die Zahl der freien Elektronen pro cm³ an der Sternoberfläche $10^{12}-10^{13}$ und die mittlere Elektronentemperatur der Hülle 15000° bis 20000°.

Wir wollen nun zu den WOLF-RAYET-Sternen übergehen. Das Leuchten der Hüllen dieser Sterne geschieht im Prinzip ebenso wie das Leuchten der Hüllen der Be-Sterne, jedoch sind die WOLF-RAYET-Sterne weitaus heißer als die Be-Sterne. Aus diesem Grunde wirken bei der Bildung des kontinuierlichen Spektrums der WOLF-RAYET-Sterne nicht nur Wasserstoffatome mit, sondern auch Atome mit höheren Ionisationspotentialen.

Eine andere wesentliche Eigenart des Leuchtvorgangs in den Hüllen der WOLF-RAYET-Sterne stellt die große Rolle der Streuung der Strahlung an freien Elektronen dar. Um dies zu beweisen, berechnen wir die optische Dicke der „Atmosphäre" eines WOLF-RAYET-Sterns, hervorgerufen durch Elektronenstreuung (wir erinnern uns daran, daß man die Hülle eines WOLF-RAYET-Sterns, etwas gekünstelt, in eine „Photosphäre" und eine „Atmosphäre" einteilen kann). Bezeichnen wir die erwähnte Größe durch τ_e, so haben wir

$$\tau_e = \sigma_0 \int_{r_0}^{\infty} n_e \, dr, \tag{29.24}$$

wobei σ_0 der Streukoeffizient pro Elektron und r_0 der Radius der Photosphäre sind. Wir nehmen wie früher an, daß die Dichte der Materie in der Hülle eines WOLF-RAYET-Sterns umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes vom Sternzentrum abfällt. Dann finden wir an Stelle von (29.24)

$$\tau_e = \sigma_0 n_e^0 r_0. \tag{29.25}$$

Zur Abschätzung von τ_e setzen wir $r = 5\, r_\odot$ und $n_e^0 = 1{,}5 \cdot 10^{12}$; σ_0 ist bekanntlich $0{,}67 \cdot 10^{-24}$. Damit ergibt die Gleichung (29.25) $\tau_e = \frac{1}{3}$. Wir sehen, daß die optische Dicke der „Atmosphäre" der WOLF-RAYET-Sterne, bedingt durch Elektronenstreuung, sehr groß ist. Offensichtlich folgt die untere Grenze der „Atmosphäre" auch aus der Bedingung, daß für sie τ_e von der Größenordnung 1 ist.

Zum Vergleich wollen wir die optische Dicke der „Atmosphäre" jenseits der Grenze der LYMAN-Serie berechnen. Wir benutzen hierzu Gleichung (29.16). Setzen wir $r = 5\, r_\odot$, $n_e^0 = 1{,}5 \cdot 10^{12}$, $T_* = 50000°$ und berücksichtigen, daß $k_{\nu_0} = 0{,}5 \cdot 10^{-17}$ ist, so erhalten wir $\tau_0 = 0{,}03$. Folglich ist $\tau_e \gg \tau_0$, d.h., in den Atmosphären der WOLF-RAYET-Sterne spielt die Streuung der Strahlung durch freie Elektronen eine größere Rolle als die Absorption durch Wasserstoffatome. Mit zunehmender Tiefe in der Photosphäre nimmt jedoch die Rolle der Elektronenstreuung allmählich gegenüber der Rolle der Absorption durch die Atome wieder ab. Dies ist dadurch bedingt, daß der Volumkoeffizient der Streuung durch freie Elektronen proportional n_e ist, der Volumkoeffizient der Absorption aber proportional $n_e n^+$. Mit zunehmender Tiefe in der Photosphäre wächst jedoch die Materiedichte.

Wegen der großen Rolle der Elektronenstreuung in den Hüllen der WOLF-RAYET-Sterne besitzt die Strahlung dieser Sterne eine Reihe interessanter Eigenschaften. Die wichtigste von ihnen ist die Polarisation der Sternstrahlung. Selbstverständlich kommt diese Eigenschaft nicht nur den WOLF-RAYET-Sternen zu, sondern auch anderen Sternen von hinreichend hoher Temperatur und genügend kleiner Dichte der äußeren Schichten. Zur Erklärung des Polarisationsgrades der Sternstrahlung wurde das Problem des Strahlungstransports durch eine reine Elektronenphotosphäre, die aus planparallelen Schichten besteht, gelöst [67], [68]. Es zeigte sich, daß der Polarisationsgrad der Strahlung eines Sterns, der eine solche Photosphäre besitzt, von Null im Zentrum der Sternscheibe bis 12,5% am Rande wächst, wobei die Strahlung in Richtung des Radius polarisiert ist. Es ist klar, daß eine Strahlung, die von der ganzen Scheibe eines kugelsymmetrischen Sterns ausgeht, unpolarisiert erscheint. Daher ist es zur Entdeckung dieses Effekts notwendig, Bedeckungsveränderliche zu beobachten, deren eine Komponente ein heißer, die andere ein kühler Stern ist. Dann wird bei Bedeckung des heißen Sterns durch seinen kühlen Begleiter die Strahlung des Systems zu einem gewissen Grade, wenn auch nur sehr schwach, polarisiert sein. Dieser Effekt, der von der Theorie vorausgesagt wurde, ist dann tatsächlich auch bei einer Reihe Bedeckungsveränderlicher beobachtet worden.

Besonders interessant ist eine bei den erwähnten Beobachtungen entdeckte ganz neue Erscheinung, die Polarisation des Sternlichts außerhalb der Bedeckung sowie die Polarisation des Lichts einzelner Sterne [69], [70]. Den größten Polarisationsgrad (etwa 6%) weisen einige WOLF-RAYET-Sterne auf. Eine Erklärung für diese Erscheinung konnte bis heute noch nicht gefunden werden. Es ist möglich, daß sie durch Streuung des Lichts durch freie Elektronen in Hüllen, die keine Kugelsymmetrie besitzen, hervorgerufen wird. Man vermutet auch, daß das Sternlicht beim Durchgang durch das interstellare Medium polarisiert wird.

3. Sterne später Spektralklassen mit hellen Linien

Außer in den Spektren der Sterne vom Typ WOLF-RAYET, P Cygni und Be, die zu den frühen Spektralklassen gehören, begegnet man Emissionslinien auch in den Spektren von Sternen später Spektralklassen. Zu ihnen gehören vor allem die langperiodischen Veränderlichen, von denen die Mehrzahl helle Linien des Wasserstoffs, des ionisierten Eisens (um das Helligkeitsmaximum) und des neutralen Eisens (um das Helligkeitsminimum) zeigen. Ein anderes

Tabelle 27

Typ	Me	Se	Ne
H α	2	15	10
H β	2	12	10
H γ	20	5	5
H δ	30	3	2

Beispiel für solche Sterne sind Sterne vom Typ Z Andromedae. Ihre Spektren bestehen aus einer Kombination eines kontinuierlichen und eines Absorptionsspektrums späten Spektraltyps und einem Emissionsspektrum, das zu Atomen mit sehr hohen Ionisationspotentialen gehört (z.B. He II).

Sehr interessant ist das BALMER-Dekrement in den Spektren der langperiodischen Veränderlichen. Entsprechende Angaben finden sich in Tabelle 27. Wir sehen, daß das BALMER-Dekrement in den Sternen vom Typ Me völlig anomal ist. Dies wird jedoch nicht durch die Wirkung eines unbekannten Anregungsmechanismus der Atome hervorgerufen, sondern wie G. A. SCHAIN [71] gezeigt hat, ist die Ursache des anomalen BALMER-Dekrements die Absorptionswirkung des Titanoxyds. In den Spektren der Sterne vom Typ Se und Ne, in denen die Banden des Titanoxyds fehlen, ist auch das BALMER-Dekrement vollkommen normal. Interessant ist auch, daß in den Spektren der langperiodischen Veränderlichen die hellen Wasserstofflinien in mehrere Komponenten

aufspalten. Wie unlängst aufgeklärt wurde, beruht eine derartige, ungewöhnliche Struktur der Emissionslinien auf einer Abschirmung der Wasserstoffstrahlung in den Sternatmosphären, die von Atomen nichtionisierter Metalle herrührt. Aus diesen Tatsachen kann man schließen, daß die Emissionslinien hauptsächlich in tieferen Schichten der Atmosphäre entstehen als die Absorptionslinien.

Wertvolle Schlüsse lassen sich auch aus den Radialgeschwindigkeiten der langperiodischen Veränderlichen ziehen. Bekanntlich erfolgt mit den Helligkeitsschwankungen dieser Sterne auch eine Änderung der Linienverschiebungen. Interessant dabei ist, daß die Verschiebungen der Emissions- und Absorptionslinien nicht gleich sind. Dies spricht erneut für die Entstehung der Emissionen und Absorptionen in verschiedenen Atmosphärenschichten. Eine statistische Betrachtung der Radialgeschwindigkeiten der langperiodischen Veränderlichen führt zu folgenden Ergebnissen:

1. Die Differenz der Radialgeschwindigkeiten, die aus den Emissions- und Absorptionslinien gefunden wurden, ist immer negativ ($v_e - v_a < 0$).

2. Das K-Glied, das aus den Emissionslinien bestimmt wird, beträgt ungefähr — 15 km/sec.

3. Das K_a-Glied, das aus den Absorptionslinien bestimmt wird, ist etwa Null.

Aus diesen Daten geht hervor, daß die Schicht, in der die Emissionslinien entstehen, sich auf den Beobachter zu bewegt, mit anderen Worten, aus den langperiodischen Veränderlichen strömt Materie aus. Diese Schlußfolgerung wurde von G. A. Schain als erstem geäußert [72]. Einige Zweifel entstehen dabei, weil $K_a \approx 0$. Aus verschiedenen Gründen ist es allerdings möglich, daß dieser K_a-Wert übertrieben ist. Wenn dies der Fall ist, scheint die Hypothese vom Ausschleudern der Materie aus den langperiodischen Veränderlichen ziemlich wahrscheinlich. Der Materieausstoß ist dabei nicht stationär, sondern besitzt einen veränderlichen Charakter. Die ausgeschleuderte Materie selbst muß eine beträchtliche Bremsung erfahren.

Die aufgezählten Resultate sind für das Verständnis der Natur der Sterne später Spektralklassen mit Emissionslinien sehr wichtig. Insbesondere sind sie für die Lösung folgender Grundfrage, die im Zusammenhang mit den betrachteten Sternen auftaucht, bedeutungsvoll. Aus welchen Ursachen entstehen die Emissionslinien in den Spektren so kühler Sterne? Die Ultraviolettenergie eines Sterns der Temperatur von 2000°–3000° reicht offensichtlich nicht dazu aus, daß Emissionslinien auf Kosten dieser Energie entstehen können.

Um der Lösung der gestellten Frage näher zu kommen, werden wir sie „umdrehen", d.h. so stellen: Ein heißer Stern ist umgeben von einer ausgedehnten und verdünnten Hülle; in dieser Hülle entstehen Emissionslinien durch Umwandlung ultravioletter Sternenergie. Kann nun nicht die Hülle unter bestimmten Bedingungen neben den Emissionslinien auch ein Spektrum von spätem Typ, sowohl kontinuierlich als auch linienhaft ergeben?

Es wurde früher von uns gezeigt, daß mit zunehmender optischer Dicke der Hülle die spektralphotometrische Temperatur des Objekts niedriger wird. Dadurch erklärte sich die Abweichung zwischen der Zanstra-Temperatur und der

spektralphotometrischen Temperatur der Sterne vom Typ Be und WOLF-RAYET. Mit den gleichen Abweichungen, nur in noch schärferer Form, haben wir es tatsächlich auch bei Sternen später Spektralklassen mit Emissionslinien zu tun. Man kann daher annehmen, daß sich die Sterne später Spektralklassen mit Emissionslinien von den Sternen früher Spektralklassen mit Emissionslinien nur durch eine noch größere optische Dicke der Hülle unterscheiden. Mit anderen Worten, die Sterne der späten Spektralklassen mit Emissionslinien muß man offensichtlich als heiße Sterne ansehen, die von sehr ausgedehnten Hüllen von großer optischer Dicke im kontinuierlichen Spektrum umgeben sind. Die Prozesse, die sich in solchen Hüllen abspielen, kann man kurz folgendermaßen beschreiben: Die inneren Teile der Hülle absorbieren die Sternstrahlung vollständig und wandeln sie in Quanten niedrigerer Frequenzen um. Dabei entsteht ein kontinuierliches Spektrum von spätem Typ, und gleichfalls erscheinen Emissionslinien verschiedener Atome. Bis zu den äußeren Teilen der Hülle dringt die Sternstrahlung fast gar nicht vor, so daß diese nur der Wirkung der Strahlung der Hülle selbst, die einer niedrigeren Temperatur entspricht, unterliegen. In diesen Bereichen finden sich nichtionisierte Metallatome und Moleküle. Hier entsteht das Absorptionsspektrum von spätem Typ [57, Kap. V].

Die oben dargelegte Hypothese wird im großen und ganzen durch die Beobachtung bestätigt. Beispielsweise steht mit ihr die Tatsache, daß die hellen Linien in den Spektren langperiodischer Veränderlicher in tieferen Schichten der Hülle entstehen als die Absorptionslinien und -banden, in vollem Einklang. Wie wir uns erinnern, wird dies dadurch nachgewiesen, daß die Emissionslinien durch Molekülbanden und die Linien nichtionisierter Metalle abgeschirmt werden. Weiter sei erwähnt, daß in der Epoche um das Helligkeitsmaximum, d. h., wenn die Abschirmung minimal ist, das Emissionsspektrum der langperiodischen Veränderlichen dem der Sterne vom Typ Be und der Novae zur Zeit des Auftretens von Emissionslinien sehr ähnlich ist. Diese Tatsache kann als direkter Hinweis auf die Gleichheit des Anregungsmechanismus der Emissionslinien in allen erwähnten Fällen angesehen werden.

Zugunsten der dargelegten Hypothese sprechen auch die Änderungen in den Spektren der Sterne vom Typ Z Andromedae. Diese Änderungen sind so radikal, daß sich ein Stern späten Typs in einen solchen frühen Typs umwandelt. Dies war beim Stern Z Andromedae selbst im Jahre 1939 der Fall. Diese Umwandlungen lassen sich durch eine große Änderung der Stärke des Materiestroms aus dem Stern und demzufolge eine Änderung der optischen Dicke der Hülle erklären. Zuweilen sind die Spektren der genannten Sterne Kombinationen zweier kontinuierlicher Spektren, eines frühen und eines späten. In diesen Fällen sind nach der dargelegten Interpretation die Spektren des Sterns und der Hülle in ihrer Helligkeit vergleichbar. Dabei gehört dann, grob ausgedrückt, das rote Ende des „kombinierten" Spektrums zur Hülle und das violette zum Stern.

Nach der dargelegten Hypothese können sich Sterne von spätem Spektraltyp mit Emissionslinien durch eine weitere Vergrößerung der optischen Dicke der Hülle in Sterne später Spektralklassen ohne Emissionslinien umwandeln. So entstehen anscheinend die „gewöhnlichen" kühlen Überriesen. Im Zusam-

menhang damit sei darauf hingewiesen, daß die Massen und Leuchtkräfte der Überriesen vom Typ M denen der Sterne vom Typ O und B gleichen. Schon diese Tatsache zwingt zu der Vermutung, daß kein wesentlicher Unterschied im inneren Aufbau der betrachteten Sterne besteht.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir, daß auch andere Hypothesen zur Erklärung der Entstehung von Spektren später Spektralklassen mit Emissionslinien vorgeschlagen wurden. Die größte Beachtung verdient die Hypothese von Bernau, der die Sterne vom Typ Z Andromedae als Doppelsterne, bestehend aus einer „blauen" und einer „roten" Komponente, betrachtet. Bis heute wurde jedoch in keinem Falle ein überzeugender Beweis für diese Hypothese erhalten.

4. Sternassoziationen

Alle oben betrachteten Sterne mit hellen Spektrallinien besitzen sehr hohe Leuchtkräfte. Neben ihnen wurden jedoch auch Zwergsterne mit Emissionslinien im Spektrum entdeckt. Die bemerkenswertesten unter ihnen sind die Veränderlichen vom Typ T Tauri. Diese Sterne gehören zu den Spektralklassen G bis M und besitzen Emissionslinien von H, Ca II, Fe II, u.a. An ihrer violetten Seite sind Absorptionslinien sichtbar. Dies zwingt zu der Annahme, daß auch aus den Sternen vom Typ T Tauri, ebenso wie auch aus anderen Sternen mit ähnlichen Linienkonturen, sich ein Ausströmen von Materie vollzieht.

Sehr eigenartig ist die räumliche Verteilung der Sterne vom Typ T Tauri. Diese Verteilung diente V. A. Ambarzumjan als Ausgangspunkt für die Entdeckung und Untersuchung eines neuen Typs von Sternsystemen, der Sternassoziationen [73], [74].

Ambarzumjan fiel auf, daß fast alle bis 1947 bekannten Sterne vom Typ T Tauri sich in zwei nicht sehr großen Gebieten des Himmels befinden. In einem dieser Gebiete, in den Sternbildern Taurus und Auriga, konzentrieren sich acht Sterne vom Typ T Tauri und ungefähr 40 andere Zwergsterne mit Emissionslinien im Spektrum. Wie später P. N. Cholopow zeigte, gehört die Mehrzahl der letzteren ebenfalls zu den T-Tauri-Veränderlichen. Die Entfernung bis zu dieser Sterngruppe beträgt etwa 100 parsec, ihr linearer Durchmesser etwa 25 parsec. Die andere Gruppe der T-Tauri-Veränderlichen mit 7 Veränderlichen dieser Art liegt in den Sternbildern Aquila und Ophiuchus und ist anscheinend weiter von uns entfernt als die erstgenannte.

Weiter bemerkte V. A. Ambarzumjan, daß heiße Sterne (vom Typ O und B) ebenfalls die Tendenz haben, Haufen zu bilden. Von ihm und seinen Mitarbeitern wurden mehr als zwanzig Gruppen solcher Sterne gefunden. Besonders interessant ist, daß die Mehrzahl der Wolf-Rayet- und P-Cygni-Sterne und auch viele Be-Sterne in diesen Gruppen vorkommen. Ein charakteristisches Beispiel einer derartigen Gruppe heißer Sterne ist das System, das den Doppelsternhaufen χ und h Persei umgibt. Dieses System enthält einige zehn Überriesen vom Typ B, darunter fünf P-Cygni-Sterne. Der Sternhaufen ist der Kern dieses Systems. Der Durchmesser des Systems beträgt etwa 170 parsec, seine Entfernung ungefähr 2000 parsec.

Die erwähnten Sterngruppen wurden von V. A. Ambarzumjan Sternassoziationen genannt (entsprechend den T- und O-Assoziationen). Es sei hervorgehoben, daß ein großer Unterschied zwischen den Assoziationen und Sternhaufen besteht. Während die Dichte der Sternhaufen die mittlere Dichte des umgebenden Sternfeldes wesentlich übertrifft, ist die Dichte der Assoziationen klein im Vergleich zu dessen Dichte. Jedoch treten die Assoziationen hinsichtlich ihrer partiellen Dichte stark hervor, d.h. der Dichte einer bestimmten Klasse von Sternen (Zwergsterne mit Emissionslinien im Spektrum in einem Falle, Überriesen vom Typ O und B im anderen). Aus diesem Grunde wurden ja die Assoziationen überhaupt erst entdeckt.

Von großer Bedeutung sind die Folgerungen, die von V. A. Ambarzumjan aus der Tatsache der Existenz solcher Sternassoziationen gezogen wurden.

Es ist unwahrscheinlich, daß die Assoziationen bei zufälligen Begegnungen von Sternen gebildet wurden. Daher muß man annehmen, daß die Sterne der Assoziationen von ihrer Entstehung an miteinander verbunden sind. Wie die Rechnungen zeigen, ist jedoch diese Verbindung nicht sehr fest, die Assoziationen müssen sich schnell unter der Wirkung der Anziehung der anderen Sterne auflösen. Nichtsdestoweniger werden sie heute beobachtet, was offensichtlich dafür spricht, daß die Assoziationen und damit die in ihnen vorkommenden Sterne erst vor relativ kurzer Zeit entstanden sind. Nach einer Schätzung geht ihr Alter nicht über 10^7 Jahre hinaus. Das mittlere Alter der „gewöhnlichen“ Sterne beträgt aber bekanntlich 10^9 bis 10^{10} Jahre. Die Sternassoziationen müssen also sehr junge Gebilde sein.

Diese Schlußfolgerung über die außerordentliche Jugend der Sternassoziationen, die aus dynamischen Überlegungen resultiert, wird auch durch astrophysikalische Daten bestätigt. Wie schon gesagt, kommen in den Sternassoziationen Wolf-Rayet-, P Cygni-, Be- und andere Sterne vor, die Materie ausstoßen. Die Materiemenge, die von jedem dieser Sterne jährlich ausgeschleudert wird, macht 10^{-6} bis 10^{-5} Sonnenmassen aus. Es ist klar, daß dieser Prozeß nicht länger als 10^6–10^7 Jahre dauern kann. Sterne, die Materie ausstoßen, müssen daher schnell den Übergang von einem stabilen Zustand großer Masse in einen anderen mit kleiner Masse durchführen. Sterne mit Massen, die diejenigen der Sterne vom Typ Wolf-Rayet, P Cygni und Be übertreffen, sind uns jedoch nicht bekannt. Wir müssen also wiederum schließen, daß die betrachteten Sterne und damit auch die Assoziationen, in denen sie vorkommen, direkt aus der prästellaren Phase der Materie entstanden sind, und dies außerdem erst vor relativ kurzer Zeit.

So setzt sich die Bildung von Sternen, die vor einigen Milliarden Jahren begonnen hat, auch heute noch in unserem Milchstraßensystem fort. Dieser Schluß ist darum besonders wichtig, weil er die idealistischen Behauptungen einer Reihe von ausländischen Astronomen über die gleichzeitige Entstehung aller Sterne widerlegt.

Es ist schwer, daran zu zweifeln, daß sich in den frühesten Epochen des Milchstraßensystems die Bildung von Sternen über Assoziationen vollzogen hat. Man muß sich also den Prozeß der Entwicklung des Milchstraßensystems als allmähliches Ausscheiden von Sterngruppen (d.h. Assoziationen) aus prästellarer

Materie vorstellen. Wie schon gesagt, sind die Assoziationen dynamisch instabil und lösen sich schnell auf. Infolgedessen vermischen sich die Sterne der Assoziationen mit anderen, früher gebildeten Sternen. Gleichzeitig läuft der Prozeß der Sternentwicklung ab. Zu Beginn ihres Daseins sind die Sterne ebenso instabil wie die Assoziationen, wovon das Ausstoßen von Materie zeugt. Im Laufe der Zeit werden sie durch Materieausstoß stabil und gehen in „gewöhnliche“ Sterne über. Wesentlich dabei ist, daß die entstehenden Sterne sowohl Riesen als auch Zwerge sind (da sie über O- und T-Assoziationen entstehen). Mit anderen Worten, die Sterne „treten“ in das HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramm nicht nur am Anfang der Hauptreihe „ein“, sondern auch in ihren anderen Teilen, d.h. „auf der ganzen Front der Hauptreihe“.

Von den anderen Resultaten, die aus der Untersuchung der Sternassoziationen gefunden wurden, ist am wichtigsten, daß in den Assoziationen viele Doppel- und Mehrfachsysteme anzutreffen sind. So sind anscheinend z.B. die meisten WOLF-RAYET-Sterne Komponenten enger Sternpaare. Viele der Sterne vom Typ T Tauri haben visuelle Begleiter. Diese Tatsachen werfen ein neues Licht auf die Entstehung von Doppelsternen. Früher wurde bekanntlich angenommen, daß die Doppelsterne entweder durch Teilung eines Sterns oder durch Einfang eines Sterns durch einen anderen entstehen. Wir sehen jedoch jetzt, daß schon in den Assoziationen, d.h. unter den jüngsten Sternen, viele Doppel- und Mehrfachsterne vorkommen. Infolgedessen erscheint die Annahme, daß die Sterne erst im Laufe ihres langen Lebens zu einem Begleiter gelangen, unrichtig. Sie entstehen vielmehr gleich entweder als Einzel- oder als Mehrfachsterne. Es ist möglich, daß kein prinzipieller Unterschied zwischen den Mehrfachsternen und dem Sonnensystem besteht. Dann wäre die dargelegte Hypothese auch für die Kosmogonie des Sonnensystems von Bedeutung.

Interessant ist auch, daß ein großer Unterschied zwischen den Mehrfachsystemen innerhalb und außerhalb der Assoziationen besteht. Gewöhnlich besitzen die Mehrfachsysteme außerhalb der Assoziationen Abstände zwischen ihren Komponenten von unterschiedlicher Größenordnung. Zum Beispiel ist ein Dreifachsystem so angeordnet, daß zwei Sterne (A und B) eng benachbart sind und der dritte (C) weit von ihnen entfernt liegt. Der Umlauf der Sterne in einem solchen System erfolgt genähert als KEPLER-Bewegung des Sterns B um A und als KEPLER-Bewegung des Sterns C um das Paar AB. Ganz analog sind die Vierfachsysteme aufgebaut. Sie bestehen gewöhnlich aus zwei Paaren eng benachbarter Sterne in ziemlich großer Entfernung voneinander. Es hat sich herausgestellt, daß nur solche Systeme stabil sind. Würde sich ein Mehrfachsystem mit annähernd gleichen Abständen zwischen den Komponenten bilden, so zerfiele es ziemlich schnell wieder oder wandelte sich in ein System mit Entfernungen verschiedener Größenordnung zwischen den Komponenten um (z.B. in ein System des oben beschriebenen Typs).

In den Assoziationen begegnet man aber gerade Mehrfachsystemen mit Abständen gleicher Größenordnung zwischen den Komponenten. Diese wurden von V. A. AMBARZUMJAN und B. E. MARKARJAN Systeme vom Trapeztyp (in Analogie zu dem bekannten Trapez im Orion, das zur Orionassoziation gehört) genannt. Es ist einleuchtend, daß die Existenz von Mehrfachsystemen

vom Trapeztyp in den Sternassoziationen als ein weiterer Beweis für die Jugend der Assoziationen angesehen werden muß [75].

Ohne Zweifel werden weitere Untersuchungen an den Sternassoziationen zu neuen Resultaten führen, die für die Kosmogonie von großer Bedeutung sind. Man wird wohl schon für die nächsten Jahre die Antwort auf die Frage nach der Natur der Materie, aus der sich die Sterne bilden, erwarten können.

KAPITEL VII

Der innere Aufbau der Sterne

§ 30. Zusammenfassung

1. Problemstellung

Der innere Aufbau der Sterne ist eins der schwierigsten Probleme der theoretischen Astrophysik. Es bestehen hier noch sehr viele ungeklärte Fragen; viele Einzelheiten sind völlig unerforscht. Daher wollen wir uns mit einem grundlegenden Überblick begnügen, der für eine Vorstellung über die Wege zur Lösung dieser Probleme nötig ist. Auf die Varianten der einzelnen Modelle des inneren Aufbaus der verschiedenen Sterntypen, die auf mehr oder weniger willkürlichen Annahmen beruhen, werden wir überhaupt nicht eingehen. Der Wert der überaus großen Zahl dieser ausgearbeiteten schematisierten Modelle erscheint uns doch recht bedingt zu sein.

Wir betrachten die statischen (nicht veränderlichen) Sterne im Gleichgewichtszustand und werden Kugelsymmetrie der Sterne voraussetzen, d.h. also, eine Rotation, die eine Abweichung von der Kugelsymmetrie hervorrufen würde, vernachlässigen. Dann sind alle Größen, die den physikalischen Zustand eines Sterns kennzeichnen (Temperatur T, Dichte ϱ, Druck p, Schwerebeschleunigung g, Strahlungsstrom H, u.a.) nur Funktionen des Abstands r vom Sternzentrum. Unter dieser Voraussetzung lautet die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts

$$\frac{dp}{dr} = -g\varrho, \tag{30.1}$$

mit der Schwerebeschleunigung

$$g = \frac{GM(r)}{r^2}. \tag{30.2}$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante, $M(r)$ die Masse innerhalb der Kugel mit dem Radius r, $p = p_G + p_R$ der Gesamtdruck, d.h. die Summe aus Gasdruck d_G und Strahlungsdruck p_R. Weiter folgt aus der Strömungsgleichung durch

Multiplikation mit $\cos\vartheta$ und Integration

$$\frac{dp_R}{dr} = -\frac{k\varrho H}{c} \tag{30.3}$$

mit k als Massenabsorptionskoeffizienten und c der Lichtgeschwindigkeit.

Es sei nun $\varepsilon(r)$ die Energiemenge, die pro Massen- und Zeiteinheit im Abstand r vom Zentrum des Sterns durch Energiequellen erzeugt wird. Dann ist die Gesamtenergie, die von den Quellen im Innern einer Kugel mit dem Radius r erzeugt wird, gleich

$$L(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \varepsilon\varrho dr. \tag{30.4}$$

Wenn der Energietransport im Sterninnern hauptsächlich durch Strahlung erfolgt (was bei den hohen Temperaturen, die im Sterninnern herrschen, der Fall ist), so ist

$$L(r) = 4\pi r^2 H. \tag{30.5}$$

Damit kann Gleichung (30.3) in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{dp_R}{dr} = -\frac{k\varrho L(r)}{4\pi c r^2}, \tag{30.6}$$

und Gleichung (30.1) wird mit (30.2)

$$\frac{d(p_G + p_R)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\varrho. \tag{30.7}$$

Zu den beiden Grundgleichungen (30.6) und (30.7) gehört noch Gleichung (30.4), die wir in der Form

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varrho\varepsilon \tag{30.8}$$

schreiben, und nachstehende selbstverständliche Bedingung:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varrho. \tag{30.9}$$

Wir betrachten jetzt einen Stern als Gaskugel. Der Zustand der Materie im Innern dieses Sterns wird durch das Boyle-Mariottesche Gesetz beschrieben:

$$p_G = \frac{R}{\mu}\varrho T. \tag{30.10}$$

Hierin ist R die allgemeine Gaskonstante und μ das Molekulargewicht. Der Strahlungsdruck ist durch die Gleichung

$$p_R = \frac{1}{3} a T^4 \tag{30.11}$$

gegeben, die für die inneren Schichten des Sterns bei lokalem thermodynamischem Gleichgewicht gilt. Der Gleichgewichtszustand eines Gassterns wird somit durch folgende Grundgleichungen charakterisiert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left(\frac{R}{\mu}\varrho T + \frac{1}{3}aT^4\right) &= -\frac{GM(r)}{r^2}\varrho, \\ \frac{d}{dr}\frac{1}{3}aT^4 &= -\frac{kL(r)}{4\pi c r^2}\varrho, \\ \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2\varrho, \\ \frac{dL(r)}{dr} &= 4\pi r^2\varrho\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{30.12}$$

Die Lösungen dieses Systems der vier Gleichungen für vier Veränderliche ϱ, T, $M(r)$ und $L(r)$ müssen die folgenden Grenzbedingungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } r = 0: \quad \varrho = \varrho_c, \quad T = T_c, \quad M(r) = 0, \quad L(r) = 0; \\ &\text{für } r = r_1: \quad \varrho = 0, \quad T = 0, \quad M(r) = M, \quad L(r) = L. \end{aligned}\right\} \tag{30.13}$$

Hierin sind r_1 der Radius, M die Masse, L die Leuchtkraft des Sterns, und der Index c bedeutet den Wert der Parameter im Sternzentrum.

Wir führen nun dimensionslose Veränderliche ein, die ϱ, T, k und ε in Einheiten des Mittelpunktswerts und $L(r)$ und $M(r)$ in Einheiten der Leuchtkraft und Masse des ganzen Sterns ausdrücken:

$$\begin{aligned} T &= T_c\tau, \quad M(r) = M\psi, \quad L(r) = L\eta, \\ \varrho &= \varrho_c\sigma, \quad \varepsilon = \varepsilon_c\varepsilon', \quad k = k_c\varkappa. \end{aligned} \tag{30.14}$$

Außerdem setzen wir

$$r = r_1\alpha\xi, \tag{30.15}$$

worin α vorläufig ein willkürlicher Parameter ist. Dann ist leicht zu zeigen, daß die Gleichungen (30.12) zum System

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\left(\sigma\tau + \frac{1-\beta_c}{\beta_c}\tau^4\right) &= -\frac{\sigma\psi}{\xi^2}, \\ \frac{d\tau^4}{d\xi} &= -\lambda_1\frac{\varkappa\sigma\eta}{\xi^2}, \\ \frac{d\psi}{d\xi} &= \lambda_2\sigma\xi^2, \\ \frac{d\eta}{d\xi} &= \lambda_3\sigma\varepsilon'\xi^2 \end{aligned}\right\} \tag{30.16}$$

führen, wobei die dimensionslosen Parameter

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{GM}{\frac{R}{\mu} r_1 T_c}, \quad \lambda_1 = \frac{k_c L}{4\pi_c G M} \frac{\beta_c}{1-\beta_c}, \\ \lambda_2 &= \frac{4\pi G^3 M^2}{\left(\frac{R}{\mu}\right)^4} \frac{\beta_c}{1-\beta_c} \frac{1}{3} a, \quad \lambda_3 = \frac{M}{L} \mu \varepsilon_c \end{aligned}\right\} \tag{30.17}$$

und $\frac{1-\beta_c}{\beta_c} = \left(\frac{p_R}{p_G}\right)_c$ sind. Die Gleichungen (30.16) sind für die Grenzbedingungen (30.13) oder für

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 0: \quad \sigma = 1, \quad \tau = 1, \quad \psi = 0, \quad \eta = 0; \\ \xi &= \frac{1}{\alpha}: \quad \sigma = 0, \quad \tau = 0, \quad \psi = 1, \quad \eta = 1 \end{aligned}\right\} \tag{30.18}$$

zu lösen. Die Lösung des Systems (30.16) enthält die vier Parameter λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{1-\beta_c}{\beta_c}$ und vier willkürliche Konstanten, die sich beispielsweise aus den Bedingungen im Zentrum (30.18), bestimmen lassen, die es ermöglichen, diese vier Konstanten durch λ_1, λ_2, λ_3 und $\frac{1-\beta_c}{\beta_c}$ auszudrücken. Damit hat die Lösung, welche die Mittelpunktsbedingungen (30.18) befriedigt, die Form

$$\sigma, \tau, \psi, \eta, = f_i\left(\xi, \frac{1-\beta_c}{\beta_c}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right) \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{30.19}$$

Diese Lösung muß aber auch die Bedingungen (30.18) für $\xi = \frac{1}{\alpha}$ erfüllen, was zu vier Bedingungen der Form

$$\varphi_i\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1-\beta_c}{\beta_c}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{30.20}$$

führt.

Die Lösung dieser vier Gleichungen gibt uns die vier dimensionslosen Parameter λ_1, λ_2, λ_3 und $\frac{1}{\alpha}$ (Eigenwerte) als Ausdrücke des Verhältnisses $\frac{1-\beta_c}{\beta_c}$. Nach (30.17) haben aber diese Ausdrücke die Form

$$F_i(L, M, r_1, T_c, \varrho_c, k_c, \varepsilon_c, \mu) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{30.21}$$

da

$$\frac{1-\beta_c}{\beta_c} = \frac{1}{3} a \frac{T_c^3}{\frac{R}{\mu} \varrho_c}$$

ist. Eliminiert man aus zwei Gleichungen (30.21) ϱ_c und T_c, so findet man

$$\varrho_c, T_c = \Psi_i(L, M, r_1, k_c, \varepsilon_c, \mu) \quad (i = 1, 2), \tag{30.22}$$

d.h. die Bedingungen, welche die Temperatur und die Dichte im Sternzentrum bestimmen. Setzt man diese Ausdrücke (30.22) in die beiden übrigen Gleichungen (30.21) ein, so erhält man zwei Beziehungen der Form

$$F_i(L, M, r_1, k_c, \varepsilon_c, \mu) = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{30.23}$$

Aus den Gleichungen (30.22) und (30.23) folgen grundsätzliche Schlüsse der Theorie des inneren Aufbaus der Sterne.

2. Die wesentlichsten empirischen Beziehungen

Ein Stern wird vom Beobachter durch drei physikalische Parameter charakterisiert: die Masse M, die Leuchtkraft L und den Radius r_1, von denen jeder experimentell mit einer bekannten Genauigkeit bestimmt werden kann. Die Beobachtungen zeigen, daß für Sterne der Hauptreihe, Riesen und Überriesen (siehe das Leuchtkraft-Spektrum-Diagramm, Abb.46) ein nahezu strenger funktionaler Zusammenhang zwischen Masse und Leuchtkraft von der Form $L \sim M^n$ besteht. Nach den Untersuchungen von P. P. Parenago und A. G. Massewitsch [76] ist diese Abhängigkeit für die erwähnten Sterngruppen verschieden: für Riesen und Überriesen ist $n \approx \frac{10}{3}$, für Sterne der Spektralklassen O bis G4 (erster Teil der Hauptreihe) ist $n = 3{,}9$, für Sterne der Klassen G7 bis M (zweiter Teil der Hauptreihe) ist $n \approx 2{,}3$. Für weiße Zwerge, Unterzwerge und Unterriesen wurde noch kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Masse und Leuchtkraft aufgefunden.

Die Beobachtungen zeigen auch eine Korrelation zwischen Radius und Leuchtkraft (oder Masse) oder zwischen Leuchtkraft und effektiver Temperatur, da die Leuchtkraft

$$L = \pi a c r_1^2 T_e^4$$

ist. Die Abhängigkeit Radius–Masse hat die Form $R \sim M^m$, wobei $m = \frac{3}{4}$ für Sterne der Spektralklassen O bis G4, $m = \frac{1}{2}$ für die Spektraltypen G7 bis M, $m = 3{,}4$ für rote Riesen und $m = 3{,}2$ für Überriesen ist. Unterzwerge, Unterriesen und weiße Zwerge zeigen keine Korrelation ähnlichen Typs. Für diese Sterne existiert nur eine für jede Gruppe eigene Beziehung der Form $L = f(M, r_1)$. Wie eine eingehendere Betrachtung zeigt, ist der Unterschied in der Form der Abhängigkeit $L = f(M)$ und $r_1 = f(M)$ für die einzelnen Gruppen der verbreitetsten Sterne und auch die Existenz nur einer Abhängigkeit für Unterzwerge, Unterriesen und weiße Zwerge offensichtlich mit dem Unterschied in der räumlichen Verteilung, der kinematischen Charakteristika und dem Alter

dieser Gruppen verbunden. Andererseits zeigt dies, daß der Aufbau der Sterne, die zu diesen Gruppen gehören, wahrscheinlich ebenfalls verschieden ist.

Eine Theorie des Sternaufbaus muß in Übereinstimmung mit den Beobachtungsdaten die beiden Beziehungen $L = f(M)$ und $r_1 = f(M)$ für jede Sterngruppe, bei der diese Abhängigkeiten festgestellt wurden, wiedergeben und erklären, warum im allgemeinen nur eine Beziehung von der Form $L = f(M, r_1)$ für die Sterne besteht.

Aus den beiden Beziehungen (30.23) ist zu ersehen, daß man die Funktionen $L = f(M)$ und $r_1 = f(M)$ (wenn man nacheinander r_1 und L aus den beiden Gleichungen eliminiert) nur dann erhalten kann, wenn uns die Natur der Quellen der Sternenergie und damit ε sowie der Absorptionskoeffizient k im Sterninnern und die chemische Zusammensetzung des Sterns, die μ bestimmt, bekannt sind.

Da ε, k und μ nicht unmittelbar aus der Beobachtung erhalten werden können, besteht eine gewisse Unbestimmtheit in der Lösung des Problems. Für die Aufstellung einer richtigen Theorie des Sternaufbaus gewinnt daher die Untersuchung der möglichen physikalischen Mechanismen der Erzeugung und Absorption von Energie im Sterninnern und der chemischen Zusammensetzung der Sterne ganz besondere Bedeutung. Angaben über die chemische Zusammensetzung der Sternatmosphären finden sich in § 5. Analoge Daten haben wir für die inneren Schichten der Sterne vorläufig nicht zur Verfügung, doch erlaubt die Annahme einer intensiven Durchmischung der Materie in den Sternen, eine homogene chemische Zusammensetzung des Sterns bis in sein tiefes Inneres vorauszusetzen. Dies schließt natürlich nicht die Möglichkeit geringer Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung einzelner Sterne aus, worauf auch die Analyse der Spektren der Sternatmosphären hindeutet.

Wären uns ε_c, k_c und μ bekannt, so ließen sich Radius und Leuchtkraft eindeutig aus der gegebenen Masse und dem Molekulargewicht bestimmen (Theorem von Vogt und Russell). Da uns aber die Beobachtungen ganz bestimmte Funktionen $L = f(M)$ und $r_1 = f(M)$ liefern, so können wir ohne jede physikalische Theorie über die Prozesse der Erzeugung und Absorption von Energie im Sterninnern aus den Beziehungen (30.23) schließen, daß für reale Sterne k_c und ε_c selbst auf irgendeine Weise mindestens von einem der Parameter r_1, L, M und μ abhängen müssen.

Die Hypothese, daß die Dichte der Energiequellen nur vom Molekulargewicht abhängen kann (was bei natürlicher Radioaktivität der Fall wäre), widerspricht direkt den Tatsachen und muß fallengelassen werden.

Die Energieerzeugung hängt direkt von der Masse und dem Radius des Sterns ab, wenn sie auf der Kontraktion des Sterns beruht. Ist $c_v T = U$ die innere Energie des Gases, so ist nach der kinetischen Gastheorie die kinetische Energie des Gases

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{2}(\gamma - 1)\, U,$$

mit $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Es sei W die potentielle Energie einer Gaskugel (d.h. die Arbeit,

die gegen die Anziehungskraft aufzubringen ist, um die Gaskugel vom Radius r_1 bis ins Unendliche auszudehnen) und $E = U + W$ die **Gesamtenergie** des Gases. Weiter gilt für jedes Teilchensystem im stationären Zustand der *Virialsatz*

$$2E_{\mathrm{kin}} + W = 0 \tag{30.24}$$

oder

$$3(\gamma - 1)U + W = 0.$$

Die Gesamtenergie ist dann

$$E = -(3\gamma - 4)\,U = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\,W. \tag{30.25}$$

Ändert sich bei einer Kontraktion die potentielle Energie um ΔW (< 0), so verliert das System einen Teil seiner Energie, und zwar $\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}$, durch Strahlung, während $\Delta U = -\frac{\Delta W}{3(\gamma - 1)}$ zur Erwärmung der Materie dient. Wird bei einem Stern Energie durch Kontraktion frei, so ist $L = -\frac{\Delta E}{\Delta t}$. Wenn sich ein Stern von unendlichen Dimensionen verdichtet und zur Zeit t den Radius r_1 erreicht hat, so beträgt seine potentielle Energie

$$W = q\,\frac{GM^2}{r_1}. \tag{30.26}$$

Hierin ist q ein vom Aufbau des Sterns abhängiger Faktor, der etwa gleich 1 ist. Weiter haben wir

$$\overline{L}t = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\,q\,\frac{GM^2}{r_1}, \tag{30.27}$$

wobei $\overline{L}$ die mittlere Leuchtkraft in der Zeit t ist. Hieraus läßt sich die Zeit t abschätzen, während der der Stern ununterbrochen die Energie $\overline{L}$ ausstrahlt (die sogenannte *Kontraktionsskala der Entwicklung*). Für unsere Sonne liegt sie in der Größenordnung 10^7 Jahre, für Capella (α Aurigae) $\sim 10^5$ Jahre, was mindestens um das 10^3fache weniger ist als die wahrscheinliche Lebensdauer dieses Sterns. Es ist klar, daß die Kontraktion von gasförmigen Sternen keine langwährende Energiequelle darstellen kann.

Am wahrscheinlichsten erscheint daher die Annahme, daß ε und k durch solche Prozesse bestimmt werden, die von den physikalischen Bedingungen im Sterninnern, d.h. von Dichte und Temperatur (und möglicherweise von der chemischen Zusammensetzung), abhängen.

In diesem Falle geben uns die Bedingungen (30.22) und (30.23) zwei Beziehungen, die nur L, M, r und μ enthalten.

Eliminiert man nacheinander r_1 und M aus diesen Beziehungen, so erhalten wir zwei Funktionen der Form $L = f(M, \mu)$ und $r_1 = f(M, \mu)$. Für Sterne der

Hauptreihe, Riesen und Überriesen, bei denen sich die angegebenen Abhängigkeiten von einem Parameter, $L = f(M)$ und $r_1 = f(M)$, gut beobachten lassen, zeigen diese Beziehungen, daß das Molekulargewicht der Sternmaterie entweder einheitlich oder nur eine Funktion der Masse ist. Eine aufmerksamere Betrachtung des Problems zeigt [76], daß die Annahme einer Konstanz des Molekulargewichts für alle betrachteten Sterne schlecht den Forderungen der physikalischen Theorie der Energieerzeugung und -absorption im Sterninnern entspricht (außer bei Riesen und Überriesen). Eine Übereinstimmung für Sterne der Hauptreihe wird erreicht, wenn man ein Anwachsen des Molekulargewichts in Richtung später Spektralklassen annimmt.

Für Unterzwerge und Unterriesen können uns die beiden Beziehungen $L = f(M, \mu)$ und $r_1 = f(M, \mu)$, auf die uns die Theorie des Gleichgewichts der Sterne führt, eine einheitliche Beziehung $L = f(M, r_1)$ geben, die auch tatsächlich bei diesen Sternen beobachtet wird. Jedoch ist eine detailliertere Untersuchung dieser Sterne zur Beurteilung des Einflusses der chemischen Zusammensetzung auf die bei ihnen zu beobachtende Beziehung zwischen Masse, Leuchtkraft und Radius noch notwendig.

Für die weißen Zwerge reicht das Material für ein einigermaßen sicheres Urteil über die zu beobachtenden Beziehungen zwischen Masse, Radius und Leuchtkraft dieser Sterne noch nicht aus.

Um über den physikalischen Charakter der Prozesse der Absorption und Energieerzeugung in den Sternen zu urteilen, muß man die Bedingungen kennen (d.h. Dichte und Temperatur), unter denen diese Prozesse ablaufen. Eine exakte Bestimmung der Temperatur- und Dichteverteilung im Stern von der Oberfläche in die Tiefe erfordert die Lösung der Gleichgewichtsgleichungen, z.B. des Systems (30.12), die ihrerseits die Kenntnis der Energiequellen und des Absorptionskoeffizienten voraussetzen, d.h., man erhält einen Zirkelschluß. Die Lösung des Problems gelingt also nur auf dem Wege der schrittweisen Näherung.

§ 31. Die physikalischen Bedingungen im Innern der Sterne

1. Temperatur und Dichte im Sterninnern

Die mittlere Dichte und die Temperatur des Sterninnern lassen sich ohne jede spezielle Theorie des Sternaufbaus abschätzen, wodurch wir eine Vorstellung über die physikalischen Bedingungen im Innern der Sterne in erster Näherung gewinnen.

Die mittleren Dichten, wie sie aus den Beobachtungen der Massen und Radien der Sterne zu bestimmen sind, ändern sich in sehr weiten Grenzen, von 10^{-6} g/cm^3 (für Riesensterne später Spektraltypen) bis zu 10–100 g/cm^3 für Zwerge der Hauptreihe. Bei weißen Zwergen erreicht die mittlere Dichte einen Wert von etwa 10^6 g/cm^3; dieses deutet darauf hin, daß die Materie der weißen Zwerge sich in einem besonderen – entarteten – Zustand befindet. Die mittleren Temperaturen lassen sich mit Hilfe des Virialsatzes abschätzen (30.24), nach dem

die Temperatur proportional $\mu \frac{M}{r_1}$ ist. Dies gibt uns mittlere Temperaturen für gasförmige Sterne (deren Materie dem BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz gehorcht) zwischen einigen Millionen und einigen zehn Millionen Grad. Diese Daten grenzen den Bereich der physikalischen Bedingungen ab, innerhalb dessen die möglichen physikalischen Prozesse der Energieerzeugung, der Charakter der Emission und Absorption, die Zustandsphase der Materie, usw., zu untersuchen sind.

Die Angaben über die Temperaturen und Dichten lassen sich etwas präzisieren, wenn man den Aufbau gasförmiger Sterne im Gleichgewicht unter sehr einfachen Annahmen über die Verteilung der Energiequellen betrachtet.

Wir haben gesehen, daß man zur Lösung der Gleichgewichtsformeln (30.15) die $\varkappa$ und η als Funktion vom Abstand vom Mittelpunkt des Sterns kennen muß. Was die Funktion $\varkappa$ betrifft, so läßt sich die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Dichte und der Temperatur hinreichend genau angeben. Man kann in erster Näherung zwei Grenzfälle betrachten: Für den ersten nehmen wir an, daß die Energiequellen gleichmäßig (ε = const) oder fast gleichmäßig verteilt sind, so daß

$$k \frac{L(r)}{M(r)} = \text{const} \tag{31.1}$$

ist. Im zweiten Falle seien alle Energiequellen im Sternzentrum konzentriert ($\varepsilon = 0$ überall, außer im Sternzentrum).

Die Bedingung (31.1) charakterisiert das EDDINGTONsche Sternmodell. Dieser Spezialfall stellt das Modell eines Sterns mit konstantem Absorptionskoeffizienten k und einer konstanten Ergiebigkeit der Energiequellen ε dar.

Wir wollen zuerst das EDDINGTONsche Modell betrachten. Die Bedingung (31.1) läßt sich, wie leicht zu sehen ist, nach (30.14) wie folgt schreiben:

$$\frac{L}{M} k_c \frac{\varkappa \eta}{\psi} = \text{const},$$

oder, da im Sternzentrum ($r \to 0$) die Größen $\varkappa \to 1$ und $\frac{\eta}{\psi} \to \varepsilon_c \frac{M}{L}$ gehen, also $k_c \varepsilon_c$ = const ist, kann man (31.1) auch anders ausdrücken:

$$\frac{\varkappa \eta}{\psi} = \text{const} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_m}. \tag{31.2}$$

Hierin ist $\varepsilon_m = \frac{L}{M}$ die mittlere Ergiebigkeit der Energiequellen im Sterninnern. Dividiert man die erste Gleichung (30.16) durch die zweite, so erhält man wegen (31.2)

$$d\left(\sigma \tau + \frac{1 - \beta_c}{\beta_c} \tau^4\right) = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} \frac{1}{\lambda_1} d\tau^4.$$

Daraus folgt durch Integration unter Berücksichtigung der Bedingungen (30.18) ($\sigma = 0$, $\tau = 0$ an der Grenze)

$$\sigma\tau + \frac{1-\beta_c}{\beta_c}\tau^4 = \frac{\varepsilon_m}{\lambda_1\varepsilon_c}\tau^4. \tag{31.3}$$

Nach (30.18) müssen im Sternzentrum gleichzeitig die Bedingungen $\sigma = 1$ und $\tau = 1$ erfüllt sein, woraus

$$\lambda_1 = \beta_c \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} \tag{31.4}$$

folgt. Setzt man den Ausdruck für λ_1 aus Gleichung (30.17) ein, so erhält man

$$1 - \beta_c = \frac{k_c\varepsilon_c}{4\pi c G}. \tag{31.5}$$

Gleichung (31.3) geht also über in

$$\sigma = \tau^3,$$

und die erste Gleichung (30.16) nimmt die Form

$$\frac{4}{\beta_c}\frac{d\tau}{d\xi} = -\frac{\psi}{\xi^2} \tag{31.6}$$

an. Setzt man hieraus ψ in die dritte Gleichung (30.16) ein, so erhält man

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\tau}{d\xi}\right) = -\frac{\lambda_2\beta_c}{4}\tau^3. \tag{31.7}$$

Wir führen nun eine neue Veränderliche ein:

$$\eta = \sqrt{\frac{\lambda_2\beta_c}{4}}\,\xi. \tag{31.8}$$

Dann nimmt Gleichung (31.7) die Form

$$\frac{1}{\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^2\frac{d\tau}{d\eta}\right) = -\tau^3 \tag{31.9}$$

an. Diese Gleichung nennt man die EMDENsche Differentialgleichung mit dem Index 3; sie ist ein Spezialfall der EMDENschen Differentialgleichung

$$\frac{1}{\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^2\frac{d\tau}{d\eta}\right) = -\tau^n,$$

die die Temperaturverteilung in polytropen Gaskugeln bestimmt, d. h. in Gaskugeln, in denen der Gasdruck und die Dichte in jedem Punkt der Kugel durch die Gleichung

$$p \sim \varrho^{1+\frac{1}{n}}$$

gegeben ist. Wir brauchen diejenige Lösung dieser Gleichung, die die Bedingungen (30.18) erfüllt, und zwar $\tau = 1$ im Zentrum ($\eta = 0$) und $\tau = 0$ für ein gewisses $\eta = \eta_1$. Eine derartige Lösung existiert für ein beliebiges n in den Grenzen $0 \leqq n \leqq 5$ und ist durch streng definierte Werte η_1 und $\left(\frac{d\tau}{d\eta}\right)_{\eta_1}$ für ein gegebenes n charakterisiert. Für $n = 3$ ist

$$\eta_1 = 6{,}897\,, \quad \omega_0 \equiv \eta_1^2 \left(\frac{d\tau}{d\eta}\right)_{\eta_1} = -2{,}018\,. \tag{31.10}$$

Diese beiden Bedingungen bestimmen noch zwei Eigenwerte α und λ_2. An der Grenze muß $\psi = 1$ sein. Wir haben aber aus (31.6) und (31.8)

$$\psi = -\frac{4}{\beta_c}\xi^2\frac{d\tau}{d\xi} = -\left(\frac{4}{\beta_c}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\,\eta^2\frac{d\tau}{d\eta}.$$

Die Bedingung $\psi = 1$ liefert uns für $\eta = \eta_1$

$$\lambda_2 = \left(\frac{4}{\beta_c}\right)^3 \omega_0^2\,, \tag{31.11}$$

oder nach der Definition (30.17) für λ_2 nimmt diese Gleichung die Form

$$1 - \beta_c = \frac{1}{4^3\omega_0^2}\,\frac{4\pi G^3 a}{3\,R^4}\,\mu^4\beta_c^4 M^2 \tag{31.12}$$

an. Dies ist die EDDINGTONsche Gleichung 4. Grades, aus der β_c aus der Masse M und dem Molekulargewicht μ bestimmt werden kann. Weiter liefert uns die Bedingung $\eta = \eta_1$ (31.10) an der Grenze $\left(\xi = \frac{1}{\alpha}\right)$ nach (31.8) unter Beachtung von (31.11)

$$\alpha = \frac{1}{\eta_1}\sqrt{\frac{\lambda_2\beta_c}{4}} = \frac{\omega_0}{\eta_1}\frac{4}{\beta_c}. \tag{31.13}$$

Setzt man α aus (30.18) ein, so erhält man an Stelle von (31.13) den Ausdruck

$$T_c = \frac{\eta_1}{4\,\omega_0}\,\beta_c\mu\,\frac{GM}{Rr_1} \tag{31.14}$$

für die Temperatur im Sternzentrum. Die Dichte im Sternzentrum folgt aus der Bedingung

$$\frac{R}{\mu}\,\varrho_c = \frac{\beta_c}{1-\beta_c}\,\frac{1}{3}\,a T_c^3. \tag{31.15}$$

So haben wir an Stelle der vier Bedingungen (30.21) eigentlich nur drei: (31.5), (31.12) und (31.14). Der Parameter λ_3 bleibt noch unbestimmt, da in der

EDDINGTONschen Theorie eine Aussage über den physikalischen Mechanismus der Energieerzeugung fehlt. Bei gleichmäßiger Verteilung der Energiequellen ist $\varepsilon_c = \varepsilon_m = \frac{L}{M}$, und die Bedingung (31.5) geht über in

$$1 - \beta_c = \frac{k_c L}{4\pi c G M}, \tag{31.16}$$

so daß die Bedingung (31.12) die gesuchte Beziehung zwischen Masse und Leuchtkraft des Sterns darstellt, wenn k_c bekannt ist. EDDINGTON bestimmt für einen Stern mit gut bekannter Masse (z.B. Capella) $1 - \beta_c$ aus Gleichung (31.12), indem er $\mu = 2$ annimmt. Aus der bekannten Leuchtkraft findet er dann aus (31.12) k_c und stellt unter der Annahme, daß dieser k_c-Wert für alle Sterne (der Hauptreihe) derselbe ist, die theoretische Masse-Leuchtkraft-Beziehung [auf der Grundlage der Gleichungen (31.12) und (31.16)] auf, die mit der beobachteten Abhängigkeit für Sterne der Hauptreihe und Riesen übereinstimmt. Berechnet man jedoch den Absorptionskoeffizienten k_c aus dem Ausdruck, den man im EDDINGTONschen Modell theoretisch für T_c und ϱ_c aus (31.14) und (31.15) erhält, so ist dieser Wert 20mal kleiner als der vorige „*astronomische*" Wert. Wenn die Werte übereinstimmen sollen, muß man als Molekulargewicht $\mu \approx 1$ annehmen, d.h. ein beträchtliches Überwiegen des Wasserstoffs (etwa 30 Gewichtsprozent) im Sterninnern zulassen, was auch in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der chemischen Spektralanalyse der Sternatmosphären steht. Für die Mittelpunktstemperatur der Sonne erhält man dabei den Wert $T_c \approx 20 \cdot 10^6$ Grad und für $\varrho_c = 70 \text{g/cm}^3$. Die Erniedrigung von μ bis auf 1 führt dazu, daß man für Sterne mit Massen, die kleiner als $10\, M_\odot$ sind (was für die meisten zutrifft), die Rolle des Strahlungsdrucks gegenüber dem Gasdruck vernachlässigen kann [für diese Sterne ist, wie die Rechnung nach (31.12) zeigt, $\beta_c \approx 1$]. Durch Zusammenfassung der Gleichungen (31.16) und (31.12) erhält man daher

$$L \sim \frac{\mu^4}{k_c} M^3. \tag{31.17}$$

Wenn man hier für k_c einen Ausdruck nimmt, den die Theorie der Absorptionsprozesse, z.B. das KRAMERSsche Gesetz

$$k_c \sim \frac{\varrho_c}{T_c^{\frac{7}{2}}} \tag{31.18}$$

liefert, so stellt wegen (31.14), (31.15) und (31.16) die Gleichung (31.17) eine der beiden notwendigen Beziehungen der Form (30.22) zwischen Masse, Leuchtkraft, Radius und Molekulargewicht dar [an Stelle der einfachen EDDINGTONschen Abhängigkeit nur zwischen Masse und Leuchtkraft ($L \sim M^3$)].

STRÖMGREN entdeckte, daß man diese Beziehung in Übereinstimmung mit der Beobachtung bringen kann, wenn man annimmt, daß sich das Molekular-

gewicht von Stern zu Stern längs des HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramms infolge einer Änderung des prozentualen Wasserstoffgehalts der Sterne ändert. Man bestimmt nun μ mit Hilfe der Gleichungen (31.17) und (31.18) für eine Reihe von Sternen mit bekanntem M, r_1 und L, d.h., man löst eine Gleichung der Form (30.22) nach μ. Dadurch sieht man, daß sich der Wasserstoffgehalt der Sterne, wenn der Heliumgehalt zu Null angenommen wird, innerhalb der Grenzen von 10 bis 50% mit einer Häufung bei etwa 30% ändern kann. Aus (31.17) ist zu ersehen, daß sich μ nur wenig ändert, selbst bei beträchtlichen Änderungen des Absorptionskoeffizienten k_c (μ^4/k_c bleibt ungefähr konstant), da bei realen Sternen eine Abhängigkeit der Form $L \sim M^3$ annähernd erfüllt ist.

Geht man zum anderen Grenzfall über und nimmt an, daß alle Energiequellen im Sternzentrum konzentriert sind und der Absorptionskoeffizient durch ein Gesetz der Form (31.18) gegeben ist, so zeigen die entsprechenden Rechnungen, daß auch in diesem Falle die Temperatur im Zentrum der Sonne von der Größenordnung $20 \cdot 10^6$ Grad ist und die Dichte $\varrho \approx 50\,\mathrm{g/cm^3}$ beträgt, d.h. sich praktisch die gleichen Werte ergeben wie bei einem Modell mit gleichmäßiger Verteilung der Quellen. Ebenso wie beim EDDINGTONschen Modell besteht auch in diesem Falle ein ganz analoger eindeutiger Zusammenhang zwischen M, L, r_1 und μ der Art (30.22), der sich von dem oben betrachteten nur durch die Zahlenwerte der dimensionslosen Parameter unterscheidet. Zahlreiche Untersuchungen von Sternmodellen in den Fällen zwischen einer gleichmäßigen Verteilung und einer punktförmigen Quelle führen zu Ergebnissen, die analog denjenigen sind, die diese beiden Grenzfälle geben.

So kommen wir also zu dem wichtigen Resultat: Die Verteilung der Energiequellen im Innern eines gasförmigen Sterns hat keinen wesentlichen Einfluß auf die Temperatur und die Dichte im Zentrum. Von wesentlicher Bedeutung für die physikalischen Bedingungen im Sterninnern sind dagegen die chemische Zusammensetzung des Sterns und die Art der Energieerzeugung in seinem Innern.

2. Der Absorptionskoeffizient der Sternmaterie

Bei Temperaturen der Größenordnung $10^6 - 5 \cdot 10^7$ °K wird der größere Teil der Sternstrahlung kurzwellig, also Röntgenstrahlung. Die Absorption der Strahlungsenergie im Stern kann durch drei Prozesse erfolgen:

1. durch Photoionisation der Metallatome, die die K- und L-Schale noch besitzen,

2. durch Übergänge der Elektronen im Feld von Kernen und ionisierten Atomen von einer hyperbolischen Bahn geringerer Energie auf eine höherer Energie und

3. durch COMPTON-Streuung der Strahlung an freien Elektronen.

Zur Berechnung des Absorptionskoeffizienten muß man die chemische Zusammensetzung der Sternmaterie kennen. Infolge der hohen Temperaturen sind die leichten Elemente im Sterninnern vollständig ionisiert. Dann ist das

mittlere Molekulargewicht

$$\mu = \frac{A}{Z+1}, \tag{31.19}$$

wobei A das Atomgewicht und Z die Ladung der vollständig ionisierten Atome ist. Da für die Mehrzahl der Elemente $A \approx 2Z$ ist (außer für Wasserstoff und Helium), so ist das mittlere Molekulargewicht der vollständig ionisierten Elemente etwa gleich zwei (für Wasserstoff ist es gleich $^1/_2$, für Helium 1,33).

Die hohe Temperatur im Sterninnern, welche die starke Ionisation der Sternmaterie verursacht, führt auch dazu, daß die Sternmaterie selbst bei hohen Dichten die Eigenschaften eines idealen Gases behält. Da die Abstände zwischen den freien Teilchen (Atomrümpfen und freien Elektronen) hinreichend groß im Vergleich zu den Durchmessern der Teilchen selbst sind, kann man die Wechselwirkung zwischen ihnen vernachlässigen.

Die Ionisation im Sterninnern ist jedoch nicht vollständig, und der Wasserstoff- und Heliumgehalt in den Sternen ist sehr groß. Es sei nun x_Z die Gewichtskonzentration eines Elements mit der Atomnummer Z, so daß in 1 cm³ ϱx_Z g des Elements Z enthalten sind. Die mittlere Zahl der unabhängigen Teilchen (Ionen und Elektronen) pro cm³ ist $N_Z = \varrho x_Z \overline{m}_Z$, wobei $\overline{m}_Z$ die mittlere Masse eines freien Teilchens des Elements Z ist, von dem jedes Atom in n_Z unabhängige Teilchen zerfällt; dann ist

$$\overline{m}_Z = \frac{m_H A_Z}{n_Z}.$$

Folglich wird

$$N_Z = \frac{\varrho x_Z n_Z}{m_H A_Z}.$$

Die Gesamtzahl der unabhängigen Teilchen erhalten wir durch Summation von N_Z über alle Z.

Da der Gasdruck $p = NkT = \frac{k}{\mu m_H} \varrho T$ ist, so ist das mittlere Molekulargewicht

$$\mu = \frac{1}{\sum x_Z \frac{n_Z}{A_Z}}. \tag{31.20}$$

Ist die Gewichtskonzentration des Wasserstoffs gleich X, die des Heliums gleich Y, dann ist die der übrigen Elemente gleich $1 - X - Y$. Wenn man für die übrigen Elemente $\sum \frac{n_Z}{A_Z}$ mit n_R bezeichnet $\left(\text{für Wasserstoff } \frac{n_Z}{A_Z} = 2, \text{ für Helium gleich } \frac{3}{4}\right)$, ist leicht einzusehen, daß

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + n_R(1 - X - Y)}. \tag{31.21}$$

Die Berechnung der Größe n_R erfolgt auf der Grundlage der Theorie der Ionisation der K-, L-, M-, ...-Schalen der Atome bei bekannter chemischer Zusammensetzung.

Die relative Häufigkeit der verschiedenen Elemente im Stern ist so, daß die Zahl der Wasserstoffatome in der Volumeneinheit die der Metallatome um etwa das Tausendfache übertrifft und die relative Häufigkeit der Metalle sich in folgender Weise verteilt:

K	Na	Al	Ca	Cr	Mg	Fe	Ni
50	126	20	40	10	470	126	156

Für den Gehalt an Sauerstoff und Helium liegen keine sicheren Schätzungen vor, doch kann man aus gegenwärtigen Daten für die Sonnenatmosphäre einen größeren Heliumgehalt annehmen (mehr als 20 Gewichtsprozent), und für Sterne vom Spektraltyp B kann der Heliumgehalt mit dem Wasserstoffgehalt vergleichbar sein.

Die Theorie des inneren Aufbaus der Sterne geht in erster Näherung von der Annahme einer einheitlichen chemischen Zusammensetzung aus und nimmt für die relative Häufigkeit der Metalle dieselbe an, die auch in Tabelle 1 für Sternatmosphären angegeben ist (siehe S. 35). Dies gibt uns die Möglichkeit, das mittlere Molekulargewicht und den Absorptionskoeffizienten der Sternmaterie zu berechnen. So erhält man für n_R, das in (31.21) auftritt, einen Wert, der sehr nahe bei $\frac{1}{2}$ liegt, und einen etwas kleineren Wert, wenn die schweren Elemente im Sterninnern häufiger sind als in den Atmosphären. Den hauptsächlichsten Einfluß auf μ übt der Wasserstoffgehalt aus, danach der Heliumgehalt. Ist kein Wasserstoff im Sterninnern, so ist μ etwa 2; ist der Wasserstoff im Sterninnern ebenso häufig wie in den Atmosphären, so ist μ etwa gleich 1, da der Wasserstoffgehalt ungefähr 35% des Gewichtes ausmacht (z.B. für die Sonnenatmosphäre).

Die Wirkungsquerschnitte und der Absorptionskoeffizient für Absorptionsprozesse, die durch frei-gebunden- und frei-frei-Übergänge der Elektronen verursacht sind und ebenso durch die Streuung an freien Elektronen, lassen sich quantenmechanisch für wasserstoffähnliche Metallatome berechnen.

Die Resultate dieser Rechnungen lassen sich kurz wie folgt formulieren (interessierte Leser mögen Näheres in dem Buch von Chandrasekhar [26] nachlesen). Obwohl der Wasserstoff- und Heliumgehalt in den Sternen beträchtlich sein kann, spielt die photoelektrische Absorption durch die Atome dieser Elemente wegen ihrer fast vollständigen Ionisation keine wesentliche Rolle. Die Absorption ist hauptsächlich durch die Photoionisation der Metalle bedingt; hierin besteht der grundlegende Unterschied zwischen den Absorptionsprozessen im Sterninnern und den Prozessen der kontinuierlichen Absorption in den Sternatmosphären, wo die Photoionisation des Wasserstoffs die Hauptrolle spielt. Wasserstoff, Helium, Kerne und Ionen der leichten Elemente absorbieren jedoch auch infolge von frei-frei-Übergängen. Die durch diese Prozesse hervorgerufene Absorption ist klein im Vergleich zu derjenigen

bei der Photoionisation der Metalle. Bei hohen Temperaturen wird die Absorption infolge der Streuung des Lichts an freien Elektronen mit der Absorption durch Photoionisation der Metalle vergleichbar oder übertrifft diese sogar noch. Ausführlichere Untersuchungen zeigen, daß in dem Dichtebereich von 0,01 bis 10^4 g/cm^3 die Absorption im wesentlichen durch die Photoionisation der K-Schale der Metallatome bei Temperaturen unter $10^{7°}$ K bedingt ist. Bei Temperaturen über etwa $10^{8°}$ K wird die Absorption gänzlich durch Streuung an freien Elektronen hervorgerufen. Im Temperaturbereich zwischen 10^7 und $10^{8°}$ K wird die Rolle der Streuung an Elektronen um so größer, je geringer die Dichte ist. Ferner ändert sich bei großen Dichten (beginnend bei 10^2 g/cm^3) der Absorptionskoeffizient nach dem Gesetz

$$k \sim \frac{1}{T^2} \tag{31.22}$$

und ist von der Dichte ϱ fast unabhängig. Bei geringen Dichten (von 0,01 bis 1) besteht näherungsweise eine Abhängigkeit der Form

$$k \sim \frac{\varrho}{T^{\frac{7}{2}}}. \tag{31.23}$$

Der Exponent von T ändert sich merklich mit der Temperatur; sein größter Wert ist $\frac{9}{2}$ und wird bei Temperaturen von etwa $10^{6°}$ K erreicht. Bei niedrigeren Temperaturen wird die Absorption hauptsächlich durch die Photoionisation der L-Schale der Metallatome verursacht. Für Temperaturen, bei denen die L-Schale im wesentlichen aufgefüllt ist, wird die Berechnung des Absorptionskoeffizienten äußerst schwierig, da man dann nicht mehr die Rechenmethoden benutzen kann, die auf der Analogie von wasserstoffähnlichen Atomen beruhen. Demgegenüber überwiegt bei sehr hohen Temperaturen, wie schon gesagt, die Streuung an freien Elektronen, und der Absorptionskoeffizient hängt praktisch nicht von der Dichte und Temperatur ab, so daß

$$k \approx \text{const} \tag{31.24}$$

ist.

Was den Einfluß der chemischen Zusammensetzung auf die Absorption betrifft, so ist nur der Wasserstoffgehalt von Bedeutung, und dies auch nur bei hinreichend hohen Temperaturen: Je größer der Wasserstoffgehalt, desto kleiner der Absorptionskoeffizient.

Die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von den physikalischen Bedingungen im Sterninnern läßt sich also nicht durch einen einzigen und einfachen analytischen Ausdruck [z.B. die Gleichungen (31.23) oder (31.22) und (31.24), die nur für Grenzfälle oder starke Entartung der Materie oder sehr hohe Temperaturen gültig sind] darstellen, weshalb wir gezwungen sind, zu numerischen Lösungsmethoden überzugehen.

3. Die Quellen der Sternenergie

Wir wollen uns nun den inneratomaren Prozessen der Energieerzeugung zuwenden, die bei den oben betrachteten Dichten und Temperaturen im Sterninnern stattfinden können. Wie schon erwähnt, kann man die Energieerzeugung nicht durch natürliche Radioaktivität (α-Zerfall) im Innern der Sterne erklären. Es gibt jedoch einen anderen Weg der Energieerzeugung, wie die heutige Kernphysik zeigt. Es handelt sich um Kernumwandlungen, die zum Aufbau von Atomkernen führen. Dieser Prozeß ist in der Kernphysik gut bekannt. Wir nennen als klassisches Beispiel die Reaktion

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H},$$

die Umwandlung von Stickstoff in das Sauerstoffisotop $^{17}\mathrm{O}$ durch Beschießen des Stickstoffkerns mit α-Teilchen. Ein anderes Beispiel für eine solche Kernumwandlung ist die Reaktion, die Irène und Frédéric Joliot-Curie zur Entdeckung des Neutrons führten:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} + \gamma.$$

Hier wird durch α-Teilchenbeschuß der Berylliumkern in Kohlenstoff umgewandelt (wobei ein γ-Quant und ein Neutron frei werden). Eine analoge Umwandlung wird auch bei der Bombardierung des Lithiumkerns mit Protonen beobachtet:

$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Heute ist eine Vielzahl von Kernreaktionen bekannt, die eine Elementumwandlung zur Folge haben. Alle diese Reaktionen erfordern hohe Energien der an ihnen beteiligten Teilchen (Tausende und Hunderttausende Elektronenvolt), die ihnen in Laboratorien dadurch erteilt werden, daß man sie starke elektrische Felder (z.B. im Zyklotron) durchlaufen läßt. In der Natur besitzen die Teilchen solche Energien, wenn sie in hoch erhitzten Gasen vorkommen.

Wir wollen dies nun etwas genauer betrachten. Für Kernreaktionen ist es notwendig, daß sich die Kerne auf sehr geringe Entfernungen einander nähern können. Sollen sie sich bis zu einer Entfernung a nahekommen, so muß die kinetische Energie ihrer relativen Bewegung mindestens $\frac{Z_1 Z_2}{a} e^2$ betragen, wobei Z_1 und Z_2 die Kernladungen sind. Die mittlere Energie der Wärmebewegung der Kerne ist $\frac{3}{2} kT$. Die Energie der Relativbewegung zweier Kerne bei ihrer Annäherung ist dann gleich $3\,kT$. Aus der Bedingung

$$\frac{Z_1 Z_2}{a} e^2 \approx 3\,kT$$

(wo $a \approx 10^{-11}$ cm die obere Grenze des Abstandes ist, in dem die Kerne noch

miteinander reagieren können) finden wir

$$T \approx 5{,}5 \cdot 10^7 Z_1 Z_2 ,$$

d.h. die Temperatur, bei der Kernreaktionen stattfinden können. Diese Temperatur ist am niedrigsten für zwei Protonen ($Z = 1$), und zwar $55 \cdot 10^6$ Grad. Bei dieser Temperatur nähert sich die Mehrzahl der Protonen auf etwa 10^{-11} cm. Solche Begegnungen ereignen sich natürlich auch bei niedrigeren Temperaturen (von der Größenordnung einiger Millionen Grad), da es immer eine gewisse Zahl von Teilchen mit einer höheren Energie als der mittleren gibt (entsprechend der MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung). Diese grobe Schätzung zeigt schon, daß in dem uns interessierenden Temperaturintervall Kernreaktionen stattfinden müssen, wenn dies auch vorwiegend nur Reaktionen zwischen den Kernen der leichten Elemente sein werden (Z klein). Hierbei taucht natürlich sofort die Frage auf, ob Kernumwandlungen auf lange Dauer die Quellen der Sternenergie darstellen können, und wenn ja, gibt es dann solche Reaktionen, die die bei den Sternen beobachtete mittlere Energieerzeugung, proportional $\frac{L}{M}$, decken. Die einfachste Reaktion zwischen leichten Elementen ist die Bildung eines Heliumkerns aus Wasserstoff. Die Masse des Wasserstoffatoms beträgt 1,00813 Masseneinheiten (ME), die Masse des Heliumkerns 4,00386 ME. Demnach wird bei der Bildung des Heliumkerns aus vier Protonen die Energie

$$\Delta E = (4 \cdot 1{,}00813 - 4{,}00386) \cdot c^2 ,$$

und bei der Umwandlung eines Gramms Wasserstoff in Helium die Energie

$$\frac{\Delta E}{m_{\mathrm{H}}} = 2{,}57 \cdot 10^{19} \text{ erg/g}$$

frei. Hierin bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit und m_{H} die Masse des Protons. Die Sonne strahlt etwa 2 erg/g sec aus, die Umwandlung des gesamten Wasserstoffs der Sonne in Helium würde also etwa 10^{11} Jahre beanspruchen. Hierbei bleibt die Masse der Sonne praktisch ungeändert. Wir sehen also, daß Kernumwandlungen für eine Zeit, die mindestens um das Hundertfache größer ist, als nach geologischen Daten gefordert wird, die Ausstrahlung der Sterne decken können.

Wir wollen uns jetzt der Frage zuwenden, welche Kernreaktionen die beobachtete Ausstrahlung der Sterne garantieren können, und müssen zu diesem Zweck den Mechanismus dieser Reaktionen etwas eingehender betrachten.

Die wahrscheinlichste Stoßanzahl von Kernen mit einer relativen Energie im Intervall $E \cdots E + dE$, von denen N_1 und N_2 in der Volumeneinheit enthalten sind, ist nach der kinetischen Gastheorie [77]

$$dZ = \frac{2 N_1 N_2}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \sigma(E) \left(\frac{2\pi}{M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} \equiv N_1 N_2 \sigma(E)\, W(E)\, dE . \qquad (31.25)$$

Hierin ist $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ und $\sigma(E)$ der effektive Stoßquerschnitt. Hat der Stoß eine Kernreaktion zur Folge, so ist $\sigma(E)$ der effektive Wirkungsquerschnitt des betreffenden Prozesses, d. h. die Wahrscheinlichkeit der drei Ereignisse: Stoß zweier Teilchen (R^2), Durchdringung des den Kern eines Teilchens umgebenden Potentialwalls durch ein anderes Teilchen (G) und die Reaktionswahrscheinlichkeit nach dem Eindringen des Teilchens in den Kern (Γ) (z. B. Wahrscheinlichkeit eines β-Zerfalls oder Emission eines γ-Quants). Wir haben also

$$\sigma(E) = R^2 G \Gamma. \tag{31.26}$$

Die Gesamtzahl der Reaktionen pro cm³ ist damit

$$p = N_1 N_2 \int_0^\infty \sigma(E)\, W(E)\, dE. \tag{31.27}$$

Die Eindringwahrscheinlichkeit eines geladenen Teilchens in einen Kern läßt sich mit Hilfe der Wellenmechanik, angewandt auf die Theorie des α-Zerfalls, ausrechnen.

Nimmt man an, daß das Wechselwirkungspotential zweier Kerne den Wert

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2}{r} e^2 & \text{für} \quad r \geqslant r_0, \\ V_0 & \text{für} \quad r \leqslant r_0 \end{cases}$$

hat, so daß $V_0 = \frac{Z_1 Z_2}{r_0}$ die „Höhe“ des Potentialwalls ist, so ergibt die Rechnung

$$G = e^{-2F}, \quad F = \frac{(2M)^{\frac{1}{2}}}{\hbar} \frac{Z_1 Z_2}{E^{\frac{1}{2}}} g(x), \tag{31.28}$$

mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h = PLANCKsches Wirkungsquantum), $x = \frac{E}{V_0}$ und $g(x)$ sehr nahe $\frac{\pi}{2}$ für Energien $E \ll 10^6$ eV (Energien, mit denen wir es zu tun haben). Setzen wir (31.25), (31.26) und (31.28) in (31.27) ein und führen die Integration aus, so erhalten wir für die Zahl der Reaktionen in 1 g Materie:

$$p = \frac{4}{3^{\frac{5}{2}}} \frac{\varrho x_1 x_2}{m_1 m_2} \frac{\Gamma}{\hbar} a R^2 e^{4\sqrt{2\frac{R}{a}}} \tau^2 e^{-\tau}, \tag{31.29}$$

wo a der BOHRsche Radius des Wasserstoffatoms ist:

$$a = \frac{\hbar^2}{M Z_1 Z_2 e^2}.$$

Dabei sind x_1 und x_2 die Gewichtskonzentrationen der reagierenden Kerne $\left(N = \frac{\varrho}{A m_{\mathrm{H}}}\right)$ und R ihr Gesamtradius:

$$R = 1{,}6 \cdot 10^{-13}(A_1 + A_2)^{\frac{1}{3}} \text{ cm}.$$

Die Größe τ ist

$$\tau = 3\left(\frac{\pi^2 M e^4 Z_1^2 Z_2^2}{2\hbar^2 k T}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{31.30}$$

Für die Zahl der thermischen Kernreaktionen benutzen wir die BETHEsche Formel

$$p = 5{,}3 \cdot 10^{25} \varrho x_1 x_2 \Gamma \varphi(Z_1, Z_2) \tau^2 e^{-\tau}, \tag{31.31}$$

mit

$$\varphi = \frac{1}{A_1 A_2 (Z_1 Z_2 A)^3}\left(\frac{8R}{a}\right)^2 e^{2\left(\frac{8R}{a}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\tau = 42{,}7 (Z_1 Z_2)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{A}{T}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad A \equiv \frac{M}{m_{\mathrm{H}}}. \tag{31.32}$$

Die Wahrscheinlichkeit Γ kann aus experimentellen Daten bestimmt werden [26]. Mit Hilfe dieser Gleichungen und der experimentellen Daten führte BETHE ein eingehendes Studium der Kernreaktionen in einer Mischung aller Elemente für Temperaturen von 20 bis 40 Millionen Grad durch. Hierbei konnte er sich auf eine Betrachtung der leichten Elemente beschränken, da die großen Abstoßungskräfte zwischen den Kernen schwerer Elemente die Wahrscheinlichkeiten ihrer Reaktionen verschwindend klein machen [siehe (31.28)]. Es sei gleich darauf hingewiesen, daß in dem von uns betrachteten Dichte- und Temperaturbereich der Aufbau von Elementen schwerer als Helium durch Kernreaktionen nicht möglich ist, da die Kerne ^{5}Li und ^{5}He instabil sind. Daher müssen die heute in den Sternen existierenden schweren Elemente schon in frühen Perioden ihres Daseins vorhanden gewesen sein.

Die einfachste Kernreaktion ist die Bildung von schwerem Wasserstoff aus zwei Protonen:

$${}_1^1\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} \to {}_1^2\mathrm{H} + e^+. \tag{31.33}$$

Das Zeichen e^+ bezeichnet das Positron. [Das Positron vereinigt sich schnell mit einem Elektron, und es entstehen zwei γ-Quanten, so daß zwei Protonen und ein Elektron in der Reaktion (31.33) ein Deuteron und γ-Quanten ergeben.] Würde der Stern bei seiner Bildung ganz aus Wasserstoff bestehen, so wäre die Reaktion (31.33) der erste Schritt zum Aufbau der Elemente. Die Zahl der gebildeten Deuteronen ist jedoch, wie die Rechnungen zeigen, sehr klein, solange die Temperatur nicht einige Millionen Grad erreicht. Ferner reagieren die gebildeten Deuteronen praktisch augenblicklich mit anderen Protonen, was

zur Bildung von α-Teilchen durch die Reaktionen

$$\left.\begin{array}{ll} {}^1_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He} + \gamma, & \text{(a)} \\ {}^1_1\mathrm{H} + {}^3_2\mathrm{He} \to {}^4_2\mathrm{He} + e^+ & \text{(b)} \end{array}\right\} \qquad (31.34)$$

führt. Die durch (31.31) berechneten Reaktionszeiten von (31.33) und (31.34) zeigen, daß die Reaktion (a) 10^{18}mal schneller abläuft als die Reaktion (31.33), so daß jedes entstandene Deuteron nur eine äußerst kurze Lebensdauer hat. Im statistischen Gleichgewicht kommt nur etwa ein Deuteron auf 10^{18} Protonen. Eine weitere Anlagerung von Protonen an den entstandenen He-Kern ist nicht mehr möglich, da der sich bildende Kern ^{5}Li instabil ist. Eine andere Bildung von ${}^4_2$He erfolgt mit weitaus größerer Geschwindigkeit als die der Reaktion (31.34) nach folgender Kettenreaktion:

$$\left.\begin{array}{rl} {}^3_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^7_4\mathrm{Be} + \gamma, & \text{(c)} \\ {}^7_4\mathrm{Be} \to {}^7_3\mathrm{Li} + e^+, & \text{(d)} \\ {}^1_1\mathrm{H} + {}^7_3\mathrm{Li} \to 2\,{}^4_2\mathrm{He}. & \text{(e)} \end{array}\right\} \qquad (31.34)$$

Die Geschwindigkeit dieser Umwandlung von Protonen in α-Teilchen nach der fünfgliedrigen Kettenreaktion (31.34) [(a), (b), (c), (d), (e)] hängt ganz von dem Prozeß (e) ab.

Ist p für die Reaktionen bekannt, so können wir die Änderung der Bindungsenergie bei den Reaktionen berechnen; sie ist für einen Prozeß $\Delta E = \Delta\, mc^2$, woraus sich für 1 g Materie die Energie

$$\varepsilon = p\Delta mc^2$$

ergibt.

Für die betrachtete Reaktion beträgt ε bei einer Temperatur von $20 \cdot 10^6$ Grad und einer Dichte von rd. 100 g/cm^3 etwa 2 erg/g sec, wenn keine anderen Reaktionen weiter zur Größe von ε beitragen. Die Bildung von Heliumkernen durch die Reaktionen (31.34) und (31.35) kann also einen beträchtlichen Beitrag zu dem mittleren Wert von ε für die Sonne (2 erg/g sec) leisten, obwohl für die zentralen Gebiete der Sonne die Energieerzeugung wesentlich größer sein muß wegen der Temperaturzunahme zum Zentrum hin.

Es wurde erwähnt, daß für Temperaturen unterhalb einer Million Grad Deuteronen nur in sehr geringer Menge entstehen, und daß bei Temperaturen von einigen Millionen Grad die Reaktionen der drei leichten Elemente Lithium, Beryllium und Bor am wirksamsten sind:

$$\left.\begin{array}{l} {}^6_3\mathrm{Li} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He}; \\ {}^7_3\mathrm{Li} + {}^1_1\mathrm{H} \to 2\,{}^4_2\mathrm{He}; \\ {}^9_4\mathrm{Be} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^6_3\mathrm{Li} + {}^4_2\mathrm{He}; \\ {}^{10}_5\mathrm{B} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^{11}_6\mathrm{C} + \gamma; \\ {}^{11}_5\mathrm{B} + {}^1_1\mathrm{H} \to 3\,{}^4_2\mathrm{He} \end{array}\right\} \qquad (31.35)$$

(die letzte Reaktion setzt bei $T = 20 \cdot 10^6$ Grad ein). Alle diese Reaktionen laufen aber zu schnell ab (in etwa 10^3 Jahren) und sind nur fähig, die Energie eines Sterns in einem frühen Stadium, zu einer Zeit aufrechtzuerhalten, wo er beispielsweise durch Kontraktion erhitzt wird. Nicht einer der Reaktionspartner wird hier wieder hergestellt, sie „verbrennen" alle und in erster Linie in den zentralen Gebieten des Sterns.

Nach Wasserstoff und Helium sind, wenn Li, Be und B schon erschöpft sind, Kohlenstoff und Stickstoff die leichtesten Elemente, von denen jedes zwei stabile Isotope besitzt. Diese vier Kerne können ein Proton einfangen, wobei in zwei Fällen der entstehende Kern radioaktiv ist. Die betreffenden Reaktionen sind

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)} & {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{13}_{7}\mathrm{N} + \gamma & (2{,}5\,\text{Mill. Jahre}) \\ \text{b)} & {}^{13}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + e^{+} & (9{,}9\,\text{Min.}) \\ \text{c)} & {}^{13}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \gamma & (50000\,\text{Jahre}) \\ \text{d)} & {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{15}_{8}\mathrm{O} + \gamma & (4\,\text{Mill. Jahre}) \\ \text{e)} & {}^{15}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{15}_{7}\mathrm{N} + e^{+} & (2{,}1\,\text{Min.}) \\ \text{f)} & {}^{15}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{16}_{8}\mathrm{O} + \gamma & \text{oder} \\ \text{g)} & {}^{15}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} & (20\,\text{Jahre}) . \end{array}\right\} \quad (31.36)$$

Wenn die Reaktionen a) bis e) zur Reaktion f) führen, so entsteht der Sauerstoffkern ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ aus dem Kohlenstoffkern ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ unter Ausstrahlung von drei γ-Quanten und zwei Positronen; führen die Reaktionen a) bis e) zur Reaktion g), so wird der Kohlenstoffkern wieder neu gebildet, und im Endergebnis ist ein He-Kern aus vier Protonen unter Emission von drei γ-Quanten und zwei Positronen entstanden.

Die Reaktion g) ist etwa 1 Million mal wahrscheinlicher als die Reaktion f), so daß von 1 Million Kohlenstoffkernen nur einer verlorengeht. In allen übrigen Fällen nimmt der wiedergebildete Kohlenstoffkern erneut am Reaktionszyklus teil.

Einen Reaktionszyklus, in dem einer der Reaktionspartner wieder hergestellt wird, nennt man einen *katalytischen*: der Reaktionspartner ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ „hilft" nur im Zyklus (31.36) den Heliumkern aus 4 Protonen aufzubauen, d.h., er ist ein Katalysator. Es sei erwähnt, daß alle Reaktionen des Zyklus (31.36) im Laboratorium aufgefunden worden sind und daß sich auch ihre Wahrscheinlichkeiten experimentell abschätzen lassen. Die mittleren Zeitintervalle zwischen den aufeinanderfolgenden Reaktionen sind für eine Temperatur von der Größenordnung $20 \cdot 10^6$ Grad und eine Dichte von rund 100 g/cm³ in den Klammern angegeben. Danach läuft der ganze Zyklus unter diesen Bedingungen in etwa $6{,}5 \cdot 10^6$ Jahren ab.

Damit die Energieerzeugung dieses Zyklus von Kernreaktionen (des sogenannten Kohlenstoffzyklus) größenordnungsmäßig 100 erg/g sec beträgt (bei einer derartigen Energieerzeugung im Innern der Sonne liegt die Energie-

ausbeute pro Gramm Materie in der Größenordnung einiger erg/g sec), d.h. zur Aufrechterhaltung der Ausstrahlung der Sonne ausreicht, ist es notwendig, daß Stickstoff und Kohlenstoff zu je 0,5 Massenprozent in der gesamten Sternmaterie enthalten sind. Dies stimmt nicht schlecht mit den Angaben über die relative Häufigkeit dieser Elemente in der Sonnenatmosphäre überein.

Ganz analog kann man die Reaktionsdauer für den Einfang eines Protons durch Sauerstoff und schwerere Elemente unter den angegebenen physikalischen Bedingungen betrachten. Die von BETHE durchgeführten Berechnungen für p ergeben, daß für Sauerstoff die Reaktionsdauer 10^{12} Jahre ist, für Eisen etwa $3 \cdot 10^7$ Jahre, für Neon ungefähr $2 \cdot 10^{13}$ Jahre und für noch schwerere Kerne noch länger. Die Energieerzeugung ist bei diesen Reaktionen im allgemeinen geringer als beim Kohlenstoffzyklus, und alle Reaktionen sind mit der Erschöpfung der Elemente verbunden, so daß diese Reaktionen keine besondere Bedeutung haben können.

Als Energiequelle der Hauptreihensterne können wir also den Kohlenstoffzyklus ansehen. In frühen Stadien der Sternentwicklung kommen als Energiequellen, wenn auch nur sehr kurzzeitig, die Reaktionen des Wasserstoffs mit den leichten Elementen Li, Be und B in Frage. Die heutige Theorie gibt bislang noch keine befriedigende Erklärung für die Energiequellen der Riesensterne.

§ 32. Der innere Aufbau der Sterne

1. Der Aufbau der Hauptreihensterne

Wir können jetzt darangehen, die Frage nach dem Aufbau der Sterne, deren Energiequellen Kernreaktionen des betrachteten Typs sind und bei denen die Absorption durch Photoionisation der Metalle und Streuung durch freie Elektronen erfolgt, zu beantworten. Das Gleichungssystem (30.12) enthält jetzt keine unbekannten Parameter und Funktionen mehr: Der Absorptionskoeffizient ist beispielsweise durch die Gleichung (31.23) gegeben oder durch tabellierte Werte für den ganzen uns interessierenden Temperatur- und Dichtebereich und die relativen Häufigkeiten der Metalle. Die Ergiebigkeit der Energiequellen wird z.B. durch die Gleichungen (31.31) und (31.32) für den Kohlenstoffzyklus gegeben. Die Lösung des Gleichungssystems (30.12) besteht in einer schwierigen numerischen Integration, die oft so lange zu wiederholen ist, bis ein solcher Wert des Molekulargewichts μ gefunden wird, für den die Rechnung bei gegebener Masse M zu richtigen, bei dem jeweiligen Stern beobachteten Werten der Leuchtkraft L und des Radius r_1 führt. Es hat sich gezeigt, daß eine solche Übereinstimmung nicht nur durch Änderung des prozentualen Wasserstoffgehalts X zu erzielen ist. Man muß auch den Heliumgehalt Y berücksichtigen. Dies ist sofort einzusehen, wenn man die beiden Grundbedingungen (30.23) betrachtet. Da k_c und ε_c in diesem Fall von ϱ_c und T_c abhängen, d.h. also Funktionen von L, M und r_1 sind, so stellen die beiden Bedingungen (30.23) zwei Beziehungen zwischen M, L und r_1 dar, die nicht gleichzeitig durch ein Wertetripel (L, M, r_1) für einen Parameter μ zu erfüllen sind. Die Lösung wird

möglich, wenn die Beziehungen (30.23) die Form

$$F(L, M, r_1, X, Y) = 0$$

haben.

Wenn die Sternentstehung kein gleichzeitiger Prozeß ist (die Beobachtungen geben gewichtige Argumente dafür), so wäre ein einheitlicher Wasserstoff- und Heliumgehalt in Sternen, die sich in verschiedenen Entwicklungsstadien befinden, unwahrscheinlich, wenn allein die Umwandlung von Wasserstoff in Helium die Quelle der Sternenergie ist.

Die Analyse der chemischen Zusammensetzung der Sternatmosphären ergibt ebenfalls einen beträchtlichen Heliumgehalt (zuweilen bis 50%), und es besteht kein Grund zu der Annahme, daß sich die chemische Zusammensetzung im Sterninnern stark von der der Sternatmosphären unterscheidet, insofern eine starke Durchmischung der Sternmaterie stattfindet. Auf jeden Fall zeigen die Rechnungen, daß es möglich ist, ein Modell für die Hauptreihensterne mit Kohlenstoffzyklus bei vollständig bestimmtem Wasserstoff- und Heliumgehalt zu konstruieren. Die hierbei erhaltenen theoretischen Abschätzungen des Wasserstoff- und Heliumgehalts stehen in Einklang mit den direkten Abschätzungen ihrer Häufigkeiten in den Sternatmosphären. Speziell für die Sonne erhält man Werte für die Häufigkeiten des Wasserstoffs von 35 bis 60% und für das Helium von 25 bis 50%, bei den Metallen von 5 bis 12%.

Es zeigt sich jedoch, daß nahe dem Sternzentrum die Bedingungen des Strahlungsgleichgewichts verletzt sind, da der Temperaturgradient, der sich aus den Gleichungen des Strahlungsgleichgewichts errechnet, den adiabatischen Temperaturgradienten übersteigt (ein Effekt, der der Erscheinung der Wasserstoffkonvektionszonen unter der Photosphäre des Sterns analog ist). Dies hängt mit der Konzentration der Energiequellen nahe dem Sternzentrum zusammen, die wegen der starken Temperaturempfindlichkeit der Energieerzeugung durch thermonukleare Reaktionen [siehe (31.29)] sehr scharf ausgeprägt ist. Angenähert kann der stationäre Zustand in dieser zentralen Konvektionszone als ein Zustand konvektiven Gleichgewichts beschrieben werden, bei dem das System der sich ausbildenden Konvektionsströme die radialsymmetrische Verteilung der physikalischen Variablen nicht stört. Die Abhängigkeit des Drucks von der Dichte und der Temperatur wird hier bereits durch die Gleichung der Adiabate des „Sterngases" mit einem besonderen Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bestimmt. Dieses Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten des Sterngases erhält man aus der Adiabatengleichung

$$dE + p\,dv = 0,$$

wo

$$p = \frac{R}{\mu}\varrho T + \frac{1}{3}aT^4,$$

$$E = c_v T + vaT^4$$

bedeuten und v das spezifische Volumen ist. Das Einsetzen der Werte p und E

in die Adiabatengleichung ergibt nach einigen elementaren Umformungen

$$\frac{dT}{T} + (\Gamma_3 - 1)\frac{dv}{v} = 0$$

oder

$$\frac{dp}{p} + \Gamma_1 \frac{dv}{v} = 0,$$

mit

$$\Gamma_3 = 1 + \frac{(4-3\beta)(\gamma-1)}{\beta + 12(\gamma-1)(1-\beta)},$$

$$\Gamma_1 = \beta + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1)}{\beta + 12(\gamma-1)(1-\beta)}.$$

Ist $\beta = 1$ (bei Sternen der Hauptreihe), so ist $\Gamma_3 = \Gamma_1 = \gamma = \frac{c_p}{c_v}$ gleich dem Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität des Gases, und wir haben die adiabatische Zustandsänderung eines Gases ohne Strahlung. Ist $\beta = 0$, so ist $\Gamma_3 = \Gamma_1 = \frac{4}{3}$, und wir erhalten den bekannten Ausdruck für die adiabatische Expansion bei Berücksichtigung nur der Strahlung längs der Adiabaten $\frac{4}{3}$. Da Wasserstoff und Helium in der chemischen Zusammensetzung eines Sterns überwiegen, so ist γ (für $\beta = 1$) sehr nahe $\frac{5}{3}$.

Diese Vorstellungen über die zentrale Konvektionszone in den Sternen hat natürlich nur Näherungscharakter, da sie auf einer vereinfachten Vorstellung von der adiabatischen Konvektion beruht. In Wirklichkeit sind die Konvektionserscheinungen im Sterninnern wesentlich komplizierter, da sie von Wärmeaustausch und Turbulenz begleitet sind. Die Berücksichtigung dieser Faktoren muß zu einem anderen Kriterium für das Eintreten von Konvektion führen. Dieses Problem ist jedoch bisher so gut wie noch gar nicht untersucht.

Zum Schluß bringen wir als Beispiel das Ergebnis der numerischen Lösung des Systems (30.12) für die Sonne, wie es von A. G. Massewitsch u. a. nach der oben beschriebenen Methode erhalten wurde.

In Tabelle 28 sind die Entfernungen vom Sonnenzentrum in Einheiten des Sonnenradius ($6{,}9 \cdot 10^{10}$ cm), die Temperatur in Millionen Grad, die Dichte in g/cm^3, die Massenverteilung $\psi = \frac{M(r)}{M_\odot}$ und die Gesamtenergie $\eta = \frac{L(r)}{L_\odot}$ enthalten (die mit einem Sternchen versehenen Werte gelten für die Grenze des konvektiven Kerns).

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß die gesamte Energie in einem sehr kleinen Bereich um das Sternzentrum gebildet wird (der rund 15% des Radius und 13% der Sternmasse ausmacht). In Abb. 74 ist die Abhängigkeit der Dichte ϱ, Masse M und Temperatur T vom Radius r graphisch dargestellt.

Bei den Riesensternen besteht, wie wir erwähnten, eine Reihe von Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Energiequellen; es ist unzweckmäßig, auf die

Tabelle 28

N	$\frac{r}{r_\odot}$	$T \cdot 10^{-6}$	ϱ [g/cm³]	$\frac{M(r)}{M_\odot}$	$\frac{L(r)}{L_\odot}$
1	1,000	0,006	0,000	1,000	1,00
2	0,932	0,344	$1{,}77 \cdot 10^{-4}$	1,000	1,00
3	0,795	0,18	$1{,}29 \cdot 10^{-2}$	1,000	1,00
4	0,676	2,20	$1{,}10 \cdot 10^{-1}$	0,993	1,00
5	0,472	5,06	$1{,}91 \cdot 10^{0}$	0,911	1,00
6	0,358	7,78	$7{,}84 \cdot 10^{0}$	0,743	1,00
7	0,295	9,77	$1{,}57 \cdot 10^{1}$	0,586	1,00
8	0,262	11,00	$2{,}20 \cdot 10^{1}$	0,482	1,00
9	0,204	13,40	$3{,}61 \cdot 10^{1}$	0,294	1,00
10	0,169	15,03	$4{,}55 \cdot 10^{1}$	0,189	1,00
11*	0,148*	16,11*	$4{,}99 \cdot 10^{1}$*	0,133*	0,99*
12	0,000	20,70	$7{,}16 \cdot 10^{1}$	0,000	0,00

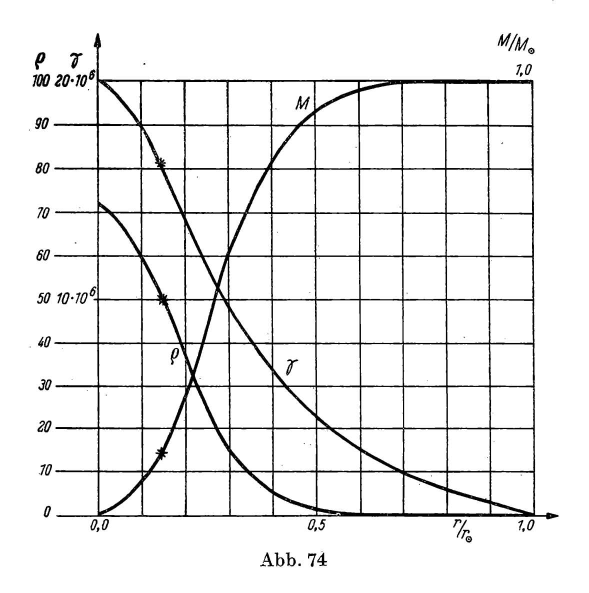


Abb. 74

Versuche zur Aufstellung einer Theorie des Aufbaus dieser Sterne einzugehen. Anders verhält es sich mit den weißen Zwergen, von deren Aufbau der nächste Abschnitt handeln soll.

2. Theorie des Aufbaus der weißen Zwerge

Die weißen Zwerge sind Sterne mit einer sehr großen mittleren Dichte. Diese erreicht die Größenordnung von 10^6 g/cm³. Wegen der starken Ionisation im Innern der Sterne bleibt dem Sterngas die Eigenschaft des idealen Gases erhalten, das dem BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz bis zu Dichten von 10^2 bis 10^3 g/cm³ gehorcht; bei höheren Dichten beginnt die Entartung zuerst des Elektronengases und danach (bei größeren Dichten als 10^5-10^6 g/cm³) die der schweren Teilchen. Das Gas gehorcht dann der FERMI-Statistik. Bei Entartung sowohl der Elektronen als auch der schweren Teilchen ist der Druck des Elektronengases mindestens 1840mal größer als der Druck der schweren Teilchen. Bei Dichten von etwa 10^6 g/cm³ treten auch relativistische Effekte in dem entarteten Elektronengas auf.

Wir betrachten ein entartetes Elektronengas, d. h. ein Gas mit einer Dichte, bei der alle niedrigen Quantenzustände besetzt sind. Alle möglichen Energiezustände der Elektronen im betrachteten Volumen lassen sich mit Hilfe von Quantenzahlen etwa genauso abzählen wie die Quantenzustände der Elektronen im Atom.

Die Zahl der Quantenzustände mit Impulsen in den Grenzen von p bis $p + dp$ ist

$$2V\frac{4\pi p^2 dp}{h^3},$$

wobei h^3 das Volumen einer Zelle im Phasenraum der Impulse ist und der Faktor 2 die beiden möglichen Einstellungen des Elektronenspins berücksichtigt. Ferner kann sich nach dem PAULI-Prinzip in jedem Quantenzustand nicht mehr als ein Elektron befinden. Ist also $N(p)\,dp$ die Zahl der Elektronen im Volumen V, deren Impulse innerhalb von p und $p + dp$ liegen, so ist

$$N(p)\,dp \leqslant V\frac{8\pi p^2 dp}{h^3}.$$

Wir betrachten die Zustandsgleichung eines vollständig entarteten Gases. Für dieses gilt

$$N(p)\,dp = V\frac{8\pi p^2 dp}{h^3}. \tag{32.1}$$

Enthält das Volumen V N Elektronen, deren Impuls nicht größer als p_0 ist, so ist

$$N = V\frac{8\pi}{h^3}\int_0^{p_0} p^2 dp = \frac{8}{3}\frac{\pi}{h^3}p_0^3 V \tag{32.2}$$

und die Elektronenkonzentration

$$n = \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3h^3}p_0^3. \tag{32.3}$$

Der Gasdruck p_G ist per definitionem gleich dem Mittelwert des Impulsstroms durch 1 cm² der Oberfläche; demzufolge ist

$$p_G V = \frac{1}{3}\int_0^{p_0} N(p)\, p v\, dp, \tag{32.4}$$

oder mit (32.2)

$$p_G = \frac{8\pi}{3h^3}\int_0^{p_0} p^3 \frac{\partial E}{\partial p}\, dp, \tag{32.5}$$

wobei E die kinetische Energie eines Elektrons mit dem Impuls p ist. Nach der Relativitätsmechanik haben wir:

$$E = mc^2\left\{\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right\}, \tag{32.6}$$

woraus

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{m}\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

folgt. Setzen wir diesen Ausdruck in (32.5) ein, so erhalten wir

$$p_G = \frac{8\pi}{3mh^3}\int_0^{p_0} \frac{p^4 dp}{\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{32.7}$$

Wir führen eine neue Variable Θ durch das Verhältnis

$$\operatorname{sh}\Theta = \frac{p}{mc}, \quad \operatorname{sh}\Theta_0 = \frac{p_0}{mc}$$

ein. Dann nimmt Gleichung (32.7) folgende Form an:

$$p_G = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3}\int_0^{\Theta_0} \operatorname{sh}^4\Theta\, d\Theta. \tag{32.8}$$

Hieraus erhalten wir nach Integration

$$p_G = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3}\left[\frac{\operatorname{sh}^3\Theta_0 \operatorname{ch}\Theta_0}{4} - \frac{3\operatorname{sh}2\Theta_0}{16} + \frac{3}{8}\Theta_0\right]. \tag{32.9}$$

Bezeichnen wir

$$\frac{p_0}{mc} = x, \tag{32.10}$$

haben wir schließlich

$$p_G = \frac{\pi m^4 c^5}{3 h^3} f(x) \doteq 6{,}01 \cdot 10^{22} f(x), \tag{32.11}$$

worin

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 3 \operatorname{arc\,sh} x \tag{32.12}$$

ist. Wir haben andererseits für die Gasdichte nach (32.3) und (32.10)

$$\varrho = n \mu m_p = \frac{8 \pi m^3 c^3}{3 h^3} \mu m_p x^3, \tag{32.13}$$

wobei m_p die Protonenmasse und μ das Molekulargewicht ist. Die Gleichungen (32.11), (32.12) und (32.13) stellen Zustandsgleichungen des entarteten Gases in Parameterform dar. Diese Gleichungen gelten für den allgemeinen Fall und speziell sowohl für den nichtrelativistischen Grenzfall ($p_0 \ll mc$) als auch für den Grenzfall relativistischer Entartung ($p_0 \gg mc$). Im ersten Falle, wenn x klein ist ($p_0 \ll mc$), erhalten wir durch Eliminieren von x aus (32.11) und (32.13)

$$p_G = K_1 \varrho^{\frac{5}{3}}, \quad K_1 = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m (\mu m_p)^{\frac{5}{3}}} \quad (x \to 0). \tag{32.14}$$

Bei sehr hohen Dichten beginnt die Größe p_0 des maximalen Impulses mc zu übersteigen, und im Grenzfall $p_0 \gg mc$ erhalten wir den folgenden asymptotischen Ausdruck:

$$p_G = K_2 \varrho^{\frac{4}{3}}, \quad K_2 = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{h_c}{8 (\mu m_p)^{\frac{4}{3}}} \quad (x \to \infty). \tag{32.15}$$

Wir wenden uns jetzt dem Problem des Gleichgewichts der weißen Zwerge zu. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die Frage nach der Rolle des Strahlungsdrucks in einem entarteten Gase. Die gewöhnliche Entartung tritt dann ein, wenn der Elektronendruck nach Formel (32.14) wesentlich größer als der übliche Wert des Gasdrucks $p_e = n_e k T$ ist. Schreibt man diese Ungleichung auf, so erhalten wir als Kriterium für die Entartung des Gases

$$A_1 \equiv \frac{n h^3}{(2 \pi m k T)^{\frac{3}{2}}} \gg 1 \tag{32.16}$$

(unter Vernachlässigung von Faktoren der Größenordnung 1).

Wir wollen das Verhältnis von Gasdruck zu Strahlungsdruck bestimmen. Nach Gleichung (32.14) haben wir $\left(p_R = \frac{1}{3} a T^4,\ a = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k^4}{(c h)^3}\right)$:

$$\frac{p_G}{p_R} = \frac{3^{\frac{8}{3}} A_1^{\frac{5}{3}}}{\pi^{\frac{19}{6}} 2^{\frac{5}{6}}} \left(\frac{m c^2}{k T}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Im Falle nichtrelativistischer Entartung jedoch ist die mittlere Energie der Elektronen $kT \ll mc^2$ und die Größe $A \gg 1$ und demzufolge $\frac{p_G}{p_R} \gg 1$. Relativistische Entartung tritt ein, wenn der Druck (32.15) den gaskinetischen $n_e kT$ wesentlich übersteigt. Dies führt zu der Bedingung

$$A_2 \equiv \frac{3}{8^3 \pi} \frac{n (hc)^3}{(kT)^3} \gg 1. \tag{32.17}$$

Bilden wir nun das Verhältnis $\frac{p_G}{p_R}$, so erhalten wir nach (32.15) und (32.17)

$$\frac{p_G}{p_R} = A_2^{\frac{4}{3}},$$

woraus wiederum folgt, daß $p_G \gg p_R$ ist. Daher kann man sowohl in einem relativistisch als auch in einem nichtrelativistisch entarteten Gas den Strahlungsdruck vollständig vernachlässigen.

Nun wollen wir das Gravitationsgleichgewicht eines entarteten FERMI-Gases betrachten.

Die Zustandsgleichungen sind in ihrer allgemeinsten Form (32.11), (32.12) und (32.13) oder

$$p_G = A f(x), \quad \varrho = B x^3, \tag{32.18}$$

worin

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3 h^3}, \quad B = \frac{8 \pi m^3 c^3 m_p}{3 h^3} \mu \tag{32.19}$$

und $f(x)$ durch Gleichung (32.12) gegeben ist. Die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts (30.7) und die Gleichung für die Masse (30.9) ergeben für den Fall eines entarteten Gases ($p_G \gg p_R$)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\varrho} \frac{d p_G}{dr} \right) = -4 \pi G \varrho. \tag{32.20}$$

Setzen wir darin die Ausdrücke für p_G und ϱ aus (32.18) ein, so erhalten wir

$$\frac{A}{B} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{x^3} \frac{d f(x)}{dx} \right) = -4 \pi G B x^3. \tag{32.21}$$

Nimmt man hier

$$y = \sqrt{1 + x^2} = y_0 \Phi, \quad r = \left(\frac{2A}{\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{B y_0} \eta \tag{32.22}$$

an und beachtet, daß nach (32.12)

$$\frac{1}{x^3} \frac{d f(x)}{dx} = 8 \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + 1} \tag{32.23}$$

ist, so erhalten wir als Grundgleichung des Problems

$$\frac{1}{\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^2\frac{d\Phi}{d\eta}\right) = -\left(\Phi^2 - \frac{1}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (32.24)$$

Hierin sind x_0 und y_0 die Werte von x und y im Sternzentrum, die durch die Dichte im Zentrum bestimmt werden. Die Lösung der Gleichung (32.24) muß die Bedingung (32.17) erfüllen oder

$$\text{für} \quad \eta = 0 \quad \Phi = 1, \quad \frac{d\Phi}{d\eta} = 0, \qquad (32.25)$$

da der Ausdruck für die Masse die Form

$$M(r) = 4\pi\int_0^{\eta} \varrho r^2 dr = -4\pi\left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{B^2}\eta^2\frac{d\Phi}{d\eta} \qquad (32.26)$$

hat. Die Lösungen der Gleichung (32.24), die die Bedingungen (32.25) erfüllen, enthalten den Parameter $y_0 = \sqrt{1 + x_0^2}$, der nur von der Dichte im Sternzentrum ϱ_c und dem Molekulargewicht abhängt. Aus allen möglichen Lösungen müssen wir diejenige auswählen, die die Bedingungen (30.18) erfüllen (die Dichte verschwindet an der Grenze, und $M(r) = M$ ist die Sternmasse).

Wie die Untersuchungen gezeigt haben, gibt es für jeden Wert ϱ_c eine einzige Lösung, d.h., für gewisses $\eta = \eta_1$ verschwindet die Funktion Φ. Die zweite Bedingung (32.22) bestimmt (für $\eta = \eta_1$) den Radius des entarteten Sterns als Funktion von ϱ_c und μ, d.h. stellt eine Gleichung der Form (30.22)

$$r_1 = f_1(\varrho_c, \mu)$$

dar. Die zweite Bedingung liefert uns für die äußere Grenze $[M(r_1) = M]$ jedoch nach (32.26) eine zweite Beziehung der Form (30.22):

$$M = f_2(\varrho_c, \mu).$$

Eliminiert man aus beiden Beziehungen ϱ_c, so erhält man eine Beziehung von der Form (30.23), d.h.

$$F(r_1, M, \mu) = 0,$$

so daß die Masse (und das Molekulargewicht) eindeutig den Radius des weißen Zwerges bestimmt. In Tabelle 29 sind Werte der Masse M (in Einheiten der Sonnenmasse), der zentralen Dichte ϱ_c, der mittleren Dichte ϱ_m und des Radius r_1 nach Rechnungen von CHANDRASEKHAR aufgeführt (diese Angaben gelten für $\mu = 1$; für ein von 1 verschiedenes Molekulargewicht muß man die in der Tabelle angegebenen Werte für M mit μ^{-2}, für r_1 mit μ^{-1}, für ϱ_c und ϱ_m mit μ multiplizieren).

Tabelle 29

$\frac{M}{M_{\odot}}$	Zentrale Dichte (in g/cm³)	Mittlere Dichte (in g/cm³)	Radius (in cm)
5,728	∞	∞	0
5,484	$9{,}737 \cdot 10^{8}$	$4{,}716 \cdot 10^{7}$	$4{,}136 \cdot 10^{8}$
5,294	$3{,}391 \cdot 10^{8}$	$1{,}578 \cdot 10^{7}$	$5{,}443 \cdot 10^{8}$
4,852	$8{,}187 \cdot 10^{7}$	$5{,}111 \cdot 10^{6}$	$7{,}699 \cdot 10^{8}$
4,310	$2{,}669 \cdot 10^{7}$	$2{,}114 \cdot 10^{6}$	$9{,}936 \cdot 10^{8}$
3,528	$7{,}908 \cdot 10^{6}$	$7{,}960 \cdot 10^{5}$	$1{,}287 \cdot 10^{9}$
2,934	$3{,}523 \cdot 10^{6}$	$4{,}065 \cdot 10^{5}$	$1{,}514 \cdot 10^{9}$
2,440	$1{,}816 \cdot 10^{6}$	$2{,}302 \cdot 10^{5}$	$1{,}721 \cdot 10^{9}$
2,007	$9{,}885 \cdot 10^{5}$	$1{,}345 \cdot 10^{5}$	$1{,}929 \cdot 10^{9}$
1,612	$5{,}381 \cdot 10^{5}$	$7{,}741 \cdot 10^{4}$	$2{,}155 \cdot 10^{9}$
0,877	$1{,}236 \cdot 10^{5}$	$1{,}936 \cdot 10^{4}$	$2{,}793 \cdot 10^{9}$
0	0	0	∞

Wir sehen, daß Gravitationsgleichgewicht für ein entartetes Gas mit einer Masse

$$M > 5{,}75 M_{\odot}\mu^{-2} \equiv M_0$$

nicht existiert. Für Sterne mit einer Masse $M < \sim 2{,}5\, M_{\odot}\mu^{-2}$ ist die Hauptmasse des Gases, wie die Rechnungen CHANDRASEKHARS zeigten, gewöhnlich entartet, für $M > \sim 2{,}5\, M_{\odot}\mu^{-2}$ spielt die relativistische Entartung die Hauptrolle. Der Radius der Gleichgewichtskonfiguration nimmt stetig mit der Masse ab und wird bei Annäherung der Masse an den kritischen Wert M_0 verschwindend klein. Obwohl die Beobachtungsdaten über Massen und Radien der weißen Zwerge noch wenig zahlreich sind, weisen sie doch darauf hin, daß die in der Tabelle berechneten Werte von der Größenordnung der beobachteten sind.

Wir sehen jedoch, daß bei der Lösung des Gleichgewichtsproblems für die weißen Zwerge die Frage nach ihren Leuchtkräften L vermieden wurde. Diese Frage läßt sich nicht ohne Kenntnis der Energiequellen und des Molekulargewichts im Sterninnern lösen. Für weiße Zwerge verfügen wir jedoch vorläufig noch nicht über so sichere Daten, die einer Deutung ihrer geringen Leuchtkräfte zugrunde gelegt werden könnten. Es ist möglich, daß bei so dichten Sternen die Kontraktion als Energiequelle dienen kann, doch bedarf die Frage nach den Energiequellen der weißen Zwerge noch eines eingehenden Studiums.

KAPITEL VIII

Die Streuung des Lichts in den Planetenatmosphären

§ 33. Theorie des Strahlungstransports in den Planetenatmosphären

1. Der Strahlungstransport in den Planetenatmosphären. Die Streuindikatrix

Es ist bekannt, daß die Planeten Venus, Jupiter sowie Saturn und allem Anschein nach auch Uranus und Neptun von einer so dichten Atmosphäre umgeben sind, daß wir ihre Oberfläche nicht sehen. Die Strahlung, die von diesen Planeten zu uns gelangt, ist die Sonnenstrahlung, die in ihren Atmosphären gestreut wird. Daher sind die Gesetzmäßigkeiten, denen das von den Planeten reflektierte Licht unterliegt (Helligkeitsverteilung über die Planetenscheibe, Änderung der Gesamthelligkeit mit der Phase, Zahlenwert der Albedo) nur durch Untersuchung der Streuprozesse, die in den Planetenatmosphären stattfinden, zu erhalten. Da die Atmosphären der erwähnten Planeten undurchsichtig sind, d.h. eine sehr große optische Dicke haben ($\tau \gg 1$), so erfährt ein Lichtquant von seinem Eindringen in die Planetenatmosphäre bis zu deren Verlassen mit großer Wahrscheinlichkeit eine große Zahl von Streuungen; wir haben es also im wesentlichen mit einer Vielfachstreuung des Lichts in den Planetenatmosphären zu tun.

Auch das Studium der optischen Gesetze unserer Erdatmosphäre führte zur Betrachtung von Streuprozessen. Schon LEONARDO DA VINCI deutete das blaue Himmelslicht als Streuung des Sonnenlichts durch die Luft, wobei der blaue Anteil der Sonnenstrahlung eine stärkere Streuung erfährt als der rote. Die optische Dicke der Erdatmosphäre ist bei Abwesenheit von Wolken wesentlich kleiner als 1. Doch haben zahlreiche Untersuchungen gezeigt, daß zur Deutung der Helligkeitsverteilung über das Himmelsgewölbe neben der Streuung erster Ordnung auch die Streuung höherer Ordnungen zu berücksichtigen ist. (Vom Vorhandensein einer Wolkenschicht, in der das Sonnenlicht eine sehr große Zahl von Streuprozessen durchmacht, ehe es zur Erdoberfläche gelangt, soll noch nicht die Rede sein.) Das Problem der Lichtstreuung in der Erdatmosphäre führt also im allgemeinen auch auf das Problem der Vielfachstreuung in einem Medium. Die Berechnung der Vielfachstreuung des Lichts in den Planetenatmosphären wird auf der Grundlage der Theorie des Strahlungstransports gelöst. Dabei kann man für die Rechnungen annehmen, daß die Atmosphäre aus planparallelen Schichten besteht, da die lineare Dicke der Atmo-

sphäre in allen Fällen klein im Vergleich zum Krümmungsradius der Atmosphärenschichten ist (dies ist in jedem Falle gerechtfertigt für die Dicke des Teils der Planetenatmosphäre, von dem noch ein merklicher Prozentsatz von den in unsere Richtung gestreuten Quanten direkt zu uns gelangt).

Fänden in einer Planetenatmosphäre nur reine Streuprozesse statt, so würde sie bei hinreichend großer optischer Dicke die gesamte auf sie einfallende Energie vollständig reflektieren. Mit anderen Worten, die Albedo des Planeten wäre in diesem Falle gleich 1. Die Beobachtungen zeigen jedoch, daß die Albedo vieler Planeten, die undurchsichtige Atmosphären besitzen, merklich kleiner als 1 ist. Daraus folgt, daß die Energie, die im visuellen und photographischen Bereich durch ein beliebiges Volumenelement der Planetenatmosphäre absorbiert wird, nicht vollständig gestreut, sondern zum Teil in andere Energieformen, beispielsweise in Wärmeenergie, umgewandelt wird. Im Einklang mit den in der Theorie der Planetenatmosphären allgemein üblichen Bezeichnungen wollen wir hier mit λ den relativen Energieanteil einer gegebenen Frequenz bezeichnen, der direkt nach seiner Absorption in dieser Frequenz gestreut wird. (In der Theorie der Sternphotosphären bezeichnet man diese Größe mit ε_ν). Dann ist $1 - \lambda$ der Bruchteil der Energie, der nach der Absorption in andere Energieformen umgewandelt, also nicht direkt in derselben Frequenz wieder ausgestrahlt wird, d.h. einer wahren Absorption unterliegt.

Es ist klar, daß jedes Volumenelement der Atmosphäre nicht nur das hindurchgehende Licht streut, sondern auch als Quelle von Wärmestrahlung wirkt, da infolge der oben erwähnten Prozesse der teilweisen Umwandlung der absorbierten Energie in Wärme (wahre Absorption) die Temperatur der Atmosphäre hinreichend hoch sein kann. Die Wärmestrahlung der Planetenatmosphären liegt bei den Temperaturen, die in ihnen herrschen, hauptsächlich im fernen Infrarot bei einer Wellenlänge von mehr als 40000 Å. Im sichtbaren und photographischen Bereich des Spektrums ist sie verschwindend klein. Daher kann man, obwohl wir auch hier auf wahre Absorption ($\lambda < 1$) stoßen, die Eigenstrahlung im visuellen und photographischen Gebiet vernachlässigen. Jedes Volumenelement streut also in diesen Frequenzen nur einen bestimmten Bruchteil der absorbierten Energie ohne zusätzlich etwas auszustrahlen. Die Frequenz der gestreuten Energie bleibt dabei dieselbe. Da wir es mit dem visuellen und photographischen Spektralbereich zu tun haben, bedeutet dies, daß das Strahlungsfeld in jeder Frequenz als unabhängig von den Strahlungsfeldern in anderen Frequenzen angesehen werden kann. Würde sich nun diese Energie, die in jedem Volumenelement durch einen Elementarakt gestreut wird, gleichmäßig über alle Richtungen verteilen, unabhängig davon, in welcher Richtung sie in das Volumenelement einfiel (man sagt in diesem Falle, daß das Volumenelement eine sphärische Streuindikatrix besitzt), so wäre die Bedingung des Strahlungsgleichgewichts die folgende:

$$4\pi j_\nu = \lambda \alpha_\nu \int I_\nu d\omega . \tag{33.1}$$

Hierin ist $4\pi j_\nu$ die Energie, welche nach allen Seiten des Einheitsvolumens

in der Frequenzintervalleinheit ausgestrahlt wird, α_ν der *Koeffizient der Lichtschwächung in der betrachteten Frequenz* oder der *Extinktionskoeffizient*, I_ν die Intensität der Strahlung und $d\omega$ das Raumwinkelelement.

Man nennt $s_\nu = \lambda\alpha_\nu$ häufig den Streukoeffizienten und $k_\nu = (1 - \lambda)\alpha_\nu$ den Koeffizienten der wahren Absorption. Der Wert λ hängt im allgemeinen von der Frequenz ν ab.

In Wirklichkeit hat aber ein Quant, das sich in irgendeiner bestimmten Richtung bewegt, nach einer Streuung im allgemeinen eine unterschiedliche Wahrscheinlichkeit, in diese oder jene Richtung ausgestrahlt zu werden. Wir bezeichnen mit θ und φ die Winkel, unter denen sich das Quant bis zu seiner Streuung in einem bestimmten Kugelkoordinatensystem bewegt. Nach der Streuung wird das Quant in einer Richtung ausgesandt, die durch die Winkel θ' und φ' charakterisiert ist. Um die Richtung (θ', φ') nehmen wir nun ein Raumwinkelelement $d\omega'$. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß das Quant nach der Streuung eine Richtung erhält, die im Innern des Raumwinkelelements $d\omega'$ liegt? Es ist selbstverständlich, daß diese Wahrscheinlichkeit proportional $d\omega'$ ist und im allgemeinen vom Winkel zwischen der Einfalls- (θ, φ) und der Endrichtung (θ', φ') des Quants abhängt. Diesen Winkel bezeichnen wir mit γ. Dann ist

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')\,. \tag{33.2}$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhalten wir den Ausdruck

$$dP = x(\cos\gamma)\,\frac{d\omega'}{4\pi}\,. \tag{33.3}$$

Die Funktion $x(\cos\gamma)$ nennt man *Streuindikatrix* oder Phasenfunktion und charakterisiert den Streuprozeß.

Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten über alle Richtungen gleich 1 sein muß, erhalten wir aus (33.3)

$$\int x(\cos\gamma)\,\frac{d\omega'}{4\pi} = 1\,. \tag{33.4}$$

Im oben erwähnten Fall gleicher Streuwahrscheinlichkeit in allen Richtungen (sphärische Streuindikatrix) haben wir $x(\cos\gamma) = \text{const}$, und aus (33.4) erhalten wir dann sofort

$$x(\cos\gamma) = 1\,. \tag{33.5}$$

Im allgemeinen Fall ist $x(\cos\gamma)$ eine gewisse positive Funktion von $\cos\gamma$, die in eine Reihe nach LEGENDREschen Polynomen entwickelt werden kann:

$$x(\cos\gamma) = x_0 + x_1P_1(\cos\gamma) + x_2P_2(\cos\gamma) + \cdots, \tag{33.6}$$

dabei folgt aus (33.4) unmittelbar, daß

$$x_0 = 1 \tag{33.7}$$

ist. Für eine sphärische Streuindikatrix beschränkt sich die Reihe (33.6) auf ein Glied.

Ist die Streuindikatrix gegeben, so läßt sich unter den obigen Bedingungen leicht die Bedingung des Strahlungsgleichgewichts aufstellen. Die Energie, die pro Frequenzintervall- und Zeiteinheit vom Volumenelement in den Raumwinkel $d\omega$ ausgestrahlt wird, muß nämlich gleich

$$j_\nu d\omega' = \lambda\alpha_\nu \int x(\cos\gamma) I_\nu(\theta, \varphi) \frac{d\omega}{4\pi} d\omega' \tag{33.8}$$

sein, da aus jedem Elementarbündel der Richtungen $d\omega$ vom Volumenelement die Energiemenge $\alpha_\nu I_\nu(\theta, \varphi) d\omega$ absorbiert und davon der Anteil $\lambda\alpha_\nu I_\nu(\theta, \varphi) d\omega$ gestreut wird. Um den Bruchteil kennenzulernen, der in das Raumwinkelelement $d\omega'$ gestreut wird, muß man diese Energiemenge in Übereinstimmung mit (33.3) mit $x(\cos\gamma)\dfrac{d\omega'}{4\pi}$ multiplizieren.

Kürzen wir (33.8) durch $d\omega'$, so erhalten wir die Bedingung des monochromatischen Strahlungsgleichgewichts in der Form

$$j_\nu = \lambda\alpha_\nu \int x(\cos\gamma) I_\nu(\theta, \varphi) \frac{d\omega}{4\pi}. \tag{33.9}$$

Diese Gleichung ist zusammen mit der Gleichung des Strahlungstransports zu betrachten, die im Falle planparalleler Schichten unter der Bedingung, daß die Winkel θ und θ' von der Richtung der äußeren Normalen abzuziehen sind, die Form

$$\cos\theta' \frac{dI_\nu}{dz} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \tag{33.10}$$

hat. Hier hängt j_ν nicht nur von der Höhe z der Atmosphäre ab, sondern auch von der Richtung θ', φ'.

Setzen wir für j_ν den Ausdruck (33.9) ein und führen die optische Tiefe τ_ν in der betrachteten Frequenz ein, so erhalten wir die Integro-Differentialgleichung

$$\cos\theta' \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \lambda \int x(\cos\gamma) I_\nu(\theta, \varphi) \frac{d\omega}{4\pi}, \tag{33.11}$$

die nur eine unbekannte Funktion I_ν enthält, welche von τ_ν und θ, φ abhängt.

Zur Vereinfachung führen wir folgende Bezeichnungsweise ein: die Winkelveränderlichen, über die integriert wird, werden mit Strichen versehen, und die Winkelveränderlichen, über die nicht integriert wird, werden ohne Strich geschrieben. Den Index ν setzen wir im allgemeinen nicht. Da das Strahlungsfeld für jede Frequenz unabhängig von den übrigen Frequenzen zu berechnen ist, kann dies nicht zu Mißverständnissen führen. Dann läßt sich (33.11) in der

Form

$$\cos\theta\,\frac{dI}{d\tau} = I - \lambda\int x(\cos\gamma)\,I(\theta',\,\varphi')\,\frac{d\omega'}{4\pi} \tag{33.12}$$

schreiben, wobei $\cos\gamma$ durch (33.2) gegeben ist.

Entsprechend dem physikalischen Sinn der Aufgabe haben wir neben Gleichung (33.12) folgende Grenzbedingung: An der äußeren Grenze der Atmosphäre ($\tau = 0$) ist die Intensität der einfallenden Strahlung vorgegeben. Sie ist gleich Null für alle Richtungen außer für diejenige, aus der die direkte Sonnenstrahlung einfällt.

Den Strom der direkten Sonnenstrahlung, gemessen als diejenige Energiemenge, die pro Frequenzintervall- und Zeiteinheit senkrecht auf die Flächeneinheit auftrifft, wollen wir mit πS bezeichnen. Da wir es im vorliegenden Falle mit Strahlung zu tun haben, die in einer Richtung konzentriert ist, ist es zur Vermeidung unstetiger Funktionen zweckmäßig, die direkte Sonnenstrahlung in die oben eingeführte Intensität I der Strahlung nicht einzuschließen, sondern wir wollen unter I nur die Intensität der diffusen Strahlung verstehen, die vom Medium selbst gestreut wird. Dann ist die Gesamtintensität der Strahlung gleich der Summe der gestreuten Strahlung I und einer gewissen Funktion, die für alle Richtungen gleich Null ist, jedoch für eine bestimmte Richtung θ_0, φ_0, nämlich die Richtung der direkten Sonnenstrahlung, unendlich groß wird.

Daher müssen auf der rechten Seite von (33.12) unter dem Integral diese beiden Summanden auftreten, und da die Bezeichnung I nur für die Intensität der diffusen Strahlung (erster Summand) vorbehalten ist, müssen wir an Stelle dieses Integrals die Summe

$$\lambda\int x(\cos\gamma)\,I(\theta',\,\varphi')\,\frac{d\omega'}{4\pi} + \lambda\,\frac{\pi S}{4\pi}\,x(\cos\gamma_0)\,e^{\tau_0\sec\theta_0} \tag{33.13}$$

schreiben. Hierin ist γ_0 der Winkel zwischen den Richtungen (θ, φ) und (θ_0, φ_0). Die Gesamtintensität der Sonnenstrahlung außerhalb der Atmosphäre ist πS (d.h., das Integral über $d\omega'$, der Intensität der direkten Sonnenstrahlung über alle Richtungen der Sonnenscheibe, ist gleich πS); in der optischen Tiefe τ beträgt diese Intensität infolge der Schwächung der direkten Strahlung (Extinktion) dann nur noch $\pi S e^{\tau\sec\theta_0}$. Da θ_0 der Winkel zwischen der einfallenden Sonnenstrahlung und der äußeren Normalen auf den Atmosphärenschichten ist, hat $\sec\theta_0$ einen negativen Wert.

Unter dieser Bedingung des physikalischen Sinns der Funktion $I(\theta, \varphi)$ müssen wir also an Stelle der Gleichung (33.12)

$$\cos\theta\,\frac{dI}{d\tau} = I - \lambda\int x(\cos\gamma)\,I(\theta',\,\varphi')\,\frac{d\omega'}{4\pi} + \frac{\lambda}{4}\,S\,x(\cos\gamma_0)\,e^{\tau_0\sec\theta_0} \tag{33.14}$$

schreiben. Für I haben wir die einfache Grenzbedingung $I = 0$ für $\tau = 0$ und

$\theta > \frac{\pi}{2}$, d.h., die Intensität der diffusen Strahlung ist an der Grenze der Atmosphäre gleich Null.

Die Lösung der Gleichung (33.14) ergibt den Wert $I(\theta', \varphi')$ für alle τ, d.h. für alle Atmosphärentiefen und speziell auch für $\tau = 0$. Mit dem Wert $I(\theta', \varphi')$ für $\tau = 0$ läßt sich die Helligkeitsverteilung über die Planetenscheibe bestimmen. Das erhaltene Resultat kann dann unmittelbar mit den Beobachtungen verglichen werden.

2. Das Invarianzprinzip und seine Anwendung

Gewöhnlich ersetzt man die Integro-Differentialgleichung (33.14) durch die aus dieser unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen erhaltenen Integralgleichung, in der als unbekannte Funktion

$$B(\tau, \theta, \varphi) = \lambda \int x(\cos\gamma) I(\theta', \varphi') \frac{d\omega'}{4\pi} + \frac{\lambda}{4} S x(\cos\gamma_0) e^{\tau \sec\theta_0}. \tag{33.15}$$

auftritt.

Wenn durch die Lösung der erwähnten Integralgleichung die Funktion $B(\tau, \theta, \varphi)$ bekannt ist, so wird Gleichung (33.14) in eine gewöhnliche inhomogene lineare Differentialgleichung umgewandelt, die durch Quadratur zu lösen ist, und man findet speziell den Wert für I für die Richtungen nach außen $\left(\theta < \frac{\pi}{2}\right)$ bei $\tau = 0$. Der Wert B bestimmt also den Emissionskoeffizienten ε, da nach (33.9) und (33.15)

$$j = \alpha B(\tau, \theta, \varphi) \tag{33.16}$$

ist.

So ergibt sich also, daß man zur Bestimmung der I-Werte nur an der Grenze und für den Vergleich dieses Ergebnisses mit den Beobachtungen den Wert der unbekannten Funktion $B(\tau, \eta, \theta)$ oder j für alle Tiefen und alle θ und φ kennen muß. Wenn man sich also nur für die Helligkeitsverteilung über die Planetenscheibe interessiert, ist diese Methode außerordentlich unbequem.

Während uns nämlich nur eine bestimmte Funktion zweier Veränderlicher interessiert, d.h. der Wert $I(\theta, \varphi)$ für $\tau = 0$, sind wir durch die Behandlung des Problems mit Hilfe der Integralgleichung gezwungen, eine Funktion dreier Veränderlicher, $B(\tau, \theta, \varphi)$ aufzusuchen.

Es erhebt sich also die Frage, ob man nicht eine Gleichung aufstellen kann, aus der direkt der Wert $I(\theta, \varphi)$ an der Grenze $\tau = 0$ zu finden wäre.

Eine derartige Gleichung läßt sich tatsächlich aufstellen. In ihr tritt als unbekannte Funktion nur $I(0, \theta, \varphi)$ auf, d.h. die Winkelverteilung der austretenden Strahlung. Darüber hinaus deckt die erhaltene Gleichung zugleich (sogar ohne besondere Lösung) die Struktur der Funktion $I(0, \theta, \varphi)$ auf.

Zur Herleitung der benötigten Gleichung gehen wir vom I n v a r i a n z p r i n z i p aus, das in letzter Zeit in der Theorie der Lichtstreuung verbreitete Anwendung findet.

Die von uns zu behandelnde Aufgabe besteht in folgendem: An der äußeren Grenze eines Mediums unendlich großer optischer Dicke fällt in einer Richtung, die durch die Winkel θ_0 und φ_0 bestimmt ist, ein paralleles Lichtbündel ein. Durch die in dem Medium stattfindenden Streuprozesse wird ein Bruchteil der Strahlung gewissermaßen reflektiert, wobei diese Reflexion in alle Richtungen erfolgt. Man bezeichnet eine derartige Reflexion als *diffuse Reflexion*. Wir suchen nun die Intensität der diffus reflektierten Strahlung. Es ist selbstverständlich, daß die Intensität des diffus reflektierten Lichts eine Funktion sowohl der Einfallswinkel θ_0, φ_0 als auch der Reflexionswinkel θ, φ sein wird:

$$I = I(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0).$$

Es ist auch klar, daß die reflektierte Intensität der des einfallenden Strahls proportional ist, d.h. der Größe S. Daher ist

$$I(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) = S r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0). \tag{33.17}$$

Den Wert $r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$ kann man als den *Koeffizienten der diffusen Reflexion* bezeichnen. Im Gegensatz zum Vorangegangenen werden wir im weiteren den Winkel θ_0 von der inneren Normalen aus zählen, da dies bequemer ist und zu keinerlei Mißverständnissen führen kann. Den Winkel θ rechnen wir wie vordem von der äußeren Normalen aus.

Die Anwendung des Invarianzprinzips auf das betrachtete Problem besteht darin, daß sich das diffuse Reflexionsvermögen eines Mediums unendlich großer optischer Dicke, das aus planparallelen Schichten besteht, nicht ändert, wenn man an der äußeren Grenze eine ebene Schicht endlicher optischer Dicke hinzufügt, deren Elemente dieselben optischen Eigenschaften besitzen wie das ursprüngliche Medium. Das bedeutet, daß der Koeffizient λ und die Streuindikatrix in der hinzugefügten Schicht die gleichen sind wie in dem ursprünglichen Medium. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst den Fall einer sphärischen Streuindikatrix, wenn also $x(\cos\gamma) = 1$ ist.

Wir bezeichnen die Grenze des Mediums vor dem Hinzufügen der Schicht mit A, die neue Grenze, die nach dem Hinzufügen der Schicht erhalten wird, mit A'. Bezeichnen wir ferner die optische Dicke der Zusatzschicht mit $\Delta\tau$. Da $\Delta\tau$ von unserer Wahl abhängt, können wir diese Größe so klein machen, daß man ihr Quadrat gegenüber $\Delta\tau$ vernachlässigen kann. Wir machen jene Änderungen in der Intensität der vom Medium diffus reflektierten Strahlung ausfindig, die sich aus dem Hinzufügen der Schicht $\Delta\tau$ ergeben, und setzen die algebraische Summe dieser Änderungen gleich Null. Wir zählen diese Änderungen auf:

1. Die Sonnenstrahlung wird bei ihrem Durchgang durch die zusätzliche Schicht um das $\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\cos\theta_0}\right)$fache geschwächt. Nach der diffusen Reflexion an der Grenze A nimmt die Intensität um das $\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\cos\theta}\right)$fache ab. Es tritt also

an Stelle von $I(\theta, \theta_0)$ die Intensität

$$I(\theta, \theta_0)\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\cos\theta_0}\right)\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\cos\theta}\right)$$

nach außen. Wir erwähnen, daß infolge der sphärischen Streuindikatrix die Intensität des reflektierten Lichts nicht mehr vom Azimut der einfallenden und austretenden Strahlung abhängen wird, weswegen wir an Stelle von $I(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$ einfach $I(\theta, \theta_0)$ schreiben.

So wird also infolge der Schwächung der einfallenden und diffus reflektierten Strahlung in der zusätzlichen Schicht die Intensität der diffus reflektierten Strahlung auf

$$I(\theta, \theta_0)\Delta\tau\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta_0}\right)$$

vermindert.

2. Die Zusatzschicht $\Delta\tau$ streut unmittelbar in die Richtung θ einen Teil der auf sie auftreffenden direkten Sonnenstrahlung. Infolgedessen vergrößert sich die Intensität des diffus reflektierten Lichts um

$$\frac{\lambda}{4\pi}\pi S\frac{\Delta\tau}{\cos\theta}.$$

3. Die zusätzliche Schicht $\Delta\tau$, welche die auf sie fallende direkte Sonnenstrahlung streut, lenkt einen Teil der Energie dieser Strahlung unter verschiedenen Winkeln θ' zur Normalen zur Grenze A. An der Grenze A erfährt sie eine diffuse Reflexion; infolgedessen erhält man eine zusätzliche Strahlung mit der Intensität

$$\int_0^\pi d\theta'\int_0^{2\pi} d\varphi' I(\theta, \theta')\frac{\sin\theta'}{\cos\theta'}\frac{\lambda}{4\pi}\Delta\tau,$$

was nach Integration über φ'

$$\frac{\lambda}{2}\Delta\tau\int_0^\pi I(\theta, \theta')\frac{\sin\theta' d\theta'}{\cos\theta'}$$

ergibt.

4. Die zusätzliche Schicht, die einen gewissen Bruchteil des Lichts absorbiert, das von der Grenze A diffus reflektiert wird, streut einen Teil dieses Lichts in die gegebene Richtung θ. Die Intensität dieser Strahlung wird gleich

$$\frac{\lambda}{4\pi}\frac{\Delta\tau}{\cos\theta}\int_0^\pi d\theta'\int_0^{2\pi} d\varphi' I(\theta', \theta_0)\sin\theta' = \frac{\lambda}{2}\frac{\Delta\tau}{\cos\theta}\int_0^\pi I(\theta', \theta_0)\sin\theta' d\theta'.$$

5. Die direkte Sonnenstrahlung wird diffus von der Grenze A reflektiert, durch die zusätzliche Schicht $\Delta\tau$ nach A zurückgestreut und erneut von der Oberfläche A diffus reflektiert. Dieser Vorgang ergibt die zusätzliche Strahlung

$$\Delta\tau \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{I(\theta, \theta'')}{\pi S} \frac{\sin\theta'' d\theta'' d\varphi''}{\cos\theta''} \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' I(\theta', \theta_0) \sin\theta' =$$

$$= \lambda\Delta\tau \int_0^\pi \frac{I(\theta, \theta'')}{S} \frac{\sin\theta''}{\cos\theta''} d\theta'' \int_0^\pi I(\theta', \theta_0) \sin\theta' d\theta'.$$

Alle übrigen Zuwächse der Strahlung sind von zweiter oder höherer Ordnung in $\Delta\tau$.

Die letzten vier positiven Zuwächse müssen den ersten negativen Zuwachs so kompensieren, daß die Intensität des diffus reflektierten Lichts trotz der hinzugefügten Schicht ungeändert bleibt.

Wir finden also unter Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung in $\Delta\tau$

$$I(\theta, \theta_0)\Delta\tau\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta_0}\right) = \frac{\lambda}{4} S \frac{\Delta\tau}{\cos\theta} + \frac{\lambda}{2}\Delta\tau \int_0^\pi I(\theta, \theta') \frac{\sin\theta' d\theta'}{\cos\theta'}$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\frac{\Delta\tau}{\cos\theta} \int_0^\pi I(\theta', \theta_0) \sin\theta' d\theta'$$

$$+ \frac{\lambda\Delta\tau}{S} \int_0^\pi I(\theta, \theta'') \frac{\sin\theta''}{\cos\theta''} d\theta'' \int_0^\pi I(\theta', \theta_0) \sin\theta' d\theta'.$$

Dividieren wir beide Seiten dieser Gleichung durch $\Delta\tau$ und führen an Stelle der Winkel θ und θ_0 die Größen

$$\cos\theta = \eta, \quad \cos\theta_0 = \xi, \quad \cos\theta' = \eta' \tag{33.18}$$

ein, dann finden wir, daß die Invarianzbedingung ergibt:

$$I(\eta, \xi)\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right) = \frac{\lambda}{4} S \frac{1}{\eta} + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 I(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}$$
$$+ \frac{\lambda}{2\eta} \int_0^1 I(\eta', \xi) d\eta' + \frac{\lambda}{S} \int_0^1 I(\eta, \eta'') \frac{d\eta''}{\eta''} \int_0^1 I(\eta', \xi) d\eta'. \tag{33.19}$$

Schließlich führen wir in dieser Gleichung an Stelle von $I(\eta, \xi)$ die Funktion $r(\eta, \xi)$ nach Gleichung (33.17) ein, d.h., wir setzen

$$I(\eta, \xi) = S r(\eta, \xi). \tag{33.20}$$

Damit erhalten wir eine Funktionalgleichung für $r(\eta, \xi)$

$$\begin{aligned} r(\eta, \xi)\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right) = \frac{\lambda}{4}\frac{1}{\eta} + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 r(\eta, \eta')\frac{d\eta'}{\eta'} \\ + \frac{\lambda}{2\eta}\int_0^1 r(\eta', \xi)\, d\eta' + \lambda\int_0^1 r(\eta, \eta'')\frac{d\eta''}{\eta''}\int_0^1 r(\eta', \xi)\, d\eta', \end{aligned} \tag{33.21}$$

die auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$r(\eta, \xi)\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right) = \frac{\lambda}{4\eta}\left[1 + 2\eta\int_0^1 r(\eta, \eta')\frac{d\eta'}{\eta'}\right]\left[1 + 2\int_0^1 r(\eta', \xi)\, d\eta'\right]. \tag{33.22}$$

Setzen wir weiter

$$r(\eta, \xi) = \xi \varrho(\eta, \xi), \tag{33.23}$$

so finden wir für die Funktion $\varrho(\eta, \xi)$, die man gewöhnlich als *Helligkeitskoeffizienten* der diffus reflektierenden Schicht bezeichnet,

$$\varrho(\eta, \xi)(\eta + \xi) = \frac{\lambda}{4}\left[1 + 2\eta\int_0^1 \varrho(\eta, \eta')\, d\eta'\right]\left[1 + 2\xi\int_0^1 \varrho(\eta', \xi)\, d\eta'\right]. \tag{33.24}$$

Wenn nun eine gewisse Funktion $\varrho(\eta, \xi)$ die Gleichung (33.24) befriedigt, so ist leicht einzusehen, daß auch die Funktion $\varrho(\xi, \eta)$ diese befriedigen muß. Da jedoch Gleichung (33.24) ihrem physikalischen Inhalt nach nur eine einzige Lösung haben darf, so muß die Funktion $\varrho(\eta, \xi)$ symmetrisch sein:

$$\varrho(\eta, \xi) = \varrho(\xi, \eta). \tag{33.25}$$

In diesem Falle wird aber der rechte Teil der Gleichung (33.24) das Produkt einer gewissen Funktion von η mit derselben Funktion von ξ darstellen. Wir wollen diese Funktion im ersten Fall mit $\varphi(\eta)$, im zweiten mit $\varphi(\xi)$ bezeichnen. Somit ist

$$\varphi(\eta) = 1 + 2\eta\int_0^1 \varrho(\eta, \eta')\, d\eta' \tag{33.26}$$

und

$$\varrho(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4}\frac{\varphi(\eta)\varphi(\xi)}{\eta + \xi}. \tag{33.27}$$

Die Gleichung (33.27), die noch keinen expliziten Ausdruck für die Funktion $\varrho(\eta, \xi)$ gibt, enthüllt die Struktur dieser Funktion.

Können wir die Hilfsfunktion $\varphi(\eta)$ bestimmen, so finden wir damit auch den Helligkeitskoeffizienten $\varrho(\eta, \xi)$. Um $\varphi(\eta)$ zu erhalten, setzen wir (33.27) in (33.26) ein. Wir erhalten

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\,\varphi(\xi)}{\eta+\xi}\,d\xi\,. \tag{33.28}$$

Dies ist auch eine Funktionalgleichung für die Funktion $\varphi(\eta)$. So ist also die Lösung der Funktionalgleichung (33.24) von uns auf die Lösung der einfacheren Funktionalgleichung (33.28) zurückgeführt, die leicht numerisch zu berechnen ist. Hierzu ist die Methode der sukzessiven Approximation am geeignetsten, die darin besteht, daß man auf der rechten Seite einen Näherungswert für $\varphi(\eta)$ einsetzt und damit links den Wert der folgenden Näherung erhält. Als nullte Näherung nimmt man am besten den Mittelwert der Funktion $\varphi(\eta)$ im Intervall (0,1) an, d.h.,

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(\eta)\,d\eta\,.$$

Der exakte Wert dieses Integrals ist leicht zu erhalten. Hierzu integrieren wir (33.28) über η:

$$\int_0^1 \varphi(\eta)\,d\eta = 1 + \frac{\lambda}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\,\varphi(\xi)\,\eta}{\eta+\xi}\,d\eta\,d\xi$$

$$= 1 + \frac{\lambda}{4}\int_0^1\int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\,\varphi(\xi)\,\eta}{\eta+\xi}\,d\eta\,d\xi + \frac{\lambda}{4}\int_0^1\int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\,\varphi(\xi)\,\xi}{\eta+\xi}\,d\eta\,d\xi\,.$$

Die letzten beiden Integrale sind einander gleich. Sie unterscheiden sich nur in der Bezeichnung der Integrationsvariablen. Durch Addition dieser Integrale erhalten wir

$$\int_0^1 \varphi(\eta)\,d\eta = 1 + \frac{\lambda}{4}\int_0^1 \varphi(\eta)\,d\eta\int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi$$

oder

$$\varphi_0 = 1 + \frac{\lambda}{4}\varphi_0^2,$$

woraus

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(\eta)\,d\eta = \frac{2 - 2\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}$$

folgt. Setzt man diesen Ausdruck an Stelle von $\varphi(\eta)$ in die rechte Seite von (33.28) ein, so erhalten wir die nächste Näherung für $\varphi(\eta)$ usw.

In erster Näherung haben wir z. B.

$$\varphi(\eta) = 1 + \left(1 - \sqrt{1 - \lambda}\right) \eta \lg \frac{1 + \eta}{\eta}.$$

In Tabelle 30 sind die Zahlenwerte der Hilfsfunktion $\varphi(\eta)$ für $\lambda = 0{,}4$, 0,5, ..., 1,0 aufgeführt. Für kleine Werte von λ genügt es, sich auf die erste Näherung zu beschränken, weswegen für sie die Zahlenwerte $\varphi(\eta)$ nicht angeführt werden.

Tabelle 30

η \ λ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	1,06	1,07	1,09	1,11	1,14	1,17	1,25
0,2	1,09	1,11	1,15	1,18	1,23	1,29	1,45
0,3	1,11	1,14	1,19	1,24	1,30	1,39	1,64
0,4	1,13	1,17	1,22	1,28	1,36	1,48	1,83
0,5	1,14	1,19	1,25	1,32	1,41	1,56	2,01
0,6	1,15	1,20	1,27	1,35	1,46	1,63	2,19
0,7	1,16	1,22	1,29	1,38	1,50	1,69	2,38
0,8	1,17	1,23	1,31	1,40	1,54	1,75	2,55
0,9	1,18	1,24	1,32	1,42	1,57	1,80	2,73
1,0	1,18	1,25	1,34	1,44	1,60	1,85	2,91

Man benutzt Tabelle 30 in folgender Weise: Nach (33.20), (33.23) und (33.27) haben wir im Falle einer sphärischen Streuindikatrix

$$I(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4} S \xi \frac{\varphi(\eta)\, \varphi(\xi)}{\eta + \xi}. \tag{33.29}$$

Für jeden Punkt der Planetenscheibe werden der Kosinus des Einfallswinkels der Sonnenstrahlung ξ und der Kosinus der Zenitdistanz η, unter der die Erde von diesem Punkt des Planeten aus gesehen wird, berechnet. Der Wert S kann bestimmt werden, da die Entfernung des Planeten von der Sonne immer bekannt ist. Nimmt man einen bestimmten λ-Wert an, dann kann man die Intensität I berechnen und mit der Beobachtung vergleichen. Findet man nach Gleichung (33.29) und Tabelle 30 für irgendein λ Werte von I, die hinreichend gut mit der Helligkeit in den verschiedenen Punkten der Planetenscheibe übereinstimmen, so kann man schließen, daß die Voraussetzung einer sphärischen Streuindikatrix mindestens in den Grenzen der Beobachtungsgenauigkeit gerechtfertigt ist.

Erwähnt sei noch, daß man im Falle weiter außen liegender Planeten, angefangen bei Jupiter, nicht nur in der Opposition, sondern auch noch in beträchtlicher Entfernung von der Opposition annehmen kann, daß die Winkel θ und θ_0 einander gleich sind, d.h., daß $\eta = \xi$ ist. Dann wird aus Gleichung (33.29)

$$I(\eta) = \frac{\lambda}{8} S[\varphi(\eta)]^2, \tag{33.30}$$

und wir sehen, daß der größte theoretisch mögliche Kontrast zwischen der Scheibenmitte ($\eta = 1$) und dem Rande ($\eta = 0$) für $\lambda = 1$ vorhanden ist, nämlich

$$I(1):I(0) = 8{,}41 .$$

Tatsächlich haben die bei den äußeren Planeten beobachteten Kontraste einen geringeren Wert, was damit zusammenhängt, daß $\lambda < 1$ ist.

3. Verallgemeinerung für den Fall einer nichtsphärischen Streuindikatrix

Im Falle einer asphärischen Streuindikatrix werden sowohl der Koeffizient der diffusen Reflexion als auch der Helligkeitskoeffizient ϱ, die durch die Beziehung

$$r = \xi \varrho$$

miteinander verbunden sind, nicht nur vom Einfalls- und Reflexionswinkel abhängen, sondern auch von der Differenz im Azimut des reflektierten und des einfallenden Strahls. Es ist also

$$\varrho = \varrho(\eta, \xi; \varphi - \varphi_0). \tag{33.31}$$

Das Invarianzprinzip ist in diesem allgemeinen Fall jedoch genauso wie bei einer sphärischen Streuindikatrix anzuwenden. Nur die Formeln sind dann komplizierter. Im Prinzip sind jedoch dieselben Operationen vorzunehmen. Wir wollen sie aber hier nicht durchführen und bringen nur das Endresultat.

Der Helligkeitskoeffizient wird in Form einer Summe dargestellt:

$$\varrho(\eta, \xi; \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{n} f_m(\eta, \xi) \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

worin die Zahl n gleich der Nummer des höchsten LEGENDREschen Polynoms in der Entwicklung (33.6) der Streuindikatrix ist, bei dem der Koeffizient von Null verschieden ist.

Die Funktionen $f_m(\eta, \xi)$ lassen sich durch gewisse Hilfsfunktionen $\varphi_i^m(\eta)$ ($i = m, m+1, \ldots, n$) ausdrücken, von denen jede nur von einer Veränderlichen abhängt. Diese Hilfsfunktionen werden aus einem gewissen System von Funktionalgleichungen bestimmt. Hierbei haben wir für jede Funktion mit gegebenem m ein besonderes System von Funktionalgleichungen, das unabhängig von den übrigen zu lösen ist.

Für die verschiedenen $f_m(\eta, \xi)$ haben wir die folgenden Ausdrücke:

$$f_0(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi_0^0(\eta)\,\varphi_0^0(\xi) - x_1\varphi_1^0(\eta)\,\varphi_1^0(\xi) + \cdots + (-1)^n x_n \varphi_n^0(\eta)\,\varphi_n^0(\xi)}{\eta + \xi},$$

$$f_m(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4} \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i+m} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \frac{\varphi_i^m(\eta)\,\varphi_i^m(\xi)}{\eta + \xi},$$

$$f_n(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4} x_n \frac{\varphi_n^n(\eta)\,\varphi_n^n(\xi)}{\eta + \xi} \frac{1}{(2n)!}$$

Die hierin vorkommenden Hilfsfunktionen sind durch die folgenden Systeme von Funktionalgleichungen gegeben:

$$\varphi_0^0(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\xi)}{\eta + \xi}d\xi - \frac{\lambda}{2}x_1\eta\varphi_1^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\xi)}{\eta + \xi}d\xi + \cdots$$
$$+ (-1)^n x_n \eta \varphi_n^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_n^0(\xi)}{\eta + \xi}d\xi,$$

$$\varphi_1^0(\eta) = \eta - \frac{\lambda}{2}\eta\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\xi)\,\xi}{\eta + \xi}d\xi + \frac{\lambda}{2}x_1\eta\varphi_1^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\xi)\,\xi}{\eta + \xi}d\xi + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} x_n \eta \varphi_n^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_n^0(\xi)\,\xi}{\eta + \xi}d\xi,$$

. . . .

$$\varphi_n^0(\eta) = P_n(\eta) + (-1)^n \frac{\lambda}{2}\eta\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\xi)\,P_n(\xi)}{\eta + \xi}d\xi +$$
$$+ (-1)^{n+1} x_1 \eta \varphi_1^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\xi)\,P_n(\xi)}{\eta + \xi}d\xi + \cdots + x_n\eta\varphi_n^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_n^0(\xi)\,P_n(\xi)}{\eta + \xi}d\xi.$$

Analoge Systeme existieren für Funktionen mit anderen Werten des oberen Index m, wobei an Stelle der LEGENDREschen Polynome die entsprechenden

zugeordneten LEGENDREschen Funktionen $P_n^m(\eta)$ auftreten. Speziell $\varphi_n^n(\eta)$ genügt der Gleichung

$$\varphi_n^n(\eta) = (1-\eta^2)^{\frac{n}{2}} + \frac{\lambda}{(2n)!} x_n \eta \varphi_n^n(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_n^n(\xi)(1-\xi^2)^{\frac{n}{2}}}{\eta+\xi} d\xi .$$

Obwohl diese Systeme von Funktionalgleichungen äußerlich sehr kompliziert erscheinen, sind sie numerisch leicht durch die Methode der sukzessiven Approximation zu lösen, und man erhält in jedem konkreten Fall relativ einfache Resultate.

So ist im Falle der einfachsten nichtsphärischen Streuindikatrix

$$x(\cos\gamma) = 1 + x_1 \cos\gamma$$

der Helligkeitskoeffizient gleich

$$\varphi(\eta, \xi; \varphi-\varphi_0) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi_0^0(\eta)\varphi_0^0(\xi) - x_1 \varphi_1^0(\eta)\varphi_1^0(\xi)}{\eta+\xi} + \frac{\lambda}{4} x_1 \frac{\varphi_1'(\eta)\varphi_1'(\xi)}{\eta+\xi} \cos(\varphi-\varphi_0),$$

wobei die beiden Hilfsfunktionen $\varphi_0^0(\eta)$ und $\varphi_1^0(\eta)$ aus dem System

$$\varphi_0^0(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\xi)}{\eta+\xi}d\xi - \frac{\lambda}{2}x_1\eta\varphi_1^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\xi)}{\eta+\xi}d\xi,$$

$$\varphi_1^0(\xi) = \eta - \frac{\lambda}{2}\eta\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\xi)\,\xi}{\eta+\xi}d\xi + \frac{\lambda}{2}x_1\eta\varphi_1^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\xi)\,\xi}{\eta+\xi}d\xi$$

zu bestimmen sind und die Funktion $\varphi_1^{(1)}(\eta)$ aus der Gleichung

$$\varphi_1^{(1)}(\eta) = \sqrt{1-\eta^2} + \frac{\lambda}{4}x_1\eta\varphi_1'(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1'(\xi)}{\eta+\xi}\sqrt{1-\xi^2}\,d\xi$$

gefunden wird. Diese Gleichungen sind leicht zu lösen, und die aus der numerischen Auswertung erhaltenen tabellierten Hilfsfunktionen ermöglichen sofort die Berechnung des Helligkeitskoeffizienten.

Wir erwähnen, daß nicht nur, wie die Theorie zeigt, der Koeffizient der diffusen Reflexion der Atmosphäre, sondern auch der Koeffizient der diffusen Transmission bei sehr großer optischer Dicke der Atmosphäre durch diese Hilfsfunktionen zu bestimmen ist.

Die hier gebrachten Systeme von Funktionalgleichungen für die Hilfsfunktionen $\varphi_i^m(\eta)$ sind Systeme nicht linearer Gleichungen. In der Arbeit von W. W. SOBOLEW wurde jedoch gezeigt, daß diese Hilfsfunktionen selbst gewisse lineare Integralgleichungen befriedigen [79].

Die oben durchgeführten Rechnungen berücksichtigen nicht die Polarisation des Lichts bei den Elementarakten der Streuung und die daraus folgende Polarisation der diffus reflektierten und diffus durchgelassenen Strahlung. Eine exakte Theorie der Lichtstreuung in einem trüben Medium unter Berücksichtigung der Polarisation wurde von W. W. SOBOLEW 1943 ausgearbeitet. Die Resultate seiner Untersuchungen wurden später veröffentlicht [68].

§ 34. Vergleich der Theorie mit der Beobachtung

1. Die Albedo der Planetenatmosphären

Kennt man für jede Richtung die Intensität der diffusen Strahlung, die aus der Planetenatmosphäre austritt, so kann man den Gesamtstrom des von einem Quadratzentimeter der Atmosphärengrenzschicht diffus reflektierten Lichts berechnen. Dieser ist gleich

$$\pi H = \int_0^1 d\eta \int_0^{2\pi} I(\eta, \xi, \varphi - \varphi_0)\, \eta\, d\varphi .$$

Im Falle einer sphärischen Streuindikatrix hängt I nicht vom Azimut ab, und daher ist

$$\pi H = 2\pi \int_0^1 I(\eta, \xi)\, \eta\, d\eta = 2\pi S \int_0^1 r(\eta, \xi)\, \eta\, d\eta .$$

Führt man an Stelle des Koeffizienten r der diffusen Reflexion den Helligkeitskoeffizienten ϱ ein, so wird:

$$\pi H = 2\pi S \xi \int_0^1 \varrho(\eta, \xi)\, \eta\, d\eta .$$

Da andererseits die Intensität der direkten Sonnenstrahlung gleich πS ist, so ist der Strom, der auf einen Quadratzentimeter der Atmosphärengrenze auftrifft, gleich $\pi S \xi$, wobei ξ wie zuvor der Einfallswinkel der Sonnenstrahlung ist. Teilt man den austretenden Strahlungsstrom πH durch den einfallenden, so erhalten wir die *Albedo der Planetenatmosphäre*:

$$A = \frac{\pi H}{\pi S \xi} = 2 \int_0^1 \varrho(\eta, \xi)\, \eta\, d\eta . \tag{34.1}$$

Wir wollen nun für den Fall einer sphärischen Streuindikatrix die Albedo A berechnen, die im allgemeinen vom Einfallswinkel abhängen wird. Hierzu setzen wir (33.27) in (34.1) ein:

$$A = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\,\varphi(\xi)}{\eta + \xi}\,\eta\,d\eta. \tag{34.2}$$

Mit

$$\frac{\eta}{\eta + \xi} = 1 - \frac{\xi}{\eta + \xi}$$

finden wir

$$A = \frac{\lambda}{2}\,\varphi(\xi) \int_0^1 \varphi(\eta)\,d\eta - \frac{\lambda \xi}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\,\varphi(\xi)}{\eta + \xi}\,d\eta. \tag{34.3}$$

Das zweite Glied der rechten Seite von (34.3) läßt sich direkt aus (33.28) durch Umbenennung der Veränderlichen angeben und ist gleich $\varphi(\xi) - 1$. Damit und mit dem von uns nach (33.38) berechneten Wert von $\int_0^1 \varphi(\eta)\,d\eta$ erhalten wir

$$A = 1 - \varphi(\xi)\sqrt{1 - \lambda}. \tag{34.4}$$

Nach dieser Formel lassen sich leicht die Zahlenwerte der Albedo für verschiedene ξ und λ berechnen, wobei wir uns erinnern, daß $\varphi(\xi)$ von dem Parameter λ abhängt. Analoge Rechnungen lassen sich auch für eine asphärische Streuindikatrix durchführen. In Tabelle 31 bringen wir die Zahlenwerte der Albedo für den Fall einer sphärischen Streuindikatrix.

Tabelle 31

ξ \ λ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,23	0,29	0,37	0,45	0,55	0,68	1,00
0,1	0,18	0,24	0,31	0,39	0,49	0,63	1,00
0,2	0,16	0,21	0,28	0,35	0,45	0,59	1,00
0,3	0,14	0,19	0,25	0,32	0,42	0,56	1,00
0,4	0,13	0,17	0,23	0,30	0,39	0,53	1,00
0,5	0,12	0,16	0,21	0,28	0,37	0,51	1,00
0,6	0,11	0,15	0,20	0,26	0,35	0,49	1,00
0,7	0,10	0,14	0,19	0,25	0,33	0,47	1,00
0,8	0,10	0,13	0,17	0,23	0,31	0,45	1,00
0,9	0,09	0,12	0,16	0,22	0,30	0,43	1,00
1,0	0,08	0,12	0,15	0,21	0,29	0,41	1,00

Kennt man die Albedo A im Verhältnis zu der Strahlung, die auf eine gegebene Fläche der Planetenatmosphäre unter bestimmtem Winkel einfällt, so läßt sich leicht die sogenannte sphärische Albedo berechnen. Unter *sphärischer Albedo* versteht man das Verhältnis der Strahlungsmenge, die vom ganzen Planeten reflektiert wird (von seiner Atmosphäre), zur Strahlungsmenge, die auf den Planeten auftrifft (auf die Grenze seiner Atmosphäre).

Die gesamte Strahlungsmenge, die auf den Planeten auftrifft, ist gleich $\pi R^2 \cdot \pi S$, wobei R der Planetenradius ist. Die diffus reflektierte Energie ist durch das Integral

$$2\pi R^2 \int_0^R \pi H(r)\, d\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}$$

gegeben, worin r die Projektion des Abstands vom Zentrum der beleuchteten Scheibe bis zu einem bestimmten Punkt auf der Planetenoberfläche ist. Nun ist aber

$$\frac{r}{R} = \sin\theta_0 = \sqrt{1-\xi^2}$$

und

$$\pi' H(r) = A(\xi)\, \xi \pi S.$$

Damit ist die reflektierte Gesamtenergie gleich

$$2\pi R^2 \pi S \int_0^1 A(\xi)\, \xi\, d\xi,$$

woraus wir für die sphärische Albedo (die wir mit A^* bezeichnen)

$$A^* = 2\int_0^1 A(\xi)\, \xi\, d\xi \tag{34.5}$$

haben. Im Falle einer sphärischen Streuindikatrix folgt daraus nach (34.4)

$$A^* = 1 - 2\sqrt{1-\lambda} \int_0^1 \varphi(\xi)\, \xi\, d\xi. \tag{34.6}$$

Werte der sphärischen Albedo A^*, die nach dieser Formel berechnet wurden, sind in Tabelle 32 aufgeführt.

Tabelle 32

λ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
A^*	0,11	0,15	0,19	0,26	0,34	0,48	1,0

Somit kann man also aus λ die sphärische Albedo bestimmen und umgekehrt λ aus A^* finden, wenn die Streuindikatrix bekannt ist.

2. Vergleich mit den Beobachtungen

Der Vergleich der oben gebrachten theoretischen Rechnungen für die sphärische Streuindikatrix mit den Ergebnissen der von W. W. SCHARONOW durchgeführten absoluten Bestimmungen des Koeffizienten der diffusen Reflexion für Jupiter hat gezeigt, daß die beobachtete Helligkeitsverteilung über die Planetenscheibe mit $\lambda = 0{,}969$ gut mit der theoretischen übereinstimmt.

Es muß jedoch erwähnt werden, daß in den Grenzen der Beobachtungsgenauigkeit dieselbe Helligkeitsverteilung über die Jupiterscheibe mit der Annahme einer beliebigen anderen, nichtsphärischen Streuindikatrix und einem anderen Wert für λ gedeutet werden kann. Dieses Beispiel zeigt, daß für diejenigen Planeten, bei denen sich der Phasenwinkel fast nicht ändert (Jupiter, Saturn usw.), die Streuindikatrix aus den Beobachtungen der Helligkeitsverteilungen schwierig zu bestimmen ist.

Ganz anders liegen die Verhältnisse für Venus, die wir unter allen möglichen Phasenwinkeln beobachten können. Hier hat die Form der Streuindikatrix einen ziemlich erheblichen Einfluß auf die Helligkeitskurve des Planeten. W. W. SOBOLEW verglich die von RUSSELL beobachtete Helligkeitskurve mit der von ihm geschaffenen Näherungstheorie der diffusen Reflexion bei beliebiger Streuindikatrix und konnte so die Streuindikatrix für die Venusatmosphäre finden. Es zeigte sich, daß der Parameter λ für die Atmosphäre dieses Planeten gleich 0,989 ist und die Streuindikatrix durch eine Funktion wiedergegeben wird, deren Zahlenwerte in Tabelle 33 aufgeführt sind.

Tabelle 33

γ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$x(\gamma)$	7,2	6,0	2,7	1,5	1,0	0,07	0,51	0,40	0,35	0,41	0,56	0,65	0,70

Interessant ist es, die Streuindikatrix der Venusatmosphäre mit derjenigen der Erdatmosphäre zu vergleichen. Die Streueigenschaften der Erdatmosphäre können wir nicht aus den Prozessen der diffusen Reflexion beurteilen, sondern wir müssen schon die diffuse Transmission untersuchen. Wie W. W. SOBOLEW zeigte, ist es hierbei wichtig, daß trotz der relativ geringen optischen Dicke der Erdatmosphäre (wenn sie von Wolken frei ist), die im sichtbaren Spektralgebiet etwa 0,3 beträgt, nicht nur die Streuung erster Ordnung berücksichtigt wird, sondern auch die höherer Ordnungen, d.h., man muß sich auf eine

hinreichend strenge Theorie stützen. Die Bestimmung der Streuindikatrix der Erdatmosphäre wurde von vielen Autoren durchgeführt. Die interessantesten Ergebnisse wurden von E. W. PJASKOWSKI-FESSENKOW und W. W. SOBOLEW erhalten. W. W. SOBOLEW leitete seine Bestimmung aus Beobachtungen der Helligkeitsverteilung über den Himmel ab, die im Sommer 1943 in Elabug von Mitarbeitern des astronomischen Observatoriums der Leningrader Universität durchgeführt wurden. Die Ergebnisse seiner Untersuchungen sind in Tabelle 34 aufgeführt.

Tabelle 34

γ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
x (cos γ)	4,6	3,3	1,9	1,3	0,94	0,75	0,64	0,65	0,72	0,85	1,03	1,1	1,2

Ein Vergleich der Tabellen 33 und 34 zeigt, daß die Streuindikatrix der Venusatmosphäre mehr nach vorn (in Richtung kleiner Neigungswinkel) ausgezogen ist als die Indikatrix der Erdatmosphäre.

Wie leicht zu sehen ist, läßt sich der Grad dieser Ausbuchtung nach vorn vor allem durch den Koeffizienten x_1 in dem Polynom $P_1(\cos\gamma) = \cos\gamma$ in Gleichung (33.6) abschätzen. Für eine sphärische Indikatrix und ebenso für Indikatrizes, die der Bedingung $x(\gamma) = x(180° - \gamma)$ genügen, d.h. symmetrisch zur Richtung $\gamma = 90°$ sind, haben wir $x_1 = 0$. Für Indikatrizes, die nach vorn ausgezogen sind, ist $x_1 > 0$, für rückwärts ausgezogene ist $x_1 < 0$. Für den Fall einer sehr scharf nach vorn ausgezogenen nadelförmigen Indikatrix, d.h., wenn die Streuung nur mit geringer Neigung gegen die ursprüngliche Richtung erfolgt, ist $x_1 = 3$. Für dieselbe Form, nach rückwärts ausgezogen, ist $x_1 = -3$. Der Wert von x_1 gibt uns also eine erste grobe Vorstellung von der Form der Streuindikatrix.

Wäre die Streuung in der Erd- oder der Venusatmosphäre eine reine Molekülstreuung, so hätte die Indikatrix eine Form, die schon von RAYLEIGH erhalten wurde:

$$x(\cos\gamma) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\gamma).$$

Bei der RAYLEIGHschen Indikatrix ist der Koeffizient x_1 gleich Null, d.h., sie besitzt keine einseitige Ausbuchtung. Die beträchtliche Ausbuchtung der Streuindikatrix der Erd- und der Venusatmosphäre spricht dafür, daß in beiden Fällen außer der reinen Molekülstreuung, die natürlich immer vorhanden ist, noch eine zusätzliche Streuung des Lichts durch größere flüssige oder feste in der Atmosphäre schwebende Teilchen existiert. Da die Zahl der Schwebeteilchen in den verschiedenen Atmosphärenschichten der Zahl der streuenden Gasmoleküle nicht proportional ist, muß sich die Indikatrix mit der

Höhe in der Atmosphäre ändern, was die Theorie sehr erschwert. Speziell auf der Erde ist der Dunst, der durch feine Schwebeteilchen gebildet wird, mehr auf niedrigere Atmosphärenschichten konzentriert.

Der Grad der Ausbuchtung der Streuindikatrix hängt von den Abmessungen der streuenden Teilchen ab. Speziell durchsichtige Teilchen (Wassertröpfchen und andere Flüssigkeitströpfchen) haben eine um so mehr nach vorn ausgezogene Indikatrix, je größer ihr Durchmesser ist. Darum können wir auch beim Vergleich der Tabellen 33 und 34 sagen, daß die Streuung in der Venusatmosphäre durch größere Teilchen verursacht wird als in der Erdatmosphäre. Hierbei muß man jedoch berücksichtigen, daß bei der Ableitung der Streuindikatrix der Erdatmosphäre der wolkenlose Fall betrachtet wurde. In Wolken können sich indessen größere Wassertröpfchen befinden. Im Fall der Venusatmosphäre haben wir eine dichte Wolkendecke und erhalten für sie eine Indikatrix, die im wesentlichen die Beschaffenheit der Teilchen der Wolken charakterisiert.

Die Theorie der Lichtstreuung, die oben für den Fall eines Mediums unendlich großer optischer Dicke entwickelt wurde, läßt sich für ein Medium von endlicher optischer Dicke verallgemeinern. Hierbei hat man es neben dem Koeffizienten der diffusen Reflexion des Lichts mit dem Koeffizienten der diffusen Transmission zu tun. Im Zusammenhang damit wird die Anzahl der von einer Veränderlichen abhängigen Funktionen, aus denen die Funktionen aufgebaut sind, die die Werte dieser Koeffizienten geben, verdoppelt. Infolgedessen verdoppelt sich auch die Zahl der Gleichungen im System der Funktionalgleichungen für diese Hilfsfunktionen.

Einen besonderen Platz nimmt der Grenzfall großer optischer Dicken ein. Der Koeffizient der diffusen Reflexion strebt für $\tau \to \infty$ gegen den Koeffizienten der diffusen Reflexion für eine unendlich dicke Schicht. Der Koeffizient der diffusen Transmission strebt gegen das Produkt $f(\tau_0)u(\theta)$, worin $u(\theta)$ nur von θ abhängt und nicht von der Richtung der ursprünglichen Strahlung. Die relative Verteilung der durchgelassenen Strahlung über die Richtungen bleibt also an der Grenze unverändert.

Mit einem solchen Fall diffuser Transmission der Strahlung durch ein Medium sehr großer optischer Dicke haben wir es in der Erdatmosphäre bei Vorhandensein einer gleichmäßigen und hinreichend mächtigen Wolkenschicht zu tun. Die Beobachtungen zeigen, daß sich die relative Helligkeitsverteilung über den bewölkten Himmel bei einer dichten und homogenen Bewölkung von Tag zu Tag nur geringfügig ändert, wenn man von dem Einfluß solcher Faktoren wie etwa einer verschneiten Erdoberfläche absieht. Ist die Erdoberfläche nicht mit Schnee bedeckt, so kann man ihre Reflexion bei groben Rechnungen vernachlässigen. Man muß also Sommer- und Winterbedingungen bei der Behandlung der Lichtverhältnisse in der Atmosphäre unterscheiden. Eine gewisse Konstanz der Helligkeitsverteilung über den Himmel für jede dieser Bedingungen deutet auf die Konstanz gewisser optischer Eigenschaften der Wassertröpfchen hin, aus denen die Wolken bestehen. Zu diesen Eigenschaften muß man einen λ-Wert von nahezu 1 rechnen. Mit anderen Worten, wir haben es hier mit fast reiner Streuung zu tun. Der λ-Wert nahe 1 wird durch die folgenden Tatsachen bestätigt:

1. die relativ geringe Änderung der Tageshelligkeit, hervorgerufen durch eine Wolkendecke, obwohl die optische Dicke dieser Decke bisweilen sehr groß sein kann. Irgendeine merkliche wahre Absorption (d.h. ein merkliches Abweichen des λ-Werts von 1) würde bei so großen optischen Tiefen eine beträchtliche Verminderung der Tageshelligkeit auf der Erdoberfläche verursachen, was wir aber nicht beobachten;

2. den hohen Albedowert einer Wolkendecke, von dem Beobachtungen mit Flugzeugen berichten;

3. die Tatsache, daß bei Vorhandensein einer Schneedecke die Helligkeitsverteilung über den Himmel nahezu gleichmäßig ist. In diesem Fall kann die Schneedecke als streuendes Medium aufgefaßt werden, grob ausgedrückt, als Fortsetzung der Wolkendecke, und der Beobachter befindet sich an der Grenze zweier halbunendlicher streuender Medien. Man kann zeigen, daß die Helligkeitsverteilung in den verschiedenen Richtungen für einen solchen Beobachter isotrop erscheint, wenn in diesen beiden Medien $\lambda = 1$ ist.

Was die Streuindikatrix der Wolken anbetrifft, so ist sie stark nach vorn ausgezogen.

Wie wir schon oben erwähnten, bestehen die Wolken in unserer Atmosphäre aus einer Gesamtheit kugelförmiger Wassertröpfchen. Für solche Tröpfchen läßt sich die Streuindikatrix theoretisch berechnen. Sie hängt vom Tröpfchenradius ab. Je größer das Verhältnis $\frac{a}{\lambda}$ des Tröpfchenradius zur Wellenlänge des Lichts ist, um so langgestreckter ist die Indikatrix. Nach den vorliegenden Daten bestehen die Wolken aus Tröpfchen, von denen der größte Teil Radien besitzt, die einige Male größer als die Wellenlängen des sichtbaren Lichts sind, so daß die theoretischen Indikatrizes gerade für solche Teilchen angewandt werden können. Sie sind in dem Buch von K. Schifrin [80] recht eingehend gebracht. Die Laboratoriumsuntersuchungen zur Bestimmung der Streuindikatrix für Nebelteilchen bestätigen, daß diese sehr langgestreckt ist. Sie geben eine gute Übereinstimmung mit der Theorie.

In realen Wolken und Nebeln kommen Tröpfchen mit verschiedenen Durchmessern vor. Infolgedessen stellt die Streuindikatrix einer Wolke ein gewisses Mittel der Indikatrizes für Tröpfchen verschiedener Abmessungen dar. Diese mittlere Indikatrix wird davon abhängen, welche Tröpfchenabmessungen in der vorliegenden Gesamtheit von Wolken überwiegen.

Das, was für die Wassertröpfchen der Erdatmosphäre gilt, bleibt auch für Tröpfchen anderer Flüssigkeiten, die in den Atmosphären der anderen Planeten eine große Rolle spielen (Methan, Ammoniak) in Kraft.

Es sei jedoch erwähnt, daß die Streuindikatrix, wenn sie sehr langgestreckt wird, für die meisten Wolken immerhin Abweichungen um mindestens zwei bis drei Grad und mehr mit größerer Wahrscheinlichkeit aufweist als geringere Abweichungen, d.h., die Ausbreitung des Lichts ist fast geradlinig. Wäre dies nicht so, würden wir im allgemeinen den Sonnenrand durch eine dünne Wolkenschicht verwaschen sehen. Jedoch bleibt bei Beobachtung durch solche Wolkenschichten der Sonnenrand in den meisten Fällen scharf.

3. Absorptionsbanden

Die bisher behandelte Streuung des Lichts, ebenso wie auch die sie begleitende wahre Absorption, findet im ganzen sichtbaren und photographischen Spektralbereich statt und weist eine langsam abnehmende Abhängigkeit von der Wellenlänge auf. In den Spektren der großen Planeten beobachten wir jedoch auch Absorptionsbanden, die bestimmten Molekülen zuzuschreiben sind. Diese Übergänge hängen mit der monochromatischen Absorption in den Linien der Banden zusammen.

Gewöhnlich werden die Beobachtungsergebnisse an diesen Banden durch die Weglänge ausgedrückt, die das Licht in dem gegebenen Gas unter Atmosphärendruck zurücklegen muß, um eine Bande (oder Linie) derselben Äquivalentbreite hervorzurufen. Wenn wir den Durchgang der direkten Sonnenstrahlung durch die Atmosphärenschichten der äußeren Planeten beobachten würden, hätten diese Angaben einen direkten physikalischen Sinn. Wir beobachten jedoch nur das von der Planetenatmosphäre diffus reflektierte kontinuierliche Sonnenspektrum. Man muß daher versuchen, sich genau vorzustellen, welchen physikalischen Sinn diese aus den Beobachtungen der Planetenspektren erhaltenen „äquivalenten Weglängen", die in Kilometern bei Atmosphärendruck angegeben werden, besitzen.

Die Antwort auf dieses Problem hängt von der Wechselbeziehung zwischen den Faktoren ab, die die Streuung im kontinuierlichen Spektrum und die Absorptionsbanden hervorrufen.

Hier müssen wir zwei Möglichkeiten unterscheiden:

1. Die Streuung des Lichts kann durch Gase erfolgen, die in den Planetenatmosphären vorkommen. Dann ist sie von derselben Natur wie auch die Rayleigh-Streuung, die das Himmelsblau auf der Erde hervorruft. In diesem Falle ist das Medium, das die monochromatische Absorption erzeugt, mit dem Medium identisch, das die Streuung im kontinuierlichen Spektrum verursacht, da die monochromatische Absorption nur durch Gase erfolgen kann, die irgendwie mit anderen Gasen in der Atmosphäre vermischt sind. Setzen wir eine „vollständige Durchmischung" voraus, so können wir annehmen, daß das Vorhandensein von Absorptionslinien nur auf Minima in der Kurve der Abhängigkeit des Parameters λ von der Frequenz hindeutet. Die von uns gebrachte Tabelle der Abhängigkeit der Albedo von λ zeigt, daß selbst eine geringe Verminderung des λ-Werts zu einer starken Abnahme der Albedo führen kann.

In diesem Fall muß die Deutung der Beobachtungen vor allem die Änderungen von λ mit der Frequenz auf Grund spektralphotometrischer Daten in die Bestimmung einschließen. Wenn die λ-Werte für verschiedene Frequenzen erhalten sind (darunter für Frequenzen innerhalb und außerhalb der Linie), so können wir nach der Formel

$$\lambda_\nu = \frac{s_\nu}{s_\nu + k_\nu + k'_\nu},$$

worin s_ν der Streukoeffizient, k_ν der Koeffizient der wahren Absorption im konti-

nuierlichen Spektrum und k'_ν der Koeffizient der wahren Absorption in der Linie sind, unter Vernachlässigung des Verhältnisses $\frac{k_\nu}{s_\nu}$ das Verhältnis $\frac{k'_\nu}{s_\nu}$ finden. Der Wert k'_ν pro Molekül und cm^2 ist eine Größe, die experimentell bestimmt werden kann. Kennen wir das Verhältnis $\frac{k'_\nu}{s_\nu}$, so können wir auch s_ν pro Molekül und cm^2 finden. Aus den s_ν-Werten pro Molekül des absorbierenden Gases läßt sich zusammen mit den Überlegungen über den Streumechanismus der Bruchteil aller in der Gasmischung der Atmosphäre vorkommenden Moleküle bestimmen, die Strahlung einer gegebenen Linie absorbieren.

2. Die Streuung erfolgt durch flüssige oder feste Teilchen (Tröpfchen oder Kristalle), die eine nach beiden Seiten in der Höhe begrenzte Wolkenschicht bilden. Dann müssen die Sonnenstrahlen, ehe sie diffus von dieser Wolkenschicht reflektiert werden, durch die höher liegenden Atmosphärenschichten hindurchgehen und diese Schichten nach ihrer Reflexion erneut durchqueren, bevor sie zum Beobachter gelangen. In diesen höher liegenden Schichten können nun ebenfalls Absorptionsbanden zustande kommen. In diesem Fall charakterisieren die aus der Beobachtung erhaltenen äquivalenten Weglängen wirklich die Masse des betrachteten Gases, die über der erwähnten Wolkenschicht liegt.

KAPITEL IX

Die interstellare Materie

§ 35. Die staubförmige Komponente der interstellaren Materie

Die Erforschung der interstellaren Materie, die das Licht entfernter Sterne absorbiert, ist eng mit dem Namen des bekannten russischen Astronomen W. J. STRUWE verbunden, der schon in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts den Versuch unternahm, die Größe dieser Absorption zu bestimmen. Im 20. Jahrhundert widmeten sich eine ganze Reihe russischer Astronomen dem Problem der interstellaren Lichtabsorption, und eine besonders intensive Bearbeitung begann in der sowjetischen Periode der Geschichte der Astrophysik in unserem Lande. Dadurch fielen viele wichtige Ideen, die in den letzten Jahren in diesem Wissenschaftszweig entstanden, den sowjetischen Astronomen zu.

Auf die Existenz eines interstellaren Mediums deuten sowohl in unserem Sternsystem als auch in extragalaktischen Systemen eine große Zahl von Tatsachen hin. Wir wollen nachstehend auf einige von ihnen näher eingehen.

1. Einige grundlegende Tatsachen

Von dem Vorhandensein einer das Sternlicht absorbierenden Materie im interstellaren Raum unserer Galaxis zeugen folgende einfache Tatsachen: Die Zahl der extragalaktischen Nebel pro Quadratgrad, die heller als die Größe m sind, erlangt ihren größten Wert in Richtung der galaktischen Pole. Mit Annäherung an den galaktischen Äquator wird diese Zahl N_m kleiner, und in Richtungen, die im Gürtel der Milchstraße liegen, sind extragalaktische Nebel in der Regel gar nicht zu beobachten. Nur in einigen Gebieten der Milchstraße, den sogenannten „galaktischen Fenstern", werden eine geringe Anzahl extragalaktischer Nebel beobachtet. Somit ist der Gürtel der Milchstraße eine von den extragalaktischen Nebeln „gemiedene Zone".

Da die extragalaktischen Nebel von unserem Sternsystem unabhängig sind, ist die Abnahme ihrer Zahl mit Annäherung an den galaktischen Äquator als ein scheinbares Phänomen zu betrachten, das durch eine Schicht absorbierender Materie um die Symmetrieebene der Galaxis hervorgerufen wird. Wir können annehmen, daß die Ausdehnung der Schicht absorbierender, „dunkler"

Materie in Richtung senkrecht zur Ebene der Galaxis sehr gering im Vergleich zur Ausdehnung längs dieser Ebene ist, d.h., daß sich die „Dunkel"-materie um die Symmetrieebene der Galaxis konzentriert, wie dies in bezug auf die Riesensterne oder die gewöhnlichen Zwerge stattfindet, und daß sie aus planparallelen Schichten besteht, d.h., die Dichte der absorbierenden Materie ist nur eine Funktion des Abstands z von der Symmetrieebene der Galaxis. Es ist dann nicht schwer, die beobachtete Änderung der Zahl der extragalaktischen Nebel N_m mit der galaktischen Breite zu erklären.

Bezeichnen wir mit τ die optische Dicke der absorbierenden galaktischen Schicht für die Strahlung derjenigen extragalaktischen Nebel, die sich in der Gegend der galaktischen Pole befinden, so wird unter den erwähnten Bedingungen das Licht der extragalaktischen Nebel in der galaktischen Breite b die optische Dicke τ cosec b durchqueren und demzufolge um den Faktor $e^{-\tau \operatorname{cosec} b}$ geschwächt werden. Wenn wir nun in verschiedenen galaktischen Breiten b die Zahl N_m der extragalaktischen Nebel bis zur scheinbaren Helligkeit m bestimmen, so werden unseren Auszählungen auf verschiedenen Breiten verschiedene Grenzhelligkeiten

$$m_0 = m + 2{,}5 \lg e^{-\tau \operatorname{cosec} b}$$

oder

$$m_0 = m - 2{,}5\, M \cdot \tau \operatorname{cosec} b = m_0 - 1{,}09\, \tau \operatorname{cosec} b \qquad (35.1)$$

entsprechen, wobei M der Modul der natürlichen Logarithmen ist.

Andererseits zeigen die Auszählungen der extragalaktischen Nebel bis zu verschiedenen scheinbaren Helligkeiten in ein und derselben Richtung, daß die Zahl N_m mit m nach dem Gesetz

$$N_m = N_1 \cdot 10^{0{,}6 m} \qquad (35.2)$$

wächst, wobei N_1 eine Konstante für den betreffenden Himmelsbereich ist. Diese Beziehung gilt bis mindestens 20^m.

Die Beziehung (35.2) sagt aus, daß die Zahl der extragalaktischen Nebel N_B bis zu einer bestimmten integralen Helligkeit B umgekehrt proportional $B^{\frac{3}{2}}$ ist (nach der Definition der Größenklasse ist die integrale Helligkeit selbst proportional $10^{-0{,}4 m}$). Dies kann man aber nur als einen Hinweis auf eine mehr oder weniger gleichmäßige Erfüllung des extragalaktischen Raums mit extragalaktischen Nebeln verstehen.

Wenn aber die Verteilung der extragalaktischen Nebel im Raum gleichmäßig oder fast gleichmäßig ist, so muß für die wegen Absorption korrigierten Größenklassen die Verteilung

$$N_m = N_0 \cdot 10^{0{,}6 m_0} \qquad (35.3)$$

gelten, wobei N_0 eine für den ganzen Himmel gemeinsame Konstante ist. Setzen wir in (35.3) den Wert m_0 aus (35.1) ein, so finden wir

$$N_m = N_0 \cdot 10^{-0{,}65 \tau \operatorname{cosec} b} \cdot 10^{0{,}6 m}. \qquad (35.4)$$

Aus einem Vergleich von (35.4) mit (35.2) ersehen wir, daß

$$N_1 = N_0 \cdot 10^{-0,65\,\tau \operatorname{cosec} b} \qquad (35.5)$$

ist. Man erhält also, wenn man den Wert lg N_1 in einer graphischen Darstellung über cosec b aufträgt, eine gerade Linie, deren Neigung gleich 0,65 τ sein muß. Somit gibt uns die Auszählung der extragalaktischen Nebel auf diesem Wege die Möglichkeit, die optische Dicke zu bestimmen, welche das Licht derjenigen Nebel, die an den galaktischen Polen beobachtet werden, durchquert hat. Es ist klar, daß der erhaltene Betrag (unter der Voraussetzung, daß sich die Erde nahe der Symmetrieebene der Galaxis befindet) gleich der halben optischen Gesamtdicke der ganzen absorbierenden Schicht ist. Die Multiplikation von τ mit 1,09 ergibt die halbe Dicke in Größenklassen ausgedrückt.

Die Bestimmungen, die von HUBBLE durchgeführt wurden, ergaben für diese halbe Dicke $t = 0^{\mathrm{m}},25$. Die von P. P. PARENAGO angestellte detaillierte Analyse der Zählungen extragalaktischer Nebel führte zu dem zuverlässigeren Wert von $t = 0^{\mathrm{m}},34$. Diese Abschätzung ergibt insbesondere, daß in der galaktischen Breite $b = 10°$ die Absorption zwei Größenklassen erreichen muß. Dies bedeutet, daß in dieser Breite auf ein Quadratgrad sechzehnmal weniger extragalaktische Nebel einer gegebenen Größenklasse kommen als am Pol.

Wird $|b|$ kleiner als 5°, d.h., wenn sich das Licht fast in der galaktischen Ebene ausbreitet, so wird die optische Dicke der Schicht so groß, daß wir praktisch bereits keine extragalaktischen Nebel in so niedrigen Breiten sehen.

Für die galaktische Ebene selbst gibt uns die Vorstellung von einer absorbierenden Schicht die Möglichkeit, interessante Schlüsse auf die Oberflächenhelligkeit der Milchstraße zu ziehen. Nimmt man planparallele Schichten an, und zwar nicht nur Schichten von Dunkelmaterie, sondern auch Schichten leuchtender Materie, d.h. der Sternverteilung, so können wir sagen, daß die Symmetrieebene der Galaxis ($z = 0$) durch einen gewissen konstanten makroskopischen Absorptionskoeffizienten α und einen makroskopischen Emissionskoeffizienten j charakterisiert ist. Es wird nämlich $4\pi j$ die von allen Sternen, die sich in dieser Ebene in der Volumen- und Zeiteinheit befinden, nach allen Richtungen ausgestrahlte Energie. Die Intensität der Strahlung, die zu uns in die galaktische Ebene gelangt, ist dann wie gewöhnlich

$$I = \int_0^\infty e^{-\tau} j\, dr, \qquad (35.6)$$

worin dr das Element des Lichtweges ist und τ die optische Dicke der absorbierenden Schicht, vom Beobachter bis zum Punkt r gezählt. Für das so definierte τ können wir

$$\tau = \alpha r \qquad (35.7)$$

schreiben. Hierin ist α der mittlere Volumkoeffizient der Absorption. Schreibt man (35.7) in der Form

$$j\, dr = \frac{j}{\alpha}\, d\tau, \qquad (35.8)$$

so erhalten wir an Stelle von (35.6)

$$I = \frac{j}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\tau}\,d\tau = \frac{j}{\alpha}. \tag{35.9}$$

Die Integration in (35.9) können wir von 0 bis ∞ erstrecken, da die optische Dicke der absorbierenden Schicht in den Richtungen $b = 0°$ so groß ist, daß der Ersatz der endlichen oberen Grenze durch eine unendliche keine wesentliche Bedeutung hat, von 0 bis ∞ erstrecken. Der Wert von j läßt sich durch Summation der Leuchtkräfte der Sterne in einem beliebigen Volumen und nachfolgender Division der erhaltenen Summe durch dieses Volumen und 4π finden. Als ein solches Volumen kann man die Kugel mit dem Radius 5 parsec um die Sonne wählen. Wenn auch irgendwelche schwachen Sterne in diesem Raume für uns unerkannt bleiben, so wird trotzdem kein großer Fehler in der Berechnung der Summe der Leuchtkräfte begangen; j kann auf diese Weise zuverlässig bestimmt werden. Die mittlere Helligkeit I der Sternkomponente der Milchstraße läßt sich andererseits aus der Beobachtung bestimmen. Daraus finden wir den Mittelwert von α, der, wie die Rechnungen zeigen, etwa 1 Größenklasse pro kparsec beträgt.

Erwähnt sei, daß wir durch Herleitung des „makroskopischen" Emissionskoeffizienten j für ein beliebiges Sternsystem im allgemeinen eine wichtige Beziehung für die Oberflächenhelligkeit der Galaxis aufstellen können, die auch in den Fällen gültig ist, wenn in der betreffenden Richtung die optische Dicke des Systems nicht groß ist und man sie keineswegs gleich Unendlich setzen kann:

$$I = \int_0^{\tau_0} e^{-\tau}\frac{j}{\alpha}\,d\tau = P(1 - e^{-\tau_0}). \tag{35.10}$$

Hierin ist τ_0 die optische Dicke des Systems in der vorgegebenen Richtung. P ist ein gewisser Mittelwert von $\frac{j}{\alpha}$ auf dem Wege des Lichts im System.

Es ist interessant, daß die zentralen Gebiete elliptischer Galaxien ebenso wie auch die zentralen Teile der Kerne spiralartiger Galaxien eine Oberflächenhelligkeit (Intensität) besitzen, die in vielen Fällen die mittlere Oberflächenhelligkeit der Milchstraße um das Hundertfache übertrifft. Dies bedeutet, daß in ihnen das Verhältnis $\frac{j}{\alpha}$ im Mittel hundertmal größer ist als in dem Teil unserer Galaxis, in dem sich die Sonne mit den ihr benachbarten Sternen befindet. Mit anderen Worten, in den elliptischen Nebeln und den Kernen von Spiralnebeln ist die Rolle der absorbierenden Materie verschwindend klein im Vergleich zu den peripheren Teilen unserer Galaxis (wo sich die Sonne befindet).

Wie wir weiter sehen werden, ist die Verteilung der absorbierenden Materie in dem Teil unserer Galaxis, in dem sich die Sonne befindet, und in den peripheren Gebieten extragalaktischer Spiralnebel ebenso wie auch in Galaxien

irregulärer Form nicht nur nicht gleichmäßig, sondern direkt diskontinuierlich. Anders gesagt, der Volumkoeffizient der Absorption α ändert sich sprunghaft. Dies bedeutet, daß die interstellare Materie eine fetzenartige wolkenhafte Struktur besitzt, und wenn man von einer absorbierenden Schicht in der Galaxis spricht, so hat man an eine Schicht absorbierender Wolken zu denken.

Auf Grund dieser Überlegungen ist leicht zu verstehen, warum sich in den Fällen, in denen wir einen Spiralnebel von der „Seite" betrachten, d.h. wir uns selbst nahe der Hauptsymmetrieebene dieses Systems befinden, durch seinen hellen Kern ein dunkler Streifen zieht. Auf den Kern, der eine große Oberflächenhelligkeit besitzt, projizieren sich die peripheren Gebiete (darunter auch die Spiralarme), bei denen der Mittelwert von $P = \frac{j}{\alpha}$ von derselben Größenordnung ist wie in der Sonnenumgebung. Daher muß die Oberflächenhelligkeit in diesem Teil der Projektion, wo das Leuchten hauptsächlich durch die peripheren Sterne bedingt ist (das Licht des Kerns ist stark geschwächt infolge der großen optischen Dicke der absorbierenden Schicht), von derselben Größenordnung sein wie die Oberflächenhelligkeit der Milchstraße, d.h. etwa um das Zehnfache geringer als die Oberflächenhelligkeit des Kerns. So verlangt die Tatsache der Beobachtung solch dunkler Streifen um den leuchtenden Kern eines von der „Seite" gesehenen Nebels keine besondere Annahme über das Vorhandensein etwa eines Rings absorbierender Materie um die betrachtete Galaxis, sondern fordert nur die Zulassung von Bedingungen in den äußeren Gebieten der untersuchten Galaxis, die analog denen sind, die in den peripheren Teilen unserer Galaxis existieren. Aus demselben Grunde ist auch die Größenordnung der Helligkeit der Milchstraße in Richtung auf den Kern unserer Galaxis (Sternbild Schütze) dieselbe wie in anderen Richtungen in der Milchstraße.

Die folgende sehr wichtige Tatsache, die die interstellare Materie in der Galaxis betrifft, ist die Rötung des Lichts einzelner Sterne. Diese Erscheinung wird dadurch hervorgerufen, daß der interstellare Absorptionskoeffizient in allen Fällen mit abnehmender Wellenlänge anwächst, was die Rötung eines Sterns, verglichen mit der Farbe, die normalerweise seinem Spektraltyp entspricht, bedingt. Da das Licht größere optische Dicken durchdringt, wenn es einen langen Weg nahe der Symmetrieebene der Galaxis zurücklegt, so ist natürlich die stärkste Rötung bei Sternen zu erwarten, die in niederen galaktischen Breiten in sehr großen Entfernungen beobachtet werden. Von diesen Sternen sind zur Farbbestimmung die Sterne der Spektralklassen O und B und die langperiodischen Cepheiden geeignet.

Farbenindizes von Sternen der Klassen O und B wurden von Stebbins, Huffer und Whitford untersucht, und die Farbenindizes einer großen Zahl langperiodischer Cepheiden bestimmten unabhängig voneinander G. S. Badaljan und M. A. Waschakidse. Der normale Farbenindex $(C_i)_0$, d.h. ein Farbenindex, der vom Einfluß einer Absorption frei ist, wurde für jede Untergruppe der Typen O bis B0 (und auch für die Cepheiden) aus den für nähere

Sterne desselben physikalischen Typs erhaltenen Daten bestimmt. Durch Subtraktion dieser normalen Farbenindizes von den beobachteten erhält man die Größe C_e, den sogenannten Farbexzeß:

$$C_e = C_i - (C_i)_0. \tag{35.11}$$

Das Entstehen von Farbexzessen ist das Resultat einer Ungleichheit zwischen den Absorptionen im photographischen und visuellen Spektralbereich. Bezeichnen wir die Absorption im photographischen Spektralbereich des Lichts eines gegebenen Sterns in Größenklassen mit A_{ph} und die Absorption im visuellen Gebiet, ebenfalls in Größenklassen, mit A_v, so ist

$$C_e = A_{\text{ph}} - A_v, \tag{35.12}$$

wenn nur die Farbenindizes selbst, aus denen der Farbexzeß bestimmt wurde, für diese Spektralbereiche ermittelt wurden.

Andererseits kann man aber auch die Absorption A_{ph} durch die von der Sternstrahlung der photographischen Wellenlängen durchquerte optische Dicke angeben,

$$A_{\text{ph}} = 1{,}09\,\tau_{\text{ph}}, \tag{35.13}$$

da sowohl A_{ph} als auch τ_{ph} die Absorption charakterisieren. Die Durchsichtigkeit der Schichtdicke drückt sich durch die beiden Größen wie folgt aus:

$$(2{,}512)^{-A_{\text{ph}}} = e^{-\tau_{\text{ph}}}. \tag{35.14}$$

Genauso ist

$$A_v = 1{,}09\,\tau_v, \tag{35.15}$$

wobei τ_v die optische Dicke für die Sternstrahlung im visuellen Spektralbereich ist. Man kann also an Stelle von (35.12) schreiben:

$$C_e = 1{,}09\,(\tau_{\text{ph}} - \tau_v). \tag{35.16}$$

Führt man die Volumkoeffizienten der Absorption α_{ph} und α_v für die beiden Spektralbereiche ein, so haben wir andererseits

$$\tau_{\text{ph}} - \tau_v = \int_0^r (\alpha_{\text{ph}} - \alpha_v)\,dr \tag{35.17}$$

und

$$\tau_{\text{ph}} = \int_0^r \alpha_{\text{ph}}\,dr, \tag{35.18}$$

woraus mit (35.15) und (35.16)

$$C_e = 1{,}09 \int_0^r (\alpha_{\text{ph}} - \alpha_v)\,dr \tag{35.19}$$

und

$$A_{\text{ph}} = 1{,}09 \int_0^r \alpha_{\text{ph}}\,dr \tag{35.20}$$

folgen.

Von großer Bedeutung ist, daß wir heute noch keine Methode zur direkten Bestimmung von A_{ph}, mit Ausnahme der statistischen, besitzen. Daher ist die direkte Bestimmung von A_{ph} für einzelne Sterne äußerst schwierig. Tatsächlich geht A_{ph} in die Gleichung ein, die den Zusammenhang zwischen scheinbarer und absoluter photographischer Helligkeit wiedergibt:

$$m = M + 5 \lg r - 5 + A_{ph}, \qquad (35.21)$$

und zur Ermittlung von A_{ph} muß man unabhängig voneinander die absolute Helligkeit und die Entfernung bestimmen können. Der Ausdruck (35.12) könnte z. B. in den Fällen benutzt werden, in denen die Parallaxe trigonometrisch und die absolute Helligkeit aus dem Spektrum bestimmt wären. Trigonometrische Parallaxen lassen sich jedoch leider nur bis zu Entfernungen von etwa 100 parsec einigermaßen genau bestimmen. Die Absorption jedoch in so geringen Entfernungen ist ganz unwesentlich. Daher wird man weitgehend von der anderen Möglichkeit Gebrauch machen: Berechnung von A_{ph} aus dem Farbexzeß, der, wie oben erwähnt, aus der Beobachtung zu erhalten ist.

Wenn das Verhältnis $\mu = \frac{\alpha_v}{\alpha_{ph}}$ der Absorptionskoeffizienten in den beiden Spektralbereichen im Raum konstant bleibt, so ist nach (35.19)

$$C_e = 1{,}09\,(1 - \mu) \int_0^r \alpha_{ph}\, dr, \qquad (35.22)$$

woraus wir durch Vergleich mit (35.20)

$$C_e = (1 - \mu)\, A_{ph} \qquad (35.23)$$

finden. Man könnte also in diesem Fall die Gesamtabsorption im photographischen Bereich für jeden Stern aus seinem Farbexzeß durch Multiplikation mit ein und derselben konstanten Größe

$$\gamma = \frac{1}{1 - \mu} \qquad (35.24)$$

erhalten. Diese Methode wird heute vor allen anderen zur Bestimmung der Gesamtabsorption des Lichts eines gegebenen Sterns im photographischen Spektralbereich angewandt. Die Frage danach, unter welchen physikalischen Bedingungen μ wirklich konstant ist und ob diese Bedingungen tatsächlich erfüllt sind, ist eng mit der Frage nach der Natur der das Licht absorbierenden Materie verbunden.

Wie wir weiter unten sehen werden, ruft die interstellare Materie in den Spektren einzelner Sterne, die nahe der galaktischen Ebene stehen, gewisse Absorptionslinien hervor, die Atomen und Ionen bestimmter Elemente zuzuschreiben sind. Danach unterliegt die Existenz einer gasförmigen Komponente der interstellaren Materie, welche diese Linien hervorruft, keinem Zweifel. Es erhebt sich jedoch die Frage, ob die gasförmige Materie sowohl die selektive als auch die allgemeine Absorption des ganzen kontinuierlichen

Spektrums hervorruft, und zwar so, wie wir es beobachten, d.h. stärker im kurzwelligen und weniger stark im langwelligen Bereich.

Um eine Antwort hierauf zu finden, hat man sich die Gründe für die Undurchsichtigkeit des interstellaren Gases im kontinuierlichen Spektrum zu vergegenwärtigen. Wie wir in den ersten Kapiteln bereits gesehen haben, gibt es drei Hauptursachen für die Undurchsichtigkeit eines Gases. Als erste sind die gebunden-frei-Übergänge der Elektronen zu nennen, als zweite die frei-frei-Übergänge und als dritte die Streuung des Lichts durch freie Elektronen. Die erste und die zweite dieser Ursachen, die eine komplizierte Abhängigkeit von der Wellenlänge bei gegebener Temperatur besitzen, bedingen den „Massen“-absorptionskoeffizienten, welcher der ersten Potenz des Elektronendrucks proportional ist. Die dritte der Ursachen bedingt bei fast vollständiger Ionisation, die im interstellaren Gas vorhanden sein muß, den praktisch konstanten „Massen“streukoeffizienten. Mit der Abnahme der Gesamtdichte und folglich auch des Elektronendruckes vermindert sich die Rolle der ersten beiden Ursachen für die Undurchsichtigkeit des Gases stark im Vergleich zur letzten. Selbst in der Sonnenkorona ist die Strahlung im kontinuierlichen Spektrum ganz durch die Streuung des Lichts an freien Elektronen bedingt, während die gebunden-frei- und frei-frei-Übergänge der Elektronen keine merkliche Absorption (auch der folgenden Remission) des Sonnenlichts durch die Korona im visuellen und photographischen Spektralbereich hervorrufen.

Dies gilt um so mehr für das interstellare Gas, das eine Dichte besitzt, die um viele millionenmal geringer als die der Sonnenkorona ist. Dies bedeutet, daß die Undurchsichtigkeit des interstellaren Gases im kontinuierlichen Spektrum vollständig durch die Streuung des Lichts an freien Elektronen hervorgerufen werden muß. Diese Streuung hängt aber nicht von der Wellenlänge ab, sie kann also nicht die interstellare Absorption erklären, die, wie wir gesehen haben, selektiven Charakter besitzt. So können wir behaupten, daß das interstellare Gas nicht die beobachtete allgemeine Absorption des Lichts im kontinuierlichen Spektrum der Sterne erklären kann. Man kann jedoch die Frage stellen, ob nicht die Streuung des Lichts durch freie Elektronen trotzdem einen Teil der beobachteten Lichtschwächung erklären kann, während der andere Teil durch irgendeinen anderen stark selektiven Faktor verursacht wird. Um auf diese Frage antworten zu können, versuchen wir zunächst, die Masse des Gases abzuschätzen, die notwendig wäre, um eine Schwächung des Sternlichts hervorzurufen, wie sie im photographischen Spektralbereich beobachtet wird. Wir setzen dabei voraus, daß die Schwächung in der erwähnten Streuung des Lichts an freien Elektronen besteht. Wir können sagen, daß die Masse des interstellaren Gases in der ganzen Galaxis gleich sein muß dem Querschnitt der Galaxis in ihrer Symmetrieebene πR^2 (wo R der Radius der Galaxis ist), multipliziert mit der mittleren Masse in einer Säule vom Querschnitt 1 cm² senkrecht zur galaktischen Ebene, d.h. also

$$M_G = \pi R^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varrho \, dz,$$

wobei die Integration über die z-Koordinate (senkrecht zur Ebene der Galaxis)

auszuführen ist. Führt man den Streukoeffizienten s pro Masseneinheit ein, so erhält man

$$M_G = \pi R^2 \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} s \varrho \, dz = \frac{2\pi R^2 \tau_z}{s}, \tag{35.25}$$

worin τ_z die halbe optische Dicke der Galaxis ist. Hier wird s als konstant angenommen. Als Hauptbestandteil des interstellaren Gases können wir den Wasserstoff ansehen, dessen Atome in der Mahrzahl ionisiert sind. Daher ist

$$s = n_{\mathrm{H}} s_0$$

mit s_0 als Streukoeffizienten für den Fall, daß sich in der Volumeinheit nur ein freies Elektron befindet, und n_{H} als Anzahl der Wasserstoffatome (im vorliegenden Falle Ionen) pro Gramm. Diese beiden Größen sind nicht nur konstant, sondern auch universelle Konstanten. Und zwar ist

$$n_{\mathrm{H}} = \frac{1}{m_{\mathrm{H}}}, \quad s_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 = 0{,}7 \cdot 10^{-24} \, \mathrm{cm}^2.$$

Daher kann man die Größe s als konstant ansehen. Was die Elektronen anbetrifft, die von Atomen anderer Elemente herrühren, so tragen sie nur wenig zur Größe s bei, die auf diese Weise errechnet wurde. Folglich können wir an Stelle von (35.25) schreiben:

$$M_G = m_{\mathrm{H}} \cdot 2\tau_z \frac{\pi R^2}{s_0}. \tag{35.26}$$

Nimmt man $R = 10000$ parsec $= 3 \cdot 10^{22}$ cm und $2\,\tau_z = 0{,}7$ an, so erhalten wir für die Masse des absorbierenden Gases in der Galaxis größenordnungsmäßig 10^{45} g, eine Masse, welche einige Male größer als die der ganzen Galaxis ist. Daher können wir sagen, selbst wenn man nicht die Tatsache der Selektivität der beobachteten Lichtschwächung berücksichtigt, daß die freien Elektronen keinen wesentlichen Anteil an der optischen Dicke der absorbierenden Schicht im photographischen Spektralbereich haben können.

Wir müssen uns also ganz von der Vorstellung frei machen, daß die gasförmige Komponente der interstellaren Materie irgendeine wesentliche Rolle bei allgemein beobachteten Erscheinungen der Schwächung der Sternstrahlung im ganzen Spektrum spielen kann.

Da nun die selbständige Existenz flüssiger Teilchen im interstellaren Raum ausgeschlossen ist, da die Temperatur fester oder flüssiger Materieteilchen, die sich weitab von Sternen im interstellaren Raume befinden, äußerst niedrig ist (weniger als 10° K), bleibt uns nur der Schluß, daß die interstellare Absorption durch feste Teilchen hervorgerufen wird. Dabei kann keine Rede davon sein, in der Lichtabsorption großen, festen Teilchen, sagen wir solchen, deren linearer Durchmesser 1 mm überschreitet,

eine wesentliche Rolle zuzuschreiben. Ebenso wie bei der Vorstellung über die Rolle der freien Elektronen bei der Absorption würde die Annahme so großer Teilchen zu einer viel zu großen Gesamtmasse der absorbierenden Materie in der Galaxis führen unannehmbar für ihre Dynamik. Außerdem wäre in diesem Falle die Absorption nicht selektiv, sondern neutral. Wenn die Abmessungen der Teilchen die Wellenlänge vielfach übertreffen würden, so bestände ihre Wirkung in einer Abschirmung des Sternenlichts. Es gilt in diesem Falle die geometrische Optik. Teilchen dieser Art, die sich auf die Sternscheiben projizieren, würden einzelne, wenn auch nur sehr kleine Teile der Scheibe verdunkeln. Bei einer hinreichend großen Zahl von Teilchen jedoch würde das Sternlicht, und zwar in allen Wellenlängen, die klein im Vergleich zu den Abmessungen der Teilchen sind, in ein und demselben Verhältnis merklich geschwächt. Dies geschieht im Verhältnis des durch die Teilchen abgedunkelten Teils der Sternscheibe zur gesamten Scheibe. Tatsächlich beobachten wir aber eine selektive Absorption. Diese kann nur durch Teilchen hervorgerufen werden, deren lineare Durchmesser klein im Vergleich zur Wellenlänge des sichtbaren Lichts sind oder höchstens von derselben Größenordnung.

Die physikalische Theorie der Lichtstreuung durch so kleine Teilchen wurde von MIE entwickelt. Sie zeigt, daß nicht nur die Abmessungen der Teilchen eine Rolle spielen, sondern auch ihre physikalische Beschaffenheit (z. B. ihre elektrische Leitfähigkeit).

Hätten wir die Möglichkeit, irgendwelche definierten Annahmen über die Statistik der Abmessungen und die anderen Eigenschaften der Teilchen der interstellaren Materie oder, wie man im allgemeinen sagt, den kosmischen Staub, zu machen, so könnten wir auf Grund der MIEschen Theorie die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Wellenlänge berechnen. Da aber derartige Annahmen ganz willkürlich wären, muß man die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Wellenlänge empirisch bestimmen und nur darauf Vorstellungen über den Zustand des kosmischen Staubs aufbauen und bestrebt sein, die beobachtete Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Wellenlänge zu erklären.

Die Bestimmung der Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Wellenlänge ist im Prinzip eine einfache Aufgabe. Man wählt sich zwei Sterne, welche dieselben physikalischen Eigenschaften besitzen, soweit man darüber nach ihren Spektrallinien urteilen kann. Bei ihnen müssen nicht nur die spektralen Unterklassen übereinstimmen, sondern auch die Werte der Leuchtkräfte, weswegen selbst die Form der Spektrallinien (Breite) gleich sein muß. Bei einer solchen sorgfältigen Auslese einander physikalisch ähnlicher Sterne kann man erwarten, daß nicht nur ihre Farbtemperaturen gleich werden, sondern im allgemeinen auch die Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum. Ist nun einer dieser Sterne weit entfernt und erfährt sein Licht eine merkliche Absorption, während das Licht des anderen Sterns praktisch frei von Absorption ist, so kann man den ganzen Unterschied in der scheinbaren relativen Energieverteilung im Spektrum als durch die selektive Absorption der interstellaren Materie hervorgerufen annehmen.

Ist $I_0(\lambda)$ die relative Energieverteilung im Spektrum des nahen Sterns (die frei von Absorption ist) und $I_1(\lambda)$ die beobachtete Verteilung im Spektrum des entfernteren Sterns, so hätten wir, wenn keine Absorption vorhanden wäre,

$$I_1(\lambda) = C I_0(\lambda), \tag{35.27}$$

worin C eine Konstante ist, die vom Verhältnis der Entfernungen der gewählten Sterne abhängt. Da aber im zweiten Falle das Licht eine Absorption erfährt, müssen wir an Stelle von (35.27)

$$I_1(\lambda) = C e^{-\tau_\lambda} I_0(\lambda) \tag{35.28}$$

schreiben, worin τ_λ die optische Weglänge des Lichts der Wellenlänge λ ist. Aus (35.28) haben wir

$$\tau_\lambda = -\ln \frac{I_1(\lambda)}{I_0(\lambda)} + \ln C. \tag{35.29}$$

Für τ_λ gilt aber auch

$$\tau_\lambda = \int_0^r \alpha_\lambda \, dr = \frac{\alpha_\lambda}{\alpha_{\lambda_1}} \int_0^r \alpha_{\lambda_1} \, dr = \frac{\alpha_\lambda}{\alpha_{\lambda_1}} \tau_{\lambda_1}. \tag{35.30}$$

Hierin ist λ_1 eine beliebig gewählte Wellenlänge, und es wird angenommen, daß das Verhältnis $\frac{\alpha_\lambda}{\alpha_{\lambda_1}}$ konstant ist, d.h. nicht von der Entfernung abhängt.

Setzt man (35.30) in (35.29) ein, so findet man

$$\frac{\alpha_\lambda}{\alpha_{\lambda_1}} = -\frac{1}{\tau_{\lambda_1}} \ln \frac{I_1(\lambda)}{I_0(\lambda)} + \frac{1}{\tau_{\lambda_1}} \ln C.$$

Da die Konstante C gewöhnlich unbestimmt ist, können wir sagen, daß das Verhältnis $\frac{\alpha(\lambda)}{\alpha(\lambda_1)}$ aus den Beobachtungen mit einer Genauigkeit bis auf die additive Konstante gegeben ist.

Die Beobachtungsdaten haben gezeigt, daß in der Mehrzahl der Fälle $\frac{\alpha(\lambda)}{\alpha(\lambda_1)}$ und folglich $\alpha(\lambda)$ selbst eine lineare Funktion von λ^{-1} darstellt, d.h.

$$\alpha(\lambda) = c_1 \lambda^{-1} + c_2, \tag{35.31}$$

worin c_2, wie gesagt, der neutrale Summand der verzerrten Absorption, eine Konstante ist. Die Mieesche Theorie führt zu dem Schluß, daß dieser Typ der Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Wellenlänge im photographischen Spektralbereich metallische Teilchen (die Rechnungen wurden für Eisen und Nickel ausgeführt) mit Durchmessern von der Größenordnung 10^{-5} cm, d.h. Abmessungen kleiner als die Wellenlänge des Lichts, voraussetzen muß. Es versteht sich von selbst, daß sich der interstellare Staub aus Teilchen der verschiedensten Durchmesser zusammensetzt, doch zeigt das

erhaltene Resultat, daß die Durchmesser von der Größenordnung 10^{-5} cm die wirksamsten bei der interstellaren Absorption sind. Eine Statistik dieser Durchmesser muß jedoch das Ziel weiterer Untersuchungen sein.

Wir wollen noch erwähnen, daß einige Autoren, ausgehend von der Annahme, daß $\alpha(\lambda)$ die allgemeine Form

$$\alpha(\lambda) = c_1 \lambda^{-k} + c_2 \tag{35.32}$$

besitzt, versucht haben, den Wert von k zu bestimmen, der den spektralphotometrischen Daten am besten gerecht wird. Die auf diese Weise gefundenen k-Werte weichen jedoch nicht sehr von 1 ab. O. A. MELNIKOW zeigte, daß man eher ein k annehmen muß, das sich mit der Wellenlänge ändert, da ein und dieselben Teilchen für Wellenlängen der verschiedenen Spektralbereiche einen anderen Exponenten k geben. Wenn die Wellenlänge um einige Male kleiner als der Durchmesser ist, absorbiert jedes Teilchen neutral (d.h. $k = 0$). Weitere Untersuchungen über die Änderungen von k mit der Wellenlänge sind notwendig. Nur die Feststellung des Ganges von k mit der Wellenlänge ermöglicht erste Schlüsse über die Statistik der Durchmesser der kosmischen Staubteilchen.

Heute wendet man für praktische Zwecke gewöhnlich die Formel (35.31) an. Der Wert der Konstanten c_2 $\left(\text{genauer des Verhältnisses } \frac{c_2}{c_1}\right)$ läßt sich jedoch allein aus den spektralphotometrischen Beobachtungen nicht bestimmen. Um ihn zu erhalten, braucht man gleichzeitig Angaben über die photographische Gesamtabsorption A_{ph} und die selektive Absorption CE für irgendeine Richtung. Man kann für diese Untersuchungen die extragalaktischen Nebel benutzen. Wir haben gesehen, daß die Zählung dieser Nebel die halbe optische Dicke der galaktischen Absorptionsschicht in Richtung senkrecht zur galaktischen Ebene liefert. Die direkten Beobachtungen der Farben extragalaktischer (oder galaktischer, aber außerhalb der absorbierenden Schicht liegender) Objekte geben uns jedoch die halbe „selektive" optische Dicke der Absorptionsschicht, d.h. die Differenz $\tau_{\lambda_1} - \tau_{\lambda_2}$. Eine derartige Bestimmung der halben selektiven optischen Dicke wurde z.B. von dem sowjetischen Astronomen N. F. FLORJA aus den Farbenindizes der Kugelsternhaufen durchgeführt, wie sie von STEBBINS und WHITFORD erhalten wurden. Es ist klar, daß man aus dem Verhältnis der halben selektiven optischen Dicke zur halben optischen Dicke in einer der Wellenlängen

$$\frac{\tau_{\lambda_1} - \tau_{\lambda_2}}{\tau_{\lambda_1}} = \frac{c_1\left(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}\right)}{c_1 \lambda_1^{-1} + c_2} = \frac{\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}}{\lambda_1^{-1} + \frac{c_2}{c_1}}$$

das Verhältnis $\frac{c_2}{c_1}$ erhalten kann. Es hat sich gezeigt, daß die Beobachtungen die Vernachlässigung von c_2 rechtfertigen, so daß man diese in den Grenzen der Genauigkeit durch die Formel

$$\alpha(\lambda) = c_1 \lambda^{-1} \tag{35.33}$$

wiedergeben kann.

Umgekehrt gibt uns die Formel (35.33) die Möglichkeit, für jedes System von Farbenindizes, das sich auf zwei vorgegebene effektive Wellenlängen stützt, den Faktor

$$\gamma = \frac{c_1 \lambda_{\mathrm{ph}}^{-1}}{c_1 \lambda_1^{-1} - c_1 \lambda_2^{-1}} = \frac{\lambda_{\mathrm{ph}}^{-1}}{\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}}$$

zu finden, mit dessen Hilfe die beobachteten Farbexzesse direkt in Werte der Gesamtabsorption im photographischen Spektralbereich bis zum gegebenen Objekt überführt werden können.

Hierdurch ließen sich die vorhandenen umfangreichen Daten über photoelektrische und photographische Farbenindizes zur Deutung des Charakters der Verteilung der absorbierenden Materie in der Galaxis ausnutzen.

P. P. Parenago zeigte an Hand dieser Daten, daß die früheren Schätzungen des mittleren Absorptionskoeffizienten in der galaktischen Ebene zu niedrig sind, denn ihre Autoren, die Sterne von kleiner, aber doch von Null verschiedener galaktischer Breite benutzten, berücksichtigten nicht die Abnahme des Absorptionskoeffizienten mit der Entfernung von der Ebene der Galaxis. Mit einer „äquivalenten“ linearen halben Dicke der galaktischen absorbierenden Schicht von $\beta = 100$ parsec und unter der Annahme eines Exponentialgesetzes der Dichteänderung der Schicht mit der Höhe als Interpolationsformel erhalten wir, mit a_0 als (photographischem) Absorptionskoeffizienten in der Äquatorebene und r und b als Abstand und galaktischer Breite des Objekts, für die photographische Gesamtabsorption des Lichts dieses Objekts

$$A(r, b) = \frac{a_0 \beta}{\sin b}\left(1 - e^{-\frac{r \sin b}{\beta}}\right), \tag{35.34}$$

und nur im Spezialfall für Objekte mit einer galaktischen Breite von genau $b = 0°$ ist

$$A = a_0 r. \tag{35.35}$$

Daher fanden die Autoren, die die Gleichung (35.35) direkt auf Objekte mit der galaktischen Breite b anwandten, nicht den Koeffizienten a_0, sondern die Größe

$$a_0 \beta \frac{1 - e^{-\frac{r \sin b}{\beta}}}{r \sin b},$$

die nur für den Fall, daß $r \sin b \ll \beta$ ist, nahe bei a_0 liegt.

Die richtige Problemstellung führte für die verschiedenen Richtungen zu folgenden Mittelwerten für a_0:

$$a_0 = 3^{\mathrm{m}},4 \text{ pro kparsec (Parenago)}$$

$$a_0 = 2^{\mathrm{m}},4 \text{ pro kparsec (Florja)}.$$

Bei Florja ist $\beta = 130$ parsec.

Somit ergibt sich eine beträchtliche Abweichung von dem a_0-Wert, den man nach Gleichung (35.9) erhält. Da diese jedoch voraussetzte, daß η überall gleich dem Wert in der Nähe der Sonne ist, erklärt sich die Abweichung wenigstens teilweise daraus, daß η in größeren Entfernungen von der Sonne (1000 parsec und mehr) in einigen Raumbereichen groß ist im Vergleich zu dem Wert in der Sonnenumgebung (die Sonne befindet sich in einem sternarmen Gebiet der Galaxis zwischen den Spiralarmen).

Abschließend soll noch besonders hervorgehoben werden, daß alle Forscher, die sich mit der interstellaren Absorption beschäftigten, zu dem Schluß gelangten, daß die absorbierende Materie äußerst ungleichmäßig verteilt ist und der Absorptionskoeffizient, den man für die verschiedenen Richtungen erhält, verschiedene Werte hat.

2. Diffuse Nebel

Wir haben eben schon erwähnt, daß sich der Wert des Absorptionskoeffizienten selbst in der galaktischen Ebene stark beim Übergang von einer Richtung zur anderen ändert und in einigen Richtungen einen Wert von 4 Größenklassen pro Kiloparsec erreicht. Die daraus resultierende Annahme einer äußerst irregulären räumlichen Verteilung der absorbierenden Materie wird durch die Tatsache des Vorhandenseins von Dunkelnebeln bekräftigt.

Es ist bekannt, daß sich auf dem leuchtenden Band der Milchstraße einzelne dunkle Flecke abzeichnen. So kennen wir z. B. den Dunkelnebel um ϱ Ophiuchi, den „Kohlensack" am Südhimmel und eine ganze Reihe anderer Objekte. Ähnliche Gebiete, die zuweilen sehr kleine Durchmesser haben (weniger als ein Bogengrad), finden sich z. B. auch in den Sternbildern Cassiopeia und Cygnus. Sternzählungen auf Photoplatten haben eine ausgesprochene Sternarmut, besonders an schwachen Objekten, in diesen Gebieten ergeben. Da kaum anzunehmen ist, daß diese Sternarmut auf eine anomal niedrige Sterndichte innerhalb des Kegels zurückzuführen ist, der durch die Geraden gebildet wird, die vom Beobachter zu den Grenzen dieses Gebiets gehen (dies würde die Existenz leerer und bisweilen sehr enger, von Sternen fast freier Korridore im Sternsystem bedeuten), kommt man zu dem einzig möglichen Schluß, daß in der betreffenden Richtung in nicht allzu großer Entfernung vom Beobachter absorbierende Materie vorhanden ist, welche das Licht entfernter Sterne stark schwächt. Man kann die Absorption, d. h. die optische Dicke, solcher *Dunkelnebel* und ihren Abstand von uns abschätzen. In einigen Fällen erreicht die optische Dicke zwei bis drei Größenklassen. Was die Entfernung einer Dunkelwolke betrifft, so kann diese nicht größer als 400 parsec sein, wenn sich die Dunkelwolke hinreichend scharf auf dem Grund der Milchstraße abzeichnet. Bei größeren Entfernungen ist die Zahl der näheren Sterne, deren Licht nicht von dem Nebel beeinflußt wird, zu groß, als daß man noch von einer Sternarmut des betreffenden Gebietes sprechen könnte.

Die Entfernung und die Winkeldurchmesser geben uns die Möglichkeit, den Durchmesser des Querschnitts des Dunkelnebels abzuschätzen, der von der Größenordnung 10 parsec ist. Es gibt natürlich mehr Dunkelnebel mit kleineren

Ausmaßen des Querschnitts, sie sind aber weniger bemerkbar. Weiter ist klar, daß die lineare Ausdehnung in die Tiefe von derselben Größenordnung sein wird wie der Querschnitt. Es liegt also kein Grund zu der Annahme vor, daß alle Dunkelnebel in Richtung des Visionsradius ausgedehnter sind.

Den Dunkelnebeln schließen sich die „Globulen“ an, dunkle Gebiete mit Durchmessern von einer Bogenminute und weniger, die man größtenteils auf dem Hintergrund leuchtender diffuser Nebel entdeckte.

Wenn wir die Globulen, deren Natur noch weitgehend ungeklärt ist, außer acht lassen, liegt die Vermutung nahe, daß die Dunkelnebel ebenso wie die absorbierende Materie in der Galaxis aus festen Teilchen kosmischen Staubs bestehen. Da die Beobachtungen eine gewisse Selektivität in ihren Absorptionseigenschaften ergeben haben, müssen wir annehmen, daß die Durchmesser dieser Teilchen in der Mehrzahl der Fälle nicht die Wellenlänge des Lichts übertreffen. Bei mehr oder weniger gerechtfertigt erscheinenden Annahmen über das spezifische Gewicht des Stoffes dieser Teilchen müssen wir für die größten der Dunkelnebel zu einer Masse von der Größenordnung $50\,M_\odot$ kommen. Dunkelnebel geringerer Ausdehnung besitzen eine Masse, die nicht $10\,M_\odot$ überschreitet.

Die Form der Gebiete, die durch Dunkelnebel abgeschirmt werden, ist gewöhnlich ganz irregulär. Darüber hinaus sind die Grenzen dieser Gebiete ziemlich verschwommen. Dies alles spricht dafür, daß die Dunkelnebel selbst gewöhnlich eine unregelmäßige, diffuse Gestalt besitzen. Diese Tatsache bringt sie mit den *leuchtenden diffusen Nebeln* mit kontinuierlichem Spektrum in Verbindung, deren Studium ergeben hat, daß sie ebensolche Wolken kosmischen Staubs darstellen wie auch die Dunkelnebel, nur mit dem Unterschied, daß sie von Sternen hoher Leuchtkraft erhellt werden.

Es ist bekannt, daß die von uns beobachteten leuchtenden diffusen Nebel in zwei Gruppen eingeteilt werden: die einen besitzen ein Spektrum aus Emissionslinien verschiedener leichter Elemente (*Emissionsnebel*), während die anderen (*Reflexionsnebel*) ein kontinuierliches Spektrum mit Absorptionslinien, identisch mit dem Spektrum von Sternen eines der bekannten Spektraltypen, aufweisen. Es erhebt sich nun natürlich die Frage nach den Ursachen des Leuchtens dieser beiden Typen diffuser Nebel.

In den Emissionsspektren der diffusen Nebel begegnen wir denselben Linien wie auch in den Spektren planetarischer Nebel. Der Hauptunterschied besteht darin, daß in den Spektren der planetarischen Nebel die Linien N_1 und N_2 (O III) dominieren und bei weitem intensiver sind als die ihnen benachbarte Linie $H\beta$. In den Spektren der diffusen Emissionsnebel hingegen sind sie nicht heller als $H\beta$. Das Helligkeitsverhältnis der O III- zu den O II-Linien ist ebenfalls bei weitem kleiner als in den planetarischen Nebeln. Dies und auch das Fehlen der Linien des ionisierten Heliums in den Spektren der diffusen Nebel weist darauf hin, daß der Unterschied zwischen beiden Nebeltypen nur im Grad der Anregung und Ionisation der Atome besteht. Er ist in den diffusen Nebeln geringer. Andererseits läßt die Ähnlichkeit der Spektren darauf schließen, daß der Anregungsmechanismus in beiden Fällen der gleiche ist, d. h., auch bei den diffusen Nebeln erfolgt die Anregung durch die Ultraviolettstrahlung

eines heißen Sterns. HUBBLE zeigte, daß man tatsächlich nahezu bei jedem diffusen Nebel mit Emissionsspektrum einen Riesenstern vom Spektraltyp O oder B 0 oder eine Gruppe solcher Sterne finden kann, die für die Anregung des Leuchtens nach dem Mechanismus, dessen Theorie ausführlich in dem Kapitel über planetarische Nebel dargelegt wurde, verantwortlich gemacht werden können. Der Versuch einer Bestimmung der Temperatur dieser Riesen nach der Methode von ZANSTRA unter der Annahme, daß eben sie die Quelle des Leuchtens der diffusen Nebel darstellen, führte zu Schätzungen, die gut mit den derzeitigen Vorstellungen über die Temperaturen der Sterne der Klassen O und B 0 (25000°–30000°) übereinstimmen, die nach anderen Methoden bestimmt wurden. So wird also jeder Emissionsnebel von einem heißen Stern oder einer Gruppe heißer Sterne zum Leuchten angeregt. Von dieser Regel gibt es nur vereinzelte Ausnahmen.

Die diffusen Nebel mit kontinuierlichem Spektrum dagegen sind immer von einem Überriesen eines Spektraltyps später als B 0 begleitet, dessen Spektrum auch das des Nebels ist (wenn dieses bekannt ist). Man kann in diesem Falle annehmen, daß der Nebel, der aus festen Teilchen besteht, das Licht dieses Überriesen reflektiert oder, besser gesagt, streut.

HUBBLE zeigte, daß für jeden diffusen Nebel eine empirische Beziehung zwischen der scheinbaren Helligkeit m des den Nebel beleuchtenden Sterns (d. h. Überriesen) und der größten Entfernung a vom Stern zu den Punkten des Nebels, die eine gewisse, im voraus festgelegte Standard-Oberflächenhelligkeit besitzen, folgender Form besteht:

$$m + 5 \lg a = \text{const.} \tag{35.36}$$

Trägt man m über $\lg a$ graphisch auf, so konzentrieren sich die Punkte, die den einzelnen Nebeln entsprechen, mit geringer Streuung auf der Geraden (35.36). Andererseits kann man zeigen: die Beziehung (35.36) folgt direkt aus der Hypothese, daß die diffusen Nebel von den Sternen beleuchtet werden. Wir wollen die Beleuchtung, die der Stern auf der Erde auf einer Fläche senkrecht zum Lichtstrahl hervorruft, mit b bezeichnen. Die Beleuchtung des Staubnebels in einer bestimmten Ebene senkrecht zur Sternstrahlung wird gleich

$$b \frac{r^2}{\Delta^2},$$

wobei r und Δ die Entfernungen des Sterns von der Erde und von dem betrachteten Punkt des Nebels sind. Bei einem konstanten Reflexionsvermögen des Nebels (wenn der Nebel z. B. praktisch das gesamte Sternenlicht reflektiert) wird die beobachtete Flächenhelligkeit proportional der Beleuchtung sein, d. h. $b \frac{r^2}{\Delta^2}$. Gleichzeitig hängt sie bekanntlich nicht von der Entfernung zwischen Nebel und Beobachter ab (bei Vernachlässigung der Absorption).

Wählen wir nun demzufolge in verschiedenen Nebeln Punkte mit einer gewissen Standard-Oberflächenhelligkeit aus, so genügt in diesen Punkten der

Abstand Δ der Gleichung

$$\Delta^2 = Cbr^2, \tag{35.37}$$

worin C eine Konstante ist. Für den Winkelabstand a zwischen dem Stern und dem betrachteten Punkt des Nebels haben wir andererseits

$$a = \frac{\Delta}{r} \cos \Theta. \tag{35.38}$$

Hier ist Θ der Winkel, den der Radiusvektor vom Stern bis zum betrachteten Punkt mit der Tangentialebene an der Himmelskugel bildet. Aus (35.37) und (35.38) erhalten wir dann

$$a^2 = Cb \cos^2 \Theta$$

oder nach Logarithmieren

$$2 \lg a - \lg b = \lg C + 2 \lg \cos \Theta .$$

Nach Multiplikation mit 2,5 und unter Berücksichtigung, daß

$$-2{,}5 \lg b = m + C'$$

ist, finden wir

$$5 \lg a + m - 5 \lg \cos \Theta = \text{const} \tag{35.39}$$

mit m als scheinbarer Helligkeit des Sterns.

Der Winkel Θ ist uns gewöhnlich unbekannt, so daß die Beziehung (35.39) nicht exakt nachzuprüfen ist. Ersetzt man jedoch lg cos Θ durch seinen Mittelwert, so erhalten wir Gleichung (35.36), die mit den Beobachtungen in guter Übereinstimmung steht. Eine gewisse Streuung der Punkte in der graphischen Darstellung (m, lg a) um die Gerade (35.36) beruht darauf, daß erstens lg cos Θ bei verschiedenen Nebeln vom Mittelwert abweicht und zweitens die Albedo der Nebel verschieden ist.

Die genäherte Erfüllung der Gleichung (35.36) bestätigt nicht nur die Hypothese über das Leuchten der diffusen Nebel mit kontinuierlichem Spektrum, wonach dieses eine Streuung des Lichts der beleuchtenden Sterne ist, sondern auch die Tatsache, daß die beleuchtenden Überriesen in der Mehrzahl der Fälle von den Astronomen richtig identifiziert wurden. Dies ist allerdings auch darum verständlich, weil die Zahl der Überriesen in unserer Galaxis im allgemeinen nicht groß ist und die Gemeinsamkeit des Spektraltyps von Stern und Nebel einen Fehler bei der Identifizierung des beleuchtenden Sterns wenig wahrscheinlich macht.

Der Beweis dafür, daß wir es im gegebenen Falle mit einer Streuung des Sternlichts durch den Staubnebel zu tun haben, wird dadurch belegt, daß der physikalische Zustand der Materie in den Dunkelnebeln und den leuchtenden diffusen Nebeln mit kontinuierlichem Spektrum gleich ist.

Es ist interessant, daß die Beziehung (35.36) nicht nur für die diffusen Nebel mit kontinuierlichem Spektrum erfüllt ist, sondern auch für die Emissionsnebel. Diese Tatsache mag etwas unerwartet erscheinen, denn wir haben es hier

nicht mit einer einfachen Reflexion zu tun, sondern, wie wir schon darlegten, mit einem Prozeß, der demjenigen in den planetarischen Nebeln analog ist. Die Gültigkeit der Gleichung (35.36) für Emissionsnebel zeugt dafür, daß von der Oberflächeneinheit des Nebels in der Gesamtheit der einzelnen Emissionslinien eine Energiemenge ausgestrahlt wird, die der Energie proportional ist, welche im gewöhnlichen photographischen Spektralbereich auf diese Oberflächeneinheit trifft. Zugleich wissen wir, daß die Energiemenge, welche in den Spektrallinien von der Oberflächeneinheit des Nebels ausgestrahlt wird, von der Menge der Sternstrahlung jenseits der Grenze der LYMAN-Serie abhängig ist, die auf 1 cm^2 der Nebeloberfläche auftrifft.

Daher zeigt die Gültigkeit der Beziehung (35.36), daß das Verhältnis der auf 1 cm^2 des Nebels im photographischen Spektralbereich auftreffenden Energie zu derjenigen Energie, die im fernen Ultraviolett auf dieselbe Fläche auftrifft, annähernd konstant von Nebel zu Nebel ist. Das bedeutet aber Konstanz der Oberflächentemperatur der beleuchtenden Sterne. Wir wissen auch, daß die beleuchtenden Sterne von Emissionsnebeln tatsächlich einem sehr engen Bereich der Spektralfolge angehören, und zwar den Klassen O und B 0 mit Absorptionslinien. In der Regel begegnet man bei den diffusen Nebeln keinen beleuchtenden Sternen vom Typ WOLF-RAYET. Die Temperaturen der beleuchtenden Sterne von Emissionsnebeln liegen somit im Bereich von 20000° bis 30000°. Daß allerdings die Konstante auf der rechten Seite der Gleichung (35.36) fast ein und dieselbe für Reflexions- und Emissionsnebel ist, ist nur ein Zufall. Für eine andere Temperatur der das Leuchten von Emissionsnebeln hervorrufenden Sterne würden sich diese Konstanten voneinander unterscheiden.

Die Entfernung der Nebel von ihren beleuchtenden Sternen beträgt oft einige parsec. Daher taucht die Frage auf, ob zwischen den diffusen Nebeln und ihren beleuchtenden Sternen ein genetischer Zusammenhang besteht oder ob ihr Zusammenhang rein zufällig ist. Mit anderen Worten, haben sie (Stern und Nebel) einen gemeinsamen Ursprung und eine gemeinsame Bewegung oder befinden sie sich nach zufälliger Annäherung zeitweilig unweit voneinander, um darauf wiederum auseinander zu gehen? Schon HUBBLE, der die Radialgeschwindigkeiten einiger Nebel und ihrer beleuchtenden Sterne verglich, hob Unstimmigkeiten zwischen ihnen hervor, woraus er folgerte, daß die Verbindung zwischen Stern und Nebel nur temporären Charakter besitzt.

HUBBLEs Schluß jedoch, der sich auf die Radialgeschwindigkeiten von insgesamt nur fünf Sternen gründete, bedurfte einer ernsten Nachprüfung. Diese führten S. G. GORDELADSE und V. A. AMBARZUMJAN auf folgende Weise durch.

Treffen die Nebel nur zufällig mit ihren beleuchtenden Sternen zusammen, so muß die Zahl der Nebel, die in jedem Augenblick von Sternen dieses oder jenes Spektraltyps erhellt werden, proportional der Wahrscheinlichkeit sein, daß sich die Nebel im Innern eines von den Sternen des gegebenen Spektraltyps beleuchteten Volumens befinden. Dies hängt offenbar damit zusammen, daß jeder Stern mit bestimmter Leuchtkraft eine Beleuchtung hervorrufen kann, die nur bei Vorhandensein eines beleuchtbaren Objekts im Innern eines

bestimmten Kugelvolumens um den Stern einen gewissen Grenzwert übersteigen kann. Ist dazu das Reflexionsvermögen vorgegeben, so können wir um jeden Stern ein Kugelvolumen angeben, dessen Oberflächenhelligkeit größer als ein gewisser Grenzwert ist, wenn der Nebel in dieses Volumen hineinfällt. Wir können hierzu als minimale Oberflächenhelligkeit diejenige annehmen, die ein astronomisches Instrument bestimmter Lichtstärke (z. B. 1 : 5) bei bestimmter Exposition (etwa einer Stunde) und bestimmter Plattenempfindlichkeit gerade erfaßt. Der Radius dieser Kugel ist der Quadratwurzel aus der Leuchtkraft des Sterns proportional, d. h.

$$\lg \Delta = C - 0{,}2\,M,$$

wobei M die absolute Helligkeit des Sterns ist.

Das Volumen dieser Kugel ist der dritten Potenz des Radius proportional, also

$$\lg V = C_1 - 0{,}6\,M. \tag{35.40}$$

So zeigt z. B. die Rechnung, daß unter den angeführten Beobachtungsbedingungen Sterne der absoluten Helligkeit $M = 0$ um sich ein Gebiet von rund 1 parsec^3 „beleuchten", Sterne der absoluten Helligkeit $M = -5$ etwa 1000 parsec^3. Außerhalb dieser Volumina wird ein Nebel einem Instrument der genannten Lichtstärke bei einstündiger Belichtung nicht mehr zugänglich sein, da seine Oberflächenhelligkeit zu gering ist.

Ferner ist klar, daß die Volumina, die von einer Gesamtheit von Sternen dieses oder jenes Spektraltyps ausgeleuchtet werden, gleich $n\,\overline{V}$ sein werden, wobei $\overline{V}$ das mittlere Volumen ist, das von einem Stern dieses Typs erhellt wird, und n die Zahl dieser Sterne in der Volumeneinheit. Das mittlere Volumen $\overline{V}$ erhält man hierbei durch Mittelung über alle Werte der absoluten Helligkeiten des Volumens $V(M)$, das aus Gleichung (35.40) folgendermaßen berechnet wird:

$$\overline{V} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(M)\, V(M)\, d\,M}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(M)\, d\,M}. \tag{35.41}$$

Hierin ist $\varphi(M)$ die Leuchtkraftfunktion für den jeweiligen Spektraltyp, die angibt, welcher Bruchteil der Sterne dieses Typs eine absolute Helligkeit zwischen $M - \frac{1}{2}$ und $M + \frac{1}{2}$ besitzt. So läßt sich also die Wahrscheinlichkeit, daß ein Nebel von einem Stern bestimmten Spektraltyps beleuchtet wird, nur aus stellarstatistischen Daten berechnen. Wenn nun der Zusammenhang zwischen Nebel und beleuchtendem Stern tatsächlich zufällig ist, so muß die Zahl der beobachteten Nebel, die von Sternen des einen oder anderen Typs erhellt werden, proportional $n\,\overline{V}$ sein. In Tabelle 35 ist nach HUBBLE für jeden Spek-

traltyp die Zahl N der beobachteten Nebel, die von Sternen dieses Typs beleuchtet werden, sowie der Bruchteil des von Sternen dieses Typs erhellten galaktischen Raumes $n\overline{V}$ angegeben, der sich aus Gleichung (35.41) und den stellarstatistischen Daten über die Leuchtkraftfunktionen und die Häufigkeit der Begegnungen der Sterne der verschiedenen Typen berechnen läßt.

Tabelle 35

Spektralklasse	N	$n\overline{V}$
O	11	$0{,}2 \cdot 10^{-4}$
B 9	7	0,6
B 1 — B 9	54	2,9
A	5	0,8
F	2	0,25
G	1	0,18
K	2	0,25
M	0	0,02

Wir sehen, daß die Hypothese von dem zufälligen Charakter der Verbindung zwischen Stern und Nebel das Überwiegen derjenigen Reflexionsnebel, die mit Sternen des Typs B 1–B 9 zusammenhängen, sehr gut erklärt und allgemein in gutem Einklang mit den Beobachtungen steht.

An Stelle der Verwendung der Leuchtkraftfunktionen für die einzelnen Spektraltypen nach (35.41), für welche die verfügbaren Daten vorläufig noch nicht sicher genug sind, kann man $n\overline{V}$ auch auf folgende Weise erhalten:

In unseren Berechnungen wird die Änderung der Zahlen n mit der Entfernung von der Sonne längs der galaktischen Ebene nicht berücksichtigt. Daher können wir die Konstante n in der Gleichung

$$p = n \int_{-\infty}^{\infty} V_0 \cdot 10^{-0{,}6M} \varphi(M)\, dM ,$$

die auf der Grundlage der Gleichungen (35.40) und (35.41) den Bruchteil der Volumeneinheit angibt, der von Sternen eines gegebenen Typs erleuchtet wird, unter das Integral setzen. Dabei ist V_0 das Volumen, das von einem Stern der absoluten Helligkeit $M = 0$ erhellt wird. Somit ergibt sich

$$p = V_0 \int_{-\infty}^{\infty} n\varphi(M) \cdot 10^{-0{,}6M} dM . \qquad (35.42)$$

Andererseits haben wir nach der grundlegenden Integralgleichung der Stellarstatistik für die Zahl der Sterne der scheinbaren Helligkeit m in einer beliebigen

Richtung der galaktischen Ebene

$$A(m) = \omega \int_0^\infty n \varphi(M) r^2 dr. \qquad (35.43)$$

Lösen wir

$$5 \lg r - 5 = m - M$$

nach r auf, so können wir (35.43) in folgende Form bringen:

$$A(m) = \frac{\omega}{5M} \int_{-\infty}^{\infty} n \cdot 10^{0,6(m-M)+3} \varphi(M) \, dM. \qquad (35.44)$$

In den Gleichungen (35.43) und (35.44) wird die interstellare Absorption nicht berücksichtigt. Nehmen wir jedoch nur Sterne bis zur 5. Größenklasse, d.h. nur die allernächsten, so ist dies durchaus gestattet. Dann finden wir durch Vergleich von (35.44) und (35.42)

$$A(m) = \frac{\omega}{5M} 10^{0,6m+3} p.$$

Danach lassen sich die Werte von p aus den $A(m)$-Werten für verschiedene Spektraltypen bei beliebigem m ausrechnen. Wir haben also die Möglichkeit, die Werte unmittelbar aus der Beobachtung zu erhalten. Die so erhaltenen Werte für $p = n \overline{V}$ sind in der letzten Spalte der Tabelle 35 aufgeführt.

Wie wir sehen, entsprechen auch in diesem Falle die relativen Werte von p den Relativzahlen der diffusen Nebel. Die Statistik der Spektren der beleuchtenden Sterne steht also mit der Hypothese der zufälligen Verbindung zwischen Stern und Nebel in gutem Einklang. Wir wollen nicht unerwähnt lassen, daß auch bei den Typen O und B 0, wo wir es mit Gasnebeln zu tun haben, trotz einiger Abweichungen Übereinstimmung mit den Beobachtungen besteht. Doch ist, wie wir weiter sehen werden, das Problem der Gasnebel komplizierter, als es auf den ersten Blick erscheint. Daher wollen wir zunächst nur einige Folgerungen für die Staubnebel ziehen.

Die wichtigste Folgerung, die aus der Bestätigung der Hypothese des zufälligen Zusammenhangs resultiert, ist die, daß außer den von Sternen erhellten Staubnebeln im Sternsystem noch eine große Zahl nicht beleuchteter Nebel vorhanden sein muß.

Die Zahl p bedeutet den Bruchteil eines beliebigen Volumens des galaktischen Raums, der von Sternen dieses oder jenes Spektraltyps erhellt wird. Die Summe aller p ist aber nicht gleich 1, sondern insgesamt nur von der Größenordnung $\frac{1}{2000}$. Mit anderen Worten, die Sterne aller Spektralklassen beleuchten nur ein Zweitausendstel des interstellaren Raumes. Dann folgt aber aus unserem Schluß über die Zufälligkeit des Zusammenhanges zwischen den Staubnebeln und den sie beleuchtenden Sternen, daß die Gesamtzahl aller Nebel etwa zweitausendmal größer sein muß, als die Zahl der beleuchteten. Infolge-

dessen sind die von Sternen beleuchteten Nebel nur seltene Vertreter der Klasse der Staubnebel allgemein.

Ebenso wie bei den beleuchteten diffusen Nebeln gibt es auch bei den nicht beleuchteten Nebeln Objekte verschiedenen Durchmessers und verschiedener optischer Dicke.

Diejenigen von ihnen, die sich nicht weit von uns befinden und eine besonders große optische Dicke besitzen, werden das Licht der hinter ihnen befindlichen Sterne schwächen und sternarme Gebiete am Himmel vortäuschen. Wir beobachten sie als „Dunkel"nebel. Wir sehen also, daß sowohl „leuchtende" als auch „dunkle" Nebel Sonderfälle der außerordentlich vielgestaltigen Klasse der diffusen Nebel darstellen.

Wenn wir berücksichtigen, daß mit Instrumenten der Lichtstärke 1 : 5 und Expositionen von 1 Stunde auf heutigen Platten mehr als 100 leuchtende diffuse Nebel am Himmel aufgenommen werden, von denen sich die überwiegende Mehrzahl in einer Entfernung von weniger als 1500 parsec von uns befindet und dabei innerhalb einer galaktischen Schicht der Dicke 200 parsec, so werden wir annehmen können, daß sich in diesem Raum tatsächlich mehr als 200000 nicht beleuchteter Nebel befinden $\left(\text{da } \sum p = \frac{1}{2000}\right)$. Nimmt man an, daß der Radius eines jeden von ihnen von der Größenordnung 3 parsec ist, so können wir ausrechnen, wie groß die Zahl der Nebel ist, die der Lichtstrahl in der galaktischen Ebene auf einer Strecke von 1000 parsec durchquert. Wir erhalten eine Zahl von etwa 4 Nebeln pro kparsec Lichtweg. Aus der beträchtlichen Albedo der Nebel, die man im Falle ihrer Beleuchtung beobachtet, läßt sich nun auf ein bestimmtes Absorptions- bzw. Streuvermögen der Nebel (oder *Wolken*, wie wir sie weiterhin auch nennen werden) schließen, woraus wir annehmen müssen, daß jede dieser Wolken zu einer erheblichen Schwächung des Lichts der hinter ihr stehenden Sterne führt, d.h., sie besitzt eine beträchtliche optische Dicke. Selbst wenn man annimmt, daß diese Dicke, in Größenklassen ausgedrückt, im Mittel etwa $0^m,3$ ist, so muß die Gesamtheit der nicht beleuchteten Nebel eine Absorption hervorrufen, die 1^m pro kparsec übertrifft. Wir kommen also zu dem Schluß, daß die allgemeine und selektive Absorption, von der wir im vorangegangenen Abschnitt sprachen, wenn auch nicht ganz, so doch wenigstens zu einem Teil das Ergebnis der Wirkung einer Gesamtheit von absorbierenden Wolken ist, deren Existenz wir feststellten. Weiter unten werden wir aus der Annahme, daß die absorbierende Schicht aus einer Gesamtheit diskreter Wolken besteht, Folgerungen ziehen. Der Fall, daß ein Teil der Absorption durch ein kontinuierliches Medium bedingt ist, ist in obiger Annahme mit enthalten, denn ein kontinuierliches Medium weist dieselbe Wirkung auf wie eine unendliche (oder sehr große) Zahl von Wolken, von denen jede eine unendlich kleine (oder sehr kleine) optische Dicke besitzt.

Die diskrete Struktur der absorbierenden Schicht verursacht bestimmte Abweichungen von der Gleichförmigkeit in der scheinbaren Verteilung der Sterne und der extragalaktischen Nebel. Wir beginnen mit der Ungleichförmigkeit in der Verteilung der extragalaktischen Nebel.

3. Schwankungen in den Zahlen der extragalaktischen Nebel

Wir haben oben gesehen, daß unter der Annahme eines in der Galaxis in planparallelen kontinuierlichen Schichten verteilten absorbierenden Mediums, parallel zur Ebene des galaktischen Äquators, die Zahl der extragalaktischen Nebel bis zu einer gewissen scheinbaren Helligkeit m pro Quadratgrad eine Funktion der galaktischen Breite wird. Unter diesen Bedingungen ändert sich N_m für eine bestimmte galaktische Breite nicht. Besteht die absorbierende Schicht jedoch aus einzelnen Wolken, so wird die Zahl der Wolken, die das aus zwei benachbarten Richtungen zu uns gelangende Licht durchqueren muß, selbst auch bei ein und derselben galaktischen Breite, im allgemeinen verschieden sein. Daher wird auch die Absorption in diesen beiden Richtungen und folglich auch N_m verschieden sein.

Wir gehen wie vordem von der Annahme aus, daß N_m in allen Richtungen gleich wäre, wenn keine Absorption im Milchstraßensystem existierte, und zwar

$$N_m = N_0 \cdot 10^{0,6 m_0}, \tag{35.45}$$

wobei m_0 die scheinbare Helligkeit ist, die man bei Abwesenheit von Absorption beobachten würde.

Wir betrachten Lichtstrahlen, die von extragalaktischen Nebeln der galaktischen Breite b aus einer gewissen Richtung zu uns gelangen. Sie müssen in der Galaxis irgendeine Gesamtheit absorbierender Wolken durchqueren, wodurch ihre Intensität im Verhältnis Q geschwächt wird. Dieses ist

$$Q = e^{-\tau}, \tag{35.46}$$

wobei τ die gesamte optische Tiefe aller Wolken ist, die das Licht durchquert. Die Nebel, die bei Fehlen einer Absorption in der Galaxis die scheinbare Helligkeit m_0 besitzen, haben dann für den Beobachter die scheinbare Helligkeit

$$m = m_0 - 2{,}5 \lg Q. \tag{35.47}$$

Ersetzt man in (35.45) m_0 durch m nach (35.47), so findet man

$$N_m = N_0 \cdot 10^{0,6 m} Q^{\frac{3}{2}}. \tag{35.48}$$

Der Wert Q ist eine Zufallsveränderliche. Wir können das statistische Verteilungsgesetz der verschiedenen N_m für eine gegebene galaktische Breite ableiten, das auf den in den verschiedenen Richtungen beobachteten N_m-Werten beruht. Es ist daher zweckmäßig, sich eine Vorstellung davon zu verschaffen, welche Eigenschaften diese Verteilung in Abhängigkeit von den statistischen Parametern besitzt, welche die Gesamtheit der absorbierenden Wolken charakterisieren.

Wir setzen jetzt in (35.48) den Wert für Q aus (35.46) ein und erhalten damit

$$N_m = N_0 \cdot 10^{0,6 m} e^{-\frac{3}{2}\tau}. \tag{35.49}$$

Danach hängt das Verteilungsgesetz für N_m von dem Verteilungsgesetz für τ ab, d.h. der gesamten optischen Dicke, die das Licht durchquert. τ setzt sich aber additiv aus den optischen Dicken der einzelnen Wolken, durch die das Licht geht, zusammen:

$$\tau = \sum \sigma_i . \tag{35.50}$$

Hierin ist sowohl die Zahl der Glieder der Summe als auch die optische Dicke jeder einzelnen Wolke, d.h. der Wert jedes σ_i, zufällig. Dies rührt daher, daß die Wolken alle verschieden sein können und das Licht sie außerdem auf Wegen, denen verschiedene Werte der optischen Dicke entsprechen, durchsetzen kann.

Es sei $F(\sigma)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die vom Lichtstrahl in der Wolke zurückgelegte Weglänge einer optischen Dicke entspricht, die kleiner als σ ist. Wir nehmen an, daß $F(\sigma)$ eine Funktion ist, die nicht davon abhängt, in welchem Abstand von der galaktischen Ebene der Durchgang geschieht.

Wir suchen nun das Verteilungsgesetz für τ (optische Dicke der gesamten Wolkenschicht in einer gegebenen Breite vom Beobachter bis zur äußeren Grenze der Schicht). Um diese Aufgabe lösen zu können, wählen wir zunächst nur einen Teil der betrachteten Wolkenschicht bis zur Höhe z über der galaktischen Ebene und werden z dann vergrößern. Wir bezeichnen die optische Dicke dieser Schicht in einer Richtung mit der Breite b durch t und stellen uns zur Aufgabe, die Verteilungsfunktion für t zu finden, d.h. die Wahrscheinlichkeit $\varphi(t)$ dafür, daß die optische Dicke, die vom Licht in dieser Schicht durchquert wird, kleiner als t ist.

Wir nehmen nun für unsere Wolkenschicht einen gewissen linearen Zuwachs der Dicke dz an. Dann vergrößert sich der Weg, der von dem Licht in dieser Schicht zurückgelegt wird, um den elementaren Abschnitt $dz \operatorname{cosec} b$. Hierbei sind zwei Fälle möglich: auf diesem Abschnitt kann das Licht entweder auf eine Wolke treffen oder auch nicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es auf eine Wolke trifft, wird der Länge der Strecke $dz \operatorname{cosec} b$ proportional sein, und zwar gleich $k\, dz \operatorname{cosec} b$, wobei k die mittlere Zahl der Wolken ist, die in der gegebenen Höhe z auf die Einheit des Lichtweges kommt. Die Wahrscheinlichkeit, auf keine Wolke zu treffen, wird dann $1 - k\, dz \operatorname{cosec} b$. Die Verteilungsfunktionen $\varphi(t)$ für die Fälle vor und nach dem Zuwachs der Schicht werden wir voneinander durch den Index z bzw. $z + dz$ unterscheiden. Dann erhalten wir nach dem Satz über die Addition und Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten

$$\varphi_{z+dz}(t) = (1 - k\, dz \operatorname{cosec} b)\, \varphi_z(t) + k\, dz \operatorname{cosec} b \int \varphi_z(t-\sigma)\, dF(\sigma) . \tag{35.51}$$

Nehmen wir $\varphi_z(t)$ auf die linke Seite und dividieren durch $k\, dz \operatorname{cosec} b$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\sin b \frac{d\varphi}{k\, dz} = -\varphi_z(t) + \int_\sigma^t \varphi_z(t-\sigma)\, dF(\sigma) . \tag{35.52}$$

Wir führen nun anstatt z die unabhängige Veränderliche

$$v = \int_0^z k\,dz \tag{35.53}$$

ein. Dann geht (35.52) in folgende Form über:

$$\sin b \frac{d\varphi_v}{dv} = -\varphi_v(t) + \int_0^t \varphi_v(t-\sigma)\,dF(\sigma). \tag{35.54}$$

Aus dieser Gleichung sind die mathematischen Erwartungswerte für die verschiedenen Grade von t leicht zu erhalten. Für die Schwankungen der Zahlen der extragalaktischen Nebel brauchen wir jedoch nicht diese, sondern die mathematischen Erwartungswerte für die verschiedenen Grade von $e^{-\frac{3}{2}\tau}$. Zur Berechnung dieser mathematischen Erwartungen multiplizieren wir die Gleichung (35.54) mit e^{-lt} und integrieren von 0 bis ∞:

$$\sin b \frac{d}{dv}\int_0^\infty e^{-lt}\varphi_v(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{-lt}\varphi_v(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-lt}\,dt \int_0^t \varphi_v(t-\sigma)\,dF(\sigma).$$

Daraus ergibt sich durch einige Umformungen im zweiten Glied auf der rechten Seite

$$\sin b \frac{d}{dv}\int_0^\infty e^{-lt}\varphi_v(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{-lt}\varphi_v(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-l\sigma}\,dF(\sigma)\int_0^\infty \varphi_v(x)\,e^{-lx}\,dx. \tag{35.55}$$

Es ist nun aber

$$\int_0^\infty e^{-lt}\varphi_v(t)\,dt = -\frac{1}{l}\,e^{-lt}\varphi_v(t)\Big|_0^\infty + \frac{1}{l}\int_0^\infty e^{-lt}\,d\varphi_v(t) = \frac{1}{l}\,\overline{e^{-lt}},$$

da $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(\infty) = 1$ ist.

Man erhält daher aus (35.55) durch Multiplikation mit l

$$\sin b \frac{d}{dv}\overline{e^{-lt}} = -\overline{e^{-lt}} + \overline{e^{-l\sigma}}\,\overline{e^{-lt}}. \tag{35.56}$$

Hierin kennzeichnen wir, ebenso wie im folgenden, durch Überstreichung die mathematischen Erwartungswerte derjenigen Größen, die überstrichen sind. Die Größe

$$q = e^{-\sigma} \tag{35.57}$$

ist die Transparenz einer Wolke. Daher ist

$$\overline{e^{-l\sigma}} = \overline{q^l}$$

der Mittelwert l-ten Grades für die Durchsichtigkeit einer Wolke bei zufälliger Orientierung gegenüber dem sie durchsetzenden Lichtstrahl.

Wir bezeichnen weiter

$$\overline{e^{-l t}} = g_v(l)\,. \tag{35.58}$$

Dann kann die Gleichung (35.36) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\sin b \frac{d g_v(l)}{d v} = -g_v + \overline{q^l} g_v\,. \tag{35.59}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$g_v(l) = C e^{-\frac{v}{\sin b}(1-\overline{q^l})}\,. \tag{35.60}$$

Da aber für $v = 0$ (d.h. wenn $z = 0$) $g_v(l) = 1$ ist, haben wir $C = 1$. Daher ist

$$g_v(l) = e^{-\frac{v}{\sin b}(1-\overline{q^l})}\,. \tag{35.61}$$

Wir können die erhaltene Formel speziell auf den Grenzwert von v anwenden, wenn z anwächst und wir die gesamte Wolkenschicht betrachten. Diesen Wert von v nennen wir v_0. Damit haben wir als mathematischen Erwartungswert für die Größe $e^{-l\tau}$

$$g_{v_0}(l) = e^{-\frac{v_0}{\sin b}(1-\overline{q^l})}\,. \tag{35.62}$$

Das erhaltene Resultat können wir jetzt für die Berechnung der Erwartungswerte der verschiedenen Potenzen von N_m benutzen. Nach (35.49) haben wir

$$\overline{N_m^k} = N_0^k \cdot 10^{0,6km}\, \overline{e^{-\frac{3}{2}k\tau}} = N_0^k \cdot 10^{0,6km} g_{v_0}\left(\frac{3}{2}k\right). \tag{35.63}$$

Es ist daher nach (35.62)

$$\overline{N_m^k} = N_0^k \cdot 10^{0,6km} e^{-\frac{v_0}{\sin b}\left(1-\overline{q^{\frac{3}{2}k}}\right)}\,, \tag{35.64}$$

woraus wir speziell den Mittelwert von N_m

$$\overline{N}_m = N_0 \cdot 10^{0,6m} e^{-\frac{v_0}{\sin b}\left(1-\overline{q^{\frac{3}{2}}}\right)} \tag{35.65}$$

und ebenso das mittlere Abweichungsquadrat

$$\overline{\left(N_m - \overline{N}_m\right)^2} = N_0^2 \cdot 10^{1,2m}\left(e^{-\frac{v_0}{\sin b}(1-\overline{q^3})} - e^{-\frac{2v_0}{\sin b}\left(1-\overline{q^{\frac{3}{2}}}\right)}\right) \tag{35.66}$$

finden.

Bei Rechnungen dieser Art ist der Relativwert des mittleren Abweichungsquadrats, d. h.

$$\frac{\overline{\left(N_m - \overline{N_m}\right)^2}}{\overline{N_m^2}} = e^{\frac{v_0}{\sin b}\overline{\left(1-q^{\frac{3}{2}}\right)^2}} - 1 \tag{35.67}$$

von größtem Interesse.

Die Formel (35.65) zeigt, daß die Abhängigkeit zwischen den beobachteten Werten von lg $\overline{N_m}$ und cosec b linear sein muß.

Hat man aus den Beobachtungsdaten diese Funktion gefunden, so kann man auch die Neigung der Geraden, durch die sie dargestellt wird, also den Zahlenwert der Größe

$$f_1 = v_0\overline{\left(1 - q^{\frac{3}{2}}\right)} \tag{35.68}$$

bestimmen. Kennt man aus den Beobachtungen das mittlere Abweichungsquadrat vom Mittel für verschiedene galaktische Breiten, so findet man nach (35.67) auch den Zahlenwert der Größe

$$f_2 = v_0\overline{\left(1 - q^{\frac{3}{2}}\right)^2}. \tag{35.69}$$

In den beiden Gleichungen (35.68) und (35.69) kommen jedoch drei Größen vor, welche die Gesamtheit der absorbierenden Wolken charakterisieren und die zu bestimmen sind. Es sind dies v_0, $\overline{\left(1 - q^{\frac{3}{2}}\right)}$ und $\overline{\left(1 - q^{\frac{3}{2}}\right)^2}$. Es ist klar, daß wir sie nicht gemeinsam bestimmen können. Nehmen wir jedoch an, daß beispielsweise die Größe q nur eine kleine Streuung aufweist, d. h., daß alle Werte der Durchsichtigkeit q ein und derselben Größe q_0 gleich sind, so finden wir, daß die dritte dieser Größen gleich dem Quadrat der zweiten ist, und damit sind alle diese Größen bestimmt. Wir suchen q_0, und $v \cdot q_0$ läßt sich aus der Beziehung

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\overline{\left(1 - q^{\frac{3}{2}}\right)^2}}{\overline{\left(1 - q^{\frac{3}{2}}\right)}} = 1 - q_0^{\frac{3}{2}} \tag{35.70}$$

bestimmen.

In Wirklichkeit ist der Mittelwert des Quadrats immer größer als das Quadrat des Mittelwerts. Daher haben wir

$$1 - q_0^{\frac{3}{2}} = \frac{\overline{\left(1 - q^{\frac{3}{2}}\right)^2}}{\overline{\left(1 - q^{\frac{3}{2}}\right)}} > \overline{1 - q^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\overline{q^{\frac{3}{2}}} > q_0^{\frac{3}{2}}.$$

Somit ist also die oben bestimmte Größe $q_0^{\frac{3}{2}}$, die direkt aus den Beobachtungsdaten zu errechnen ist, kleiner als der Mittelwert von $\overline{q^{\frac{3}{2}}}$.

Obwohl wir wissen, daß der nach (35.70) berechnete Wert von q_0 nicht genau gleich $\bar{q}$ oder $\left(\overline{q^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}$ ist, gibt er uns doch eine Vorstellung darüber, um welchen Wert sich die tatsächlichen Größen q gruppieren. Benutzt man, um $\bar{N}$ und $\overline{N^2}$ zu erhalten, die Rechnungen von HUBBLE und SHAPLEY, so bekommt man für q einen Wert von etwa 0,8, d.h., jede Wolke läßt 80% des auf sie fallenden Lichts durch. Die Schwächung des Sternenlichts durch eine einzelne Wolke ist also im Mittel gewöhnlich nicht groß, und daher beobachten wir, anstatt die Wirkung jeder einzelnen Wolke aufzunehmen, die mit der Entfernung zunehmende Absorption einer Gesamtheit von Wolken. Nur bei beträchtlicher Abweichung des q-Wertes von q_0 nach kleinen Werten hin, wenn q etwa 0,2 oder 0,3 beträgt, können wir die absorbierende Wolke in Gestalt einzelner Dunkelnebel beobachten.

Ist ein Teil der absorbierenden Materie in Form eines kontinuierlichen Mediums verteilt oder besteht er aus einer großen Zahl von Wolken mit sehr kleiner optischer Dicke, so wird mit großer Wahrscheinlichkeit q_1 und demzufolge auch $\overline{q^{\frac{3}{2}}}$ nahe Eins sein. Man muß dann zur Erklärung des beobachteten Wertes $\frac{f_2}{f_1}$ annehmen, daß die mittlere Absorption in den übrigen Wolken wesentlich größer ist als in dem Falle, wo zur Deutung des Wertes $\frac{f_2}{f_1}$ die Existenz eines solchen kontinuierlichen Mediums nicht angenommen wird.

§ 36. *Die gasförmige Komponente der interstellaren Materie*

1. Das interstellare Gas

Neben der allgemeinen Schwächung des Sternlichts durch die Absorptionswirkung des interstellaren Staubes in allen Frequenzen des sichtbaren und photographischen Spektralbereichs, d.h. neben der „kontinuierlichen" Absorption im interstellaren Raum, beobachten wir häufig in den Spektren entfernter Sterne Absorptionslinien, die durch interstellare Materie hervorgerufen werden, welche sich im gasförmigen Zustand befindet. In den der Untersuchung zugänglichen Teilen des Spektrums treten besonders die interstellaren Linien des Ca II (die Linien H und K), das gelbe Dublett 5890 Å und 5896 Å sowie das ultraviolette Dublett 3302 Å und 3303 Å des Na I hervor. Außerdem werden auch noch die interstellaren Linien des Ca I, K I, Ti II und die Moleküllinien des CH I und CH II beobachtet. In allen Fällen haben wir es mit Linien zu tun, die von Atomen, Ionen oder Molekülen im Grundzustand absorbiert werden. Dies ist auch verständlich, da infolge der außerordentlichen Ver-

dünnung der Strahlung im interstellaren Raum die Zahl der Atome, die sich im angeregten Zustand befinden, sehr klein ist.

Da die interstellaren Absorptionslinien jene Absorptionslinien stören, die in Sternatmosphären entstehen, lassen sich die interstellaren Linien vorläufig nur in den Spektren solcher Sterne auffinden, wo diese Störung minimal ist. Die Existenz von Absorptionslinien, die von Materie außerhalb der Sternatmosphären herrühren, wurde erstmalig beim Studium der Radialgeschwindigkeiten einiger heißer Riesen festgestellt, die Komponenten spektroskopischer Doppelsterne waren. Es zeigte sich, daß die Linien H und K in ihren Spektren Komponenten besitzen, die eine unveränderliche Geschwindigkeit zeigen, während alle anderen Linien periodische Geschwindigkeitsänderungen infolge der Bahnbewegung der Sterne aufweisen. Diese Komponenten der Linien des Ca II unterscheiden sich von den stellaren Komponenten derselben Linien auch rein äußerlich: sie sind weitaus schmaler und klarer. Es lag die Vermutung nahe, daß diese Linien außerhalb der Atmosphären der Komponenten des Doppelsternsystems entstehen.

Im weiteren wurden dieselben schmalen Absorptionslinien des Ca II auch in den Spektren von Einzelsternen des Typs O und B entdeckt, und es zeigte sich, daß die Radialgeschwindigkeiten, die aus diesen Linien bestimmt wurden, sich von denen der übrigen Sternlinien unterscheiden. Dies bekräftigt die Annahme von der Existenz eines interstellaren Gases, in dem Ionen des Ca II vorhanden sind. Analoge Schlüsse folgen aus den Untersuchungen des gelben Natriumdubletts D_1 und D_2 ($\lambda = 5890$ Å, 5896 Å).

Die Tatsache, daß die erwähnten interstellaren Linien des Kalziums nur in Spektren der Typen O und B zu beobachten sind, berechtigt ganz und gar nicht, davon zu sprechen, daß das interstellare Gas, das diese Linien erzeugt, nur um diese Sterne konzentriert ist. Die Sterne späterer Spektralklassen besitzen jedoch in ihren Spektren eigene intensive und außerordentlich breite Absorptionslinien H und K, was keine Möglichkeit gibt, die ihnen überlagerten schwachen Linien des interstellaren Kalziums zu beobachten. Es ist daher wichtig, daß das interstellare Natriumdublett D_1, D_2 nicht nur in Spektren vom Typ O und B zu beobachten ist, sondern auch in den Spektren entfernter A-Sterne (hauptsächlich bei Überriesen, die noch in großen Entfernungen zu beobachten sind). Dies führte zu dem Schluß, daß das interstellare Gas überall in der galaktischen Ebene verteilt ist und eine Schicht zu beiden Seiten dieser Ebene bildet. Durch Beobachtungen an entfernten Sternen, die sich in niederen galaktischen Breiten befinden, wurde dieser Schluß voll und ganz bestätigt. Es wurde dabei eine Korrelation zwischen der Entfernung der Sterne der Typen O bis B und der Äquivalentbreite der interstellaren Linien festgestellt. Die Intensität der interstellaren Linien nimmt im Mittel mit der Entfernung zu. Allerdings zeigten sich auch Ausnahmen von dieser Regel. Diese Tatsache wurde richtig als eine Ungleichförmigkeit in der Verteilung des interstellaren Gases in den verschiedenen Richtungen gedeutet, ebenso wie dies auch bei der Verteilung des interstellaren Staubs der Fall ist.

Die Ungleichförmigkeit in der Verteilung des interstellaren Staubes kommt, wie wir oben gesehen haben, in der wolkenhaften Struktur der staubförmigen

Materie in der Galaxis zum Ausdruck. Es erhebt sich die Frage, ob nicht auch die Schicht des interstellaren Gases eine derartige Wolkenstruktur besitzt. Lassen sich nicht die oben erwähnten Abweichungen in beträchtlichem Maße durch Schwankungen in der Zahl und den Abmessungen der Gaswolken, durch die das Licht entfernter Sterne hindurchgeht, erklären?

Das Studium der interstellaren Linien im Sternspektrum mit Spektrographen großer Dispersion gab Antwort auf diese Fragen. Es zeigte sich, daß die interstellaren Linien in den Spektren entfernter Sterne häufig aus mehreren Komponenten bestehen, was dem Durchgang des Sternlichts durch mehrere Wolken mit verschiedenen Radialgeschwindigkeiten entspricht. Somit steht in jedem Einzelfall die Möglichkeit offen, die Zahl der Wolken, die das Sternlicht durchquert, kennenzulernen, wenn man auch hierbei nicht vergessen darf, daß eine Verschmelzung der Komponenten bei nahe benachbarten Radialgeschwindigkeiten einzelner Wolken vorliegen kann. Dies trifft besonders für die Richtungen zu, wo der Einfluß der differentiellen galaktischen Rotation auf die Radialgeschwindigkeit nahezu Null ist, d.h., wenn die Differenz zwischen der galaktischen Länge der betreffenden Richtung und der Richtung nach dem Zentrum der Galaxis $l - l_0$ nahe bei $\frac{n\pi}{2}$ liegt, wobei n eine ganze Zahl ist.

Ein eingehenderes Studium der einzelnen Linienkomponenten, ihrer Intensitäten und Konturen führte zur Deutung der physikalischen Eigenschaften der einzelnen Wolken des interstellaren Gases und ihrer chemischen Zusammensetzung. Die erwähnten Schlüsse über die Existenz eines Systems von zahllosen Wolken des interstellaren Gases in der Galaxis führt seinerseits zur Frage über den Grad des Zusammenfallens oder der Identität dieses Systems mit dem System der zahllosen Wolken des interstellaren Staubes, der die allgemeine Absorption hervorruft.

Durch die Verwendung von Nebelspektrographen gelang es, in der Galaxis neben den diffusen Gasnebeln vom Typ des Orionnebels oder des Rosettennebels um den Sternhaufen NGC 2244 im Sternbild Monoceros sehr schwach leuchtende W a s s e r s t o f f e l d e r zu entdecken. (Die Bezeichnung rührt daher, daß sie vor allem durch die Strahlung in den Linien der BALMER-Serie entdeckt wurden.) Sowohl die diffusen Gasnebel als auch die erwähnten Wasserstoffelder sind G a s w o l k e n m i t E m i s s i o n e n. Da sich in den interstellaren Gaswolken alle neutralen Wasserstoffatome im Grundzustand befinden, haben wir keine Möglichkeit, interstellare Absorptionslinien des Wasserstoffs zu beobachten. Der Wasserstoff in diesen Wolken kann nur die Linien der LYMAN-Serie absorbieren, die sich jedoch in dem von der Erdatmosphäre absorbierten Spektralbereich befinden.

Das Problem des Zusammenhangs der interstellaren Gaswolken mit den diffusen Nebeln und den Wasserstoffeldern ist also ziemlich schwierig zu behandeln. Es erhebt sich die Frage, in welchem Maße man die diffusen Nebel und die schwachen Wasserstoffelder als Sonderfälle von interstellaren Gaswolken ansehen kann, die sich von anderen Wolken nur durch Bedingungen unterscheiden, bei denen Emissionslinien entstehen (z.B. durch kurzwellige Strahlung heißer Sterne).

Die Unmöglichkeit einer direkten Untersuchung der riesigen Massen des Wasserstoffs im interstellaren Raum (fast alle seine Atome befinden sich im Grundzustand, und die Anregung in den meisten Gaswolken ist sehr gering) führte bisher zu keiner Eindeutigkeit in den Schlüssen über die Eigenschaften dieser Wolken. Die Entdeckung einer Radiostrahlung in der Frequenz 1420,4 MHz im Jahre 1951, welche einem Übergang zwischen zwei Unterniveaus des Niveaus $^2S_{\frac{1}{2}}$ des neutralen Wasserstoffatoms entspricht (Unterniveaus, die durch die Hyperfeinstruktur der Wasserstofflinien infolge der Existenz des Protonenspins hervorgerufen sind), führte zu der Möglichkeit einer direkten Untersuchung des Wasserstoffs im Grundzustand und wird in den nächsten Jahren zu einer wesentlichen Erweiterung unserer Vorstellungen über die Verteilung und Bewegung des interstellaren Gases beitragen.

Für die weiteren Untersuchungen auf diesem Gebiet und die Lösung der oben aufgeworfenen Fragen ist die Ausarbeitung einer Theorie über die Entstehung der interstellaren Absorptions- und Emissionslinien sowie einer Theorie des Zustands des interstellaren Gases notwendig.

2. Die Entstehung der interstellaren Absorptionslinien

Die Theorie über die Entstehung von Absorptionslinien beim Durchgang des Sternlichts durch irgendeine interstellare Gaswolke ist einfacher als die Theorie der Absorptionslinien, die in den Sternatmosphären selbst entstehen. Die Ursache dafür liegt darin, daß man die Lichtstreuung in den Frequenzen der Absorptionslinien des interstellaren Gases vernachlässigen kann. Obwohl das vom Nebel in den Resonanzlinien (z. B. H und K) absorbierte Sternlicht nach allen Seiten gestreut wird, ist der Bruchteil, der wieder in die ursprüngliche Richtung der Sternstrahlung ausgesandt wird, verschwindend klein. Wir beobachten daher in fast reiner Form nur das Bild einer Schwächung des Sternlichts in den Linien (Extinktion).

In einem solchen Fall ist die Intensität der durch eine Wolke gegangenen Sternstrahlung durch die Gleichung

$$I_\lambda = I_\lambda^{(0)} e^{-\tau_\lambda}$$

gegeben, worin τ_λ die optische Dicke der Wolke in der Wellenlänge λ und $I_\lambda^{(0)}$ die Intensität des ungeschwächten Sternlichts sind. Wir haben daher für die Äquivalentbreite der Linien den Ausdruck

$$W = \int \left(1 - e^{-\tau_\lambda}\right) d\lambda. \tag{36.1}$$

Die optische Dicke τ_λ läßt sich durch die Zahl N der absorbierenden Atome in einem Zylinder mit dem Querschnitt 1 cm² ausdrücken, dessen Achse mit dem Visionsradius zusammenfällt und sich durch die ganze Wolke erstreckt:

$$\tau_\lambda = N s_\lambda. \tag{36.2}$$

Hierin ist s_λ der mittlere Absorptionskoeffizient „pro Atom“ oder, exakter, der mittlere Absorptionskoeffizient in dem Falle, daß die Volumeneinheit ein Atom enthält.

Die Abhängigkeit s_λ von λ ist, wie in Kapitel II gezeigt wurde, durch verschiedene Ursachen bedingt, die eine Verbreiterung der Spektrallinien zur Folge haben. Unter den Bedingungen des verdünnten interstellaren Gases können nur zwei Ursachen für die Linienverbreiterung eine merkliche Rolle spielen:

1. die Verbreiterung durch Strahlungsdämpfung und

2. der thermische und makroskopische DOPPLER-Effekt.

Jede Art von Linienverbreiterung infolge von Stößen und durch molekularen STARK-Effekt sind hier ohne Bedeutung. Die natürliche Linienbreite infolge Strahlungsdämpfung ist klein im Vergleich zur thermischen DOPPLER-Verbreiterung. Sie beginnt erst dann eine Rolle zu spielen, wenn die Zahl der absorbierenden Atome so groß ist, daß das Medium selbst in den Linienflügeln undurchsichtig wird, die über die Grenze der DOPPLER-Breite hinausgehen. Tatsächlich sind aber die beobachteten interstellaren Linien und besonders die Komponenten dieser Linien, die von den einzelnen Wolken herrühren, so schmal, daß von einer Absorption in den Linienflügeln keine Rede sein kann. Das zeugt von einer kleinen Zahl N absorbierender Atome längs des Lichtweges.

So bleibt also nur ein wichtiger Faktor zu berücksichtigen, die thermische DOPPLER-Verbreiterung.

Unter diesen Bedingungen wird die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Wellenlänge durch die Gleichung

$$s_\lambda = s_0 e^{-\frac{c^2(\lambda-\lambda_0)^2}{\lambda_0^2 b^2}} \tag{36.3}$$

ausgedrückt. Hier ist c die Lichtgeschwindigkeit, und b hängt von der Temperatur und Atommasse in folgender Weise ab:

$$b = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{36.4}$$

Es ist λ_0 die Wellenlänge einer Linie, die der Geschwindigkeit der betreffenden Wolke entspricht.

Die Konstante s_0 stellt den Absorptionskoeffizienten in der Linienmitte dar. Sie ist zu finden, indem man davon ausgeht, daß die durch s_λ ausgedrückte Gesamtenergie, die in der Zeiteinheit in der Linie bei isotroper Strahlung mit konstanter Intensität innerhalb der Linie absorbiert wird, gleich der in der Zeiteinheit absorbierten Energiemenge ist, die durch den EINSTEINschen Koeffizienten der Übergangswahrscheinlichkeit charakterisiert wird, d.h.

$$4\pi I_\nu \int s_\lambda d\lambda = B_{1\to 2}\varrho_\nu h\nu,$$

wobei ϱ_ν die Strahlungsdichte ist. Unter Berücksichtigung von

$$\varrho_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu \quad \text{und} \quad B_{1\to 2} = \frac{g_2}{g_1} \frac{A_{2\to 1} c^3}{8\pi h \nu^3}$$

finden wir

$$\int s_\lambda \, d\lambda = \frac{g_2}{g_1} \frac{A_{2\to 1}}{8\pi\lambda^2} . \tag{36.5}$$

Hierin sind g_1 und g_2 die statistischen Gewichte des unteren bzw. oberen Zustands. Setzen wir in (36.5) den Ausdruck (36.3) ein, so erhalten wir nach Integration

$$s_0 = \frac{g_2}{g_1} \frac{A_{2\to 1} \lambda^3}{8\pi^{\frac{3}{2}} b} . \tag{36.6}$$

Andererseits erhalten wir durch Einsetzen von (36.3) in (36.2) und in (36.1)

$$W = \int \left(1 - e^{-N s_0 e^{-\frac{c^2(\lambda-\lambda_0)^2}{\lambda_0^2 b^2}}}\right) d\lambda , \tag{36.7}$$

oder mit der Abkürzung

$$\frac{c(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_0 b} = x$$

finden wir

$$W = \frac{\lambda_0 b}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{-N s_0 e^{-x^2}}\right) dx . \tag{36.8}$$

Das bestimmte Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt eine Funktion von $N s_0$ dar, die tabelliert werden kann. Wir bezeichnen diese Funktion mit $F(N s_0)$. Es ist dann

$$\frac{W}{b} = \frac{\lambda_0}{c} F(N s_0) . \tag{36.9}$$

Das Argument $N s_0$ der Funktion F stellt die optische Tiefe τ_0 im Zentrum der Linie dar. In Tabelle 36 sind die Werte von lg τ_0 und die entsprechenden Werte von $F(\tau_0)$ aufgeführt.

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, daß für kleine τ_0 die Äquivalentbreite proportional τ_0 ist, aber für $\tau_0 > 1$ beginnt die Sättigung, und die Äquivalentbreite nimmt langsamer zu.

Die Beobachtungen liefern für eine Spektrallinie den Wert der Äquivalentbreite W. Die Größe der Übergangswahrscheinlichkeit $A_{2\to 1}$, die nach (36.6) in s_0 eingeht, muß aus der Physik bekannt sein. In Gleichung (36.9) kommen jedoch die beiden unbekannten Größen N und b vor, die die Eigenschaften der Wolke

Tabelle 36

$\lg \tau_0$	$\lg F(\tau_0)$	$\lg \tau_0$	$\lg F(\tau_0)$
9,0	9,24	0,6	0,42
9,2	9,43	0,8	0,48
9,4	9,61	1,0	0,52
9,6	9,79	1,2	0,56
9,8	9,96	1,4	0,59
0,0	0,11	1,6	0,62
0,2	0,24	1,8	0,64
0,4	0,34	2,0	0,66

charakterisieren. Die Größe b tritt außerdem noch im Nenner des Ausdrucks (36.6) für s_0 auf. Zur gemeinsamen Bestimmung von N und b muß man die Äquivalentbreite von zwei Linien kennen, die vom Grundzustand des betreffenden Atoms absorbiert werden. Wir wollen nachstehend zeigen, wie diese Aufgabe zu lösen ist.

Wenn die Linien zwei verschiedenen Übergängen entsprechen, sagen wir $1 \to k$ und $1 \to l$, so haben wir für das Verhältnis der Äquivalentbreiten W_{1k} und W_{1l} nach (36.9)

$$\frac{\lambda_{1l}}{\lambda_{1k}} \frac{W_{1k}}{W_{1l}} = \frac{F(N s_{0,1k})}{F(N s_{0,1l})}. \qquad (36.10)$$

Die linke Seite von (36.10) kann man aus den Beobachtungen erhalten. Dadurch ist auch die Differenz zu finden:

$$\lg F(N s_{0,1k}) - \lg F(N s_{0,1l}) = \lg \frac{\lambda_{1l}}{\lambda_{1k}} \frac{W_{1k}}{W_{1l}}. \qquad (36.11)$$

Andererseits kann auf der Grundlage von (36.6) das Verhältnis

$$\frac{\tau_{0,1k}}{\tau_{0,1l}} = \frac{s_{0,1k}}{s_{0,1l}} = \frac{g_k}{g_l} \frac{A_{k\to 1}}{A_{k\to l}} \frac{\lambda_{1k}}{\lambda_{1l}} \qquad (36.12)$$

aus den physikalischen Daten berechnet werden. Also kann auch die Differenz

$$\Delta = \lg \tau_{0,1k} - \lg \tau_{0,1l} \qquad (36.13)$$

berechnet werden.

Rechnet man (36.11) und (36.13) aus, so kann man in Tabelle 35 dasjenige Paar von lg τ-Werten finden, das eine gegebene Differenz (36.13) besitzt und zu der Differenz in den lg F führt, wie sie aus (36.11) folgt.

Somit sind also $\tau_{0,1k}$, $\tau_{0,1l}$, $F(N s_{0,1k})$ und $F(N s_{0,1l})$ bestimmt. Kennt man $F(N s_{0,1k})$ und W_{1k} aus (36.9), so findet man sofort b. Kennt man aber b, so erhält man N aus der Beziehung $\tau_{0,1k} = N s_{0,1k}$ unter Benutzung von (36.6).

Als Beispiel wollen wir das interstellare Natrium behandeln. Man könnte in diesem Falle versuchen, das Verhältnis der Komponenten des Dubletts D_1 und D_2 zu benutzen. Das Verhältnis der s_0-Werte ist in diesem Falle gleich zwei. Bei sehr großem W jedoch nähert sich das Verhältnis der Äquivalentbreiten in diesem Falle sehr schnell dem Wert 1, wie dies aus Tabelle 35 zu ersehen ist. Daher kann ein kleiner Fehler in der empirischen Bestimmung des Verhältnisses der Äquivalentbreiten der Komponenten zu einem großen Fehler in der Bestimmung von τ_0 für diese Komponenten führen, und demzufolge auch zu einem großen Fehler in der Bestimmung von N.

Man kann jedoch auch das Verhältnis der Äquivalentbreiten der Linie D_1 des gelben Dubletts und, sagen wir, der Linie 3303 Å des ultravioletten Dubletts benutzen. Für diesen Fall ist das Verhältnis der Übergangswahrscheinlichkeiten ebenfalls bekannt. Es wurde von J. W. PHILIPPOW und W. K. PROKOFJEW zu 21,8 bestimmt. Bei einem derart großen Verhältnis der Übergangswahrscheinlichkeiten und demzufolge einem großen Verhältnis der optischen Tiefen τ_0 in den Mitten der beiden Linien lassen sich aus den bekannten Differenzen von $\lg \tau_0$ und der Differenz von $\lg F(\tau)$ die τ-Werte viel genauer bestimmen. Demzufolge wird auch ein genauerer Wert für N erhalten. So fand STRÖMGREN aus dem Verhältnis $D_1/3303$ Å im Spektrum des Sterns χ^2 Orionis, das er zu 9,8 ermittelte, $\lg N = 13{,}99$, d.h., die Zahl der absorbierenden Natriumatome ist gleich $9{,}8 \cdot 10^{13}\,\mathrm{cm}^{-2}$. Führt man derartige Analysen für die Linien verschiedener Atome und Ionen aus, so kann man entsprechende Schlüsse auf ihre relative Häufigkeit ziehen.

Die Größe b wurde von uns im Zusammenhang mit der thermischen Bewegung der absorbierenden Atome eingeführt. Inzwischen hat sich herausgestellt, daß in den Wolken auch makroskopische Bewegungen stattfinden. Eine Streuung in den Geschwindigkeiten dieser Bewegungen im Visionsradius führt zur Vergrößerung des Effektivwertes von b. Ebenso wie die Komponenten ein und derselben Linie, die verschiedenen Wolken im Visionsradius zuzuschreiben sind, verschmelzen (was gewöhnlich in den Richtungen der Fall ist, in denen der Einfluß der galaktischen Rotation auf die Radialgeschwindigkeiten gering ist), besitzt auch die Geschwindigkeitsstreuung der Gaswolken einen Einfluß auf b.

Ein Vergleich der nach der geschilderten Methode erhaltenen N für Na und Ca II zeigt, daß diese Werte für ein und denselben Stern häufig von gleicher Größenordnung sind. So ergibt z.B. nach SPITZER die Hauptkomponente der interstellaren Linien im Spektrum von ξ Persei, d.h. die Komponente, die von der dichtesten Wolke erzeugt wird, für Na I den Wert $N = 4 \cdot 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-2}$ und für Ca II den Wert $1{,}7 \cdot 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-2}$. Manchmal beträgt der Wert N für Na I auch das Vierfache desjenigen von Ca II. Diese Tatsachen lassen sich sowohl als Unterschied in der Häufigkeit beider Elemente in den interstellaren Wolken als auch durch einen unterschiedlichen Ionisationsgrad erklären.

3. Die Ionisation des interstellaren Gases

Mit Ausnahme derjenigen Fälle, in denen sich eine Gaswolke unmittelbar bei einem heißen Überriesen befindet oder diesen umgibt, d.h. in den Fällen, wo wir es mit Bedingungen zu tun haben, die denen in den diffusen leuchtenden Nebeln ähnlich sind, erfolgt die Ionisation des interstellaren Gases durch eine gemeinsame Wirkung der Strahlung aller Sterne der Galaxis. Wir haben es dabei selbstverständlich einmal mit einer stark verdünnten Sternstrahlung zu tun, zum anderen mit zusammengesetzter Strahlung, die den verschiedenen Temperaturen der beleuchtenden Sterne entspricht. Die Ionisation durch Elektronenstoß spielt unter den Bedingungen des interstellaren Gases keine große Rolle.

Wir wollen die Ionisation in einem beliebigen Punkt einer interstellaren Wolke untersuchen. Es sei $d\Omega$ der gesamte Raumwinkel, unter dem von diesem Punkt aus alle Sterne zu sehen sind, die Temperaturen im Intervall T bis $T + dT$ besitzen. Nimmt man an, daß für diese Sterne das PLANCKsche Strahlungsgesetz gilt, so findet man für die Strahlungsdichte ϱ_ν, wie sie von Sternen nur dieser einen Temperaturgruppe bedingt ist,

$$\varrho_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^3} \frac{d\Omega}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Daher ist die Gesamtstrahlungsdichte gleich

$$\varrho_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^3} \int\limits_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \frac{d\Omega}{dT} dT. \tag{36.14}$$

Man muß also für die Berechnung von ϱ_ν die Funktion $\frac{d\Omega}{dT}$ kennen. Beim heutigen Stand unseres Wissens können wir die Funktion $\frac{d\Omega}{dT}$ nur für die Sonnenumgebung bestimmen. Wir benutzen hierzu die bekannten Daten über die scheinbaren Helligkeiten der Sterne und ihre Verteilung nach Spektralklassen. Die so erhaltene relative Verteilung der Strahlungsdichte nach den Frequenzen unterscheidet sich stark von der PLANCKschen. Daher läßt sich auch die Ionisation des interstellaren Gases nicht durch dieselben Formeln erfassen, wie sie für PLANCKsche Strahlung gültig sind, oder (wie dies bei planetarischen Nebeln geschieht, wo man mit einer verdünnten PLANCKschen Strahlung rechnen kann) durch Einführung eines Verdünnungsfaktors W in die Formel für die Strahlungsdichte. Deshalb erfordert die Berechnung des Ionisationsgrades für die verschiedenen Atome oder Ionen ziemlich umfangreiche numerische Rechnungen, denen bestimmte Werte von ϱ_ν und die Stationaritätsbedingung für die Atomzahlen in den verschiedenen Ionisations- und Anregungszuständen zugrunde liegen.

Obwohl bei diesen Rechnungen verschiedene ziemlich wenig begründete Annahmen über die Zahl der freien Elektronen gemacht werden, gelangen wir trotzdem in allen Fällen zu dem Schluß, daß die Atome des Natriums weit stärker ionisiert sind als die Ionen des Kalziums.

Man erhält für das Verhältnis der Anzahl der Ionen zur Anzahl der neutralen Atome des Natriums genähert

$$\frac{n_1}{n} \sim 10^6, \tag{36.15}$$

und für das Verhältnis der Anzahlen der einfach und zweifach ionisierten Kalziumatome

$$\frac{n_2}{n_1} \sim 10^4. \tag{36.16}$$

Infolge der hohen Ionisationspotentiale des Na II und Ca III kommt eine zweite Ionisation des Natriums und eine dritte Ionisation des Kalziums außerordentlich selten vor. Daher [siehe (36.15) und (36.16)] muß sich die überwiegende Mehrzahl der Natriumatome im einfach ionisierten Zustand und die der Kalziumatome im zweifach ionisierten Zustand befinden.

Wenn man weiter annimmt, daß im interstellaren Gas die Gesamtzahl der Natriumatome in allen Ionisationsstufen etwa dreimal so groß ist wie die Gesamtzahl der Kalziumatome (wie dies in der Sonnenatmosphäre der Fall ist), so muß die Zahl der Ca II-Ionen ungefähr 30mal größer sein als die Zahl der neutralen Natriumatome. Indessen haben die Linien des Dubletts H und K Äquivalentbreiten derselben Größenordnung wie die Linien des gelben Natriumdubletts D_1, D_2. Man versuchte diesen Beobachtungsbefund als Sättigungserscheinung der Absorptionslinien bei wachsender Anzahl der Atome zu erklären. Theoretisch wird die Erscheinung der Sättigung aus den Angaben der Tabelle 35 deutlich.

Es zeigte sich jedoch, daß die gleiche Größenordnung der Äquivalentbreiten für die Dubletts des Na I und Ca II auch in den Fällen auftritt, wo sowohl die einen als auch die anderen Linien weit von der Sättigung entfernt sind. Dies führt für viele Wolken zu einer einheitlichen Größenordnung für die Anzahlen der absorbierenden Atome von Na I und Ca II. Es ist daher möglich, daß Natrium in der gasförmigen interstellaren Materie weit häufiger vorkommt als Kalzium und relativ häufiger ist als auf der Sonne.

Das Fehlen von Beobachtungsdaten für interstellare Wasserstoffabsorptionslinien erschwert das Studium des Gaszustandes in den interstellaren Wolken sehr. Die Beobachtungen erlaubten jedoch, die Existenz interstellarer Wolken festzustellen, welche die Linien der Balmer-Serie emittieren, wobei diese Wolken am bequemsten im Licht der Hα-Linie zu beobachten sind.

4. Die Hα-Emissionsgebiete

Wir haben oben gesehen, daß die Anzahl der neutralen Natriumatome entlang dem Visionsradius in einer Wolke zuweilen den Wert 10^{13} bis 10^{14} cm^{-2} erreicht. Da der Wasserstoff tausendmal häufiger ist als Natrium und der Ionisationsgrad des Wasserstoffs mindestens um zwei Größenordnungen niedriger sein muß, kommen wir zu dem Schluß, daß die Anzahl der neutralen Wasserstoffatome in einer Säule mit der Grundfläche 1 cm^2 längs des Visionsradius einen Wert von 10^{17} bis 10^{18} und mehr erreichen muß. Dies bedeutet, daß die interstellaren Gaswolken für die kontinuierliche Strahlung jenseits der Grenze der Lyman-Serie undurchsichtig sein müssen. Dieser Schluß führt zu interessanten Folgerungen. Wir wollen uns einen Stern vom Typ O oder B 0 oder auch eine Gruppe derartiger Sterne vorstellen, die nahe der galaktischen Ebene stehen. Wenn ein solcher Stern (oder eine solche Sterngruppe) sich im Innern einer Wolke befindet, so muß er eine starke Ionisation in dieser Wolke und damit ein helles Leuchten in den Wasserstofflinien hervorrufen. Wir werden in diesem Falle einen diffusen leuchtenden Gasnebel beobachten. Wenn sich jedoch der Stern zwischen den Gaswolken befindet, so wird er in den ihm benachbarten Wolken eine Ionisation hervorrufen. Wir werden ein Leuchten dieser Wolken in den Linien der Balmer-Serie beobachten, d. h., wir sehen um den anregenden Stern ein ausgedehntes Hα-Emissionsfeld. Derartige Felder konnten mit Hilfe von Nebelspektrographen entdeckt werden.

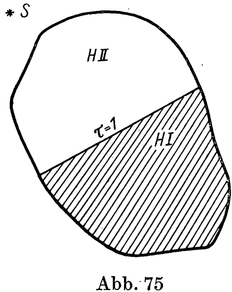


Abb. 75

Es ist jedoch wichtig, daß die von dem anregenden Stern beleuchteten Wolken die Strahlung jenseits der Grenze der Lyman-Serie vollständig absorbieren, weswegen die von ihnen abgeschirmten anderen, weiter entfernten Wolken überhaupt keine L_c-Strahlung erhalten. Daher wird bei ihnen kein Wasserstoffleuchten angeregt. Dies findet auf folgende Weise statt (vgl. Abb. 75):

Die L_c-Quanten, die vom Stern S emittiert werden, dringen bis zur optischen Tiefe $\tau = 1$ in den Frequenzen L_c ins Innere der Wolke vor. Weiter wird die Strahlung jedoch geschwächt. Die Schwächung der L_c-Strahlung ruft eine starke Abnahme des Ionisationsgrades hervor, wodurch die Zahl der neutralen Wasserstoffatome rasch zunimmt. Daher beginnt von der Schicht $\tau = 1$ an die optische Tiefe weit schneller zu wachsen als bis zu $\tau = 1$. Infolgedessen verstärkt sich auch die Absorption der L_c-Quanten in diesen Schichten. Dies alles führt dazu, daß der jenseits der Schicht $\tau = 1$ liegende Teil der Wolke eine große optische Dicke in den Frequenzen des Lyman-Kontinuums besitzen muß. Die Wolke setzt sich also aus einem ionisierten Teil (H II-Gebiet) und einem nichtionisierten (H I-Gebiet) zusammen. Wolken, die in größerer Entfernung vom Stern jenseits der betrachteten Wolke liegen, werden durch die Sternstrahlung in den Wasserstofflinien fast überhaupt nicht angeregt.

Ähnlich wie bei den planetarischen und diffusen Gasnebeln kann man auch die Masse des Wasserstoffs, die in dem leuchtenden Teil einer interstellaren Wolke konzentriert ist, bestimmen. Hierbei müssen wir von der Bedingung ausgehen, daß die Strahlung der Volumeneinheit in jeder BALMER-Linie der Zahl der Rekombinationen der Wasserstoffatome proportional ist:

$$\varepsilon = C n_i n_e = C n_i^2 .$$

Multipliziert man ε mit dem Quadrat des Volumens V, so erhält man

$$\varepsilon V^2 = C n_i^2 V^2 = \frac{C}{m^2} M ,$$

wobei m die Masse des Wasserstoffatoms und M die Masse des leuchtenden Teils des Nebels ist. Die Größe εV ist gleich der Leuchtkraft L des Nebels in der betrachteten Linie der BALMER-Serie. Es ist also

$$L V = \frac{C}{m^2} M^2 . \qquad (36.17)$$

Diese Gleichung gestattet, M aus L und V zu bestimmen.

Die so errechneten Massen interstellarer Wolken sind von der Größenordnung zehn Sonnenmassen. Die Zahl aller Wasserstoffatome im cm^3, sowohl ionisierter als auch neutraler, beträgt etwa 10. Die Radien der Wolken ergeben sich aus den Beobachtungen zu ungefähr 10 parsec.

5. Riesen-Gasnebel

Im astrophysikalischen Observatorium der Krim wurde von G. A. SCHAIN eine neue Methode zur Entdeckung und Untersuchung leuchtender diffuser Gasnebel ausgearbeitet. Diese Methode führte G. A. SCHAIN und W. F. HASE [81] zur Entdeckung einer beträchtlichen Anzahl neuer Gasnebel und rückte ein tieferes Verständnis für ihre Natur näher. Speziell die Bestimmung der Massen diffuser Nebel auf der Grundlage von Schätzungen ihrer Leuchtkräfte in den Linien der BALMER-Serie führte zu einer Gruppe gigantischer diffuser Nebel mit Massen von der Größenordnung tausend und mehr Sonnenmassen. Von den bekannten diffusen Nebeln gehört der Orionnebel und der Rosettennebel um den O-Sternhaufen NGC 2244 in diese Gruppe. Es zeigte sich, daß ein derartig gigantischer diffuser Nebel auch den Sternhaufen NGC 1805 umgibt, der den Kern der O-Assoziation Cassiopeiae VI darstellt. Ein interessanter riesiger Gasnebel wurde auch in der Assoziation Cassiopeiae II, unweit vom Kern dieser Assoziation, dem Sternhaufen NGC 7510, entdeckt.

Interessant ist, daß alle diese Riesennebel in Gebieten von O-Assoziationen liegen. Dabei spricht die Lage dieser Nebel relativ zu den Sternen der Assoziation, die ihr Leuchten hervorrufen, für einen tieferen genetischen Zusammenhang des Nebels mit den Mitgliedern der betreffenden Assoziationen. Diese

riesigen diffusen Nebel kann man kaum als Vertreter einer gewöhnlichen Gesamtheit interstellarer Gaswolken ansehen, die zufällig in die Nachbarschaft von Mitgliedern einer Assoziation heißer Sterne geraten sind. Die Hypothese von der Zufälligkeit des Zusammenhangs diffuser Staubnebel mit den sie beleuchtenden Sternen läßt sich nicht ohne weiteres auf diese Riesen-Gasnebel erstrecken.

Die Bestimmung der Massen einiger solcher gigantischer diffuser Nebel, die in einigen benachbarten extragalaktischen Systemen vorkommen, führt zu Werten von der Größenordnung einiger 10000 Sonnenmassen. Die Lage dieser übergigantischen diffusen Nebel fällt mit Assoziationen blauer Riesensterne zusammen, die in diesen Systemen vorkommen.

Mit Hilfe einer neuen Methode zur Beobachtung von Gaswolken gelang es G. A. SCHAIN, mehrere Fasernebel zu entdecken. Durch Vergleich der Faserrichtungen von mehreren dieser Nebel mit polarimetrischen Beobachtungsdaten kam SCHAIN zu dem Schluß, daß die Fasern längs der Kraftlinien des interstellaren Magnetfeldes ausgerichtet sind. Eine derartige Ausrichtung der Fasern entspricht gerade den theoretischen Vorstellungen von der Bewegung eines Ionengases im Magnetfeld.

Während der letzten Jahre haben sich unsere Kenntnisse von der Natur der interstellaren Materie durch die Anwendung radioastronomischer Untersuchungsmethoden stark entwickelt. Interessante Resultate ergaben sich einmal durch Messung des kontinuierlichen Radiospektrums der Milchstraße im Bereich der Meter- und Dezimeterwellen und zum anderen durch Beobachtungen in der Wasserstofflinie mit der Wellenlänge 21 cm. Diese Linie entspricht dem Übergang zwischen zwei Unterniveaus der Hyperfeinstruktur des Grundzustandes *1 S* des Wasserstoffatoms.

Die Untersuchungen führten zu dem Ergebnis, daß die interstellaren Gase die Fähigkeit haben, im Meterwellenbereich eine Energie auszustrahlen, welche die der normalen Temperaturstrahlung um ein Vielfaches übertrifft. Einige galaktische Nebel, beispielsweise der bekannte Krebsnebel, sind besonders intensive Quellen dieser Strahlung.

Die wahrscheinlichste Deutung dieser Erscheinung besteht in der Annahme, daß Elektronen sehr hoher Energie vorhanden sind (bis 10^{11} eV), die im Magnetfeld eine Synchrotonstrahlung liefern. In Resten von Supernovae, beispielsweise im Krebsnebel, darf man eine besonders große Anzahl derartiger Elektronen annehmen.

Untersuchungen in der 21-cm-Linie führten zur Klärung der Verteilung des neutralen Wasserstoffs in der Galaxis. Dadurch ergab sich die Möglichkeit, Lage und Richtung der Arme der Milchstraße zu bestimmen, weil dies Konzentrationsgebiete des interstellaren Wasserstoffs sind.

ANHANG 1

Tabellen zur Berechnung des Koeffizienten der selektiven Absorption bei gleichzeitiger Wirkung von Doppler-Verbreiterung und Strahlungsdämpfung

Zur Berechnung der Größen $a = \frac{\delta_{ik}}{\Delta\nu_D}$, die der Ungleichung $a \ll 1$ genügen, kann man folgenden Ausdruck für die Funktion $\varphi(a, p) = \frac{s_\nu}{s_{\nu_0}}$, die durch (11.39) gegeben ist, erhalten[1]):

$$\varphi(a, p) = \frac{s_\nu}{s_{\nu_0}} = e^{-p^2} - \frac{2a}{\sqrt{\pi}}\left\{1 - 2pe^{-p^2}\int_0^p e^{z^2}dz\right\}. \qquad (1)$$

In Tabelle 1 sind für verschiedene p die Werte des Ausdrucks in der geschweiften Klammer auf der rechten Seite der obigen Gleichung

$$\Phi(p) = 1 - 2pe^{-p^2}\int_0^p e^{z^2}dz \qquad (2)$$

aufgeführt.

Für $a = 0{,}03$ geht der Fehler in den $\varphi(a, p)$, der bei der Anwendung der Formel (1) und Tabelle 1 entsteht, nicht über 0,5% des Wertes von $\varphi(a, p)$ hinaus. Für $a = 0{,}10$ beträgt der maximale Fehler etwa 3%, für $a = 0{,}20$ etwa 9%. Für größere Werte von a als etwa 0,05 ist es wünschenswert, Tabellen mit größerer Genauigkeit als Tabelle 1 zu verwenden. Wir bringen hier drei Tabellen, die von Hjerting zusammengestellt wurden[2]). In Tabelle 2 sind die Funktionen $\varphi(a, p) = \frac{s_\nu}{s_{\nu_0}}$ für verschiedene Werte von a und p aufgeführt; der Maximalwert von a in der Tabelle ist gleich 0,2, der Maximalwert von p gleich 5. Tabelle 3 bringt die Größen $\frac{s_\nu}{s_{\nu_0}} a^{-1}$ für p-Werte, die sich von 5 bis 20 ändern.

---

[1]) Siehe z. B. A. Unsöld, Physik der Sternatmosphären, § 44, Berlin 1938. Es ist jedoch zu beachten, daß die Größe a, die in den Formeln von Unsöld auftritt, doppelt so groß ist wie das a unserer Gleichung (11.38).

[2]) F. Hjerting, Ap. J. 88, 508, 1938.

Die Tabelle 4 schließlich enthält die Größen $\frac{s_\nu}{s_{\nu_0}}$ für a, das sich von 0,0 bis 0,5 ändert.

Außerdem kann noch auf eine von HARRIS zusammengestellte nützliche Tabelle verwiesen werden. Diese Tabelle und die entsprechenden Erläuterungen dazu befinden sich in der Sammlung „Aktuelle Probleme der Astrophysik und Physik der Sonne".

Tabelle 1

p	$\Phi(p)$	p	$\Phi(p)$	p	$\Phi(p)$
0,0	1,0000	4,2	—0,03119	8,4	—0,007242
0,2	0,9221	4,4	—0,02815	8,6	—0,006902
0,4	0,7121	4,6	—0,02554	8,8	—0,006586
0,6	0,4303	4,8	—0,02330	9,0	—0,006290
0,8	0,1487	5,0	—0,02134	9,2	—0,006014
1,0	—0,07616	5,2	—0,01963	9,4	—0,005757
1,2	—0,2175	5,4	—0,01812	9,6	—0,005516
1,4	—0,2782	5,6	—0,01678	9,8	—0,005290
1,6	—0,2797	5,8	—0,01558	10,0	—0,005076
1,8	—0,2485	6,0	—0,01451	10 2	—0,004877
2,0	—0,2054	6,2	—0,01355	10,4	—0,004688
2,2	—0,1638	6,4	—0,01268	10,6	—0,004511
2,4	—0,1295	6,6	—0,01190	10,8	—0,004344
2,6	—0,1033	6,8	—0,01118	11,0	—0,004183
2,8	—0,08389	7,0	—0,01053	11,2	—0,004035
3,0	—0,06962	7,2	—0,009938	11,4	—0,003893
3,2	—0,05896	7,4	—0,009393	11,6	—0,003757
3,4	—0,05076	7,6	—0,008892	11,8	—0,003630
3,6	—0,04430	7,8	—0,008429	12,0	—0,003510
3,8	—0,03908	8,0	—0,008003		
4,0	—0,03478	8,2	—0,007608		

Tabelle 2

a	p				
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
0,00	1,000	0,939	0,770	0,570	0,368
0,01	0,989	0,930	0,772	0,567	0,369
0,02	0,978	0,920	0,766	0,565	0,370
0,03	0,967	0,910	0,760	0,562	0,370
0,04	0,956	0,901	0,753	0,560	0,371
0,05	0,946	0,892	0,747	0,558	0,371
0,06	0,936	0,883	0,741	0,555	0,372
0,07	0,926	0,874	0,735	0,552	0,372
0,08	0,916	0,865	0,729	0,550	0,373
0,09	0,906	0,856	0,723	0,548	0,373
0,10	0,896	0,848	0,718	0,545	0,373
0,11	0,887	0,840	0,712	0,542	0,374
0,12	0,878	0,831	0,706	0,540	0,374
0,13	0,869	0,823	0,701	0,538	0,374
0,14	0,860	0,815	0,695	0,535	0,374
0,15	0,851	0,807	0,690	0,532	0,374
0,16	0,842	0,799	0,684	0,530	0,374
0,17	0,834	0,792	0,679	0,527	0,374
0,18	0,825	0 784	0,674	0,525	0,374
0,19	0,817	0,777	0,668	0,522	0,373
0,20	0,809	0,770	0,663	0,520	0,373

a	p				
	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75
0,00	0,00052	0,000123	0,000026	0,000005	0,000001
0,01	0,00151	0,000908	0,000666	0,000539	0,000455
0,02	0,00251	0,00169	0,00130	0,00107	0,000910
0,03	0,00350	0,00248	0,00194	0,00161	0,00136
0,04	0,00449	0,00326	0,00258	0,00214	0,00182
0,05	0,00548	0,00404	0,00322	0,00268	0,00227
0,06	0,00646	0,00483	0,00386	0,00321	0,00273
0,07	0,00745	0,00561	0,00450	0,00374	0,00318
0,08	0,00843	0,00639	0,00513	0,00428	0,00364
0,09	0,00940	0,00717	0,00577	0,00481	0,00409
0,10	0,0104	0,00794	0,00641	0,00534	0,00454
0,11	0,0114	0,00872	0,00704	0,00587	0,00500
0,12	0,0123	0,00949	0,00768	0,00640	0,00545
0,13	0,0133	0,0103	0,00831	0,00693	0,00590
0,14	0,0142	0,0110	0,00894	0,00746	0,00635
0,15	0,0152	0,0118	0,00957	0,00799	0,00680
0,16	0,0162	0,0126	0,0102	0,00852	0,00726
0,17	0,0171	0,0133	0,0108	0,00905	0,00771
0,18	0,0180	0,0141	0,0115	0,00958	0,00816
0,19	0,0190	0,0149	0,0121	0,0101	0,00860
0,20	0,0199	0,0156	0,0127	0,0106	0,00906

p: 1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
0,210	0,105	0,0468	0,0183	0,00633	0,00193
0,212	0,109	0,0497	0,0206	0,00806	0,00323
0,215	0,112	0,0525	0,0229	0,00979	0,00452
0,217	0,115	0,0553	0,0252	0,0115	0,00581
0,220	0,118	0,0581	0,0274	0,0132	0,00710
0,222	0,121	0,0608	0,0296	0,0149	0,00838
0,224	0,123	0,0635	0,0318	0,0166	0,00966
0,226	0,126	0,0660	0,0339	0,0182	0.0109
0,229	0,129	0,0687	0,0360	0,0198	0,0122
0,231	0,131	0,0713	0,0381	0,0215	0,0134
0,232	0,134	0,0737	0,0402	0,0231	0,0147
0,234	0,136	0,0762	0,0422	0,0247	0,0160
0,236	0,139	0,0786	0,0442	0,0263	0,0172
0,238	0,141	0,0810	0,0463	0,0279	0,0184
0,240	0,144	0,0833	0,0482	0,0294	0,0196
0,241	0,146	0,0856	0,0502	0,0310	0,0208
0,243	0,148	0,0879	0,0520	0,0325	0,0221
0,244	0,150	0,0901	0,0540	0,0340	0,0233
0,246	0,152	0,0922	0,0558	0,0356	0,0245
0,247	0,154	0,0943	0,0576	0,0371	0,0256
0,248	0,157	0,0964	0,0595	0,0385	0,0268

p: 4,00	4,25	4,50	4,75	5,00
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000393	0,000343	0,000302	0,000269	0,000241
0,000785	0,000686	0,000605	0,000538	0,000482
0,00118	0,00103	0,000907	0,000806	0,000722
0,00157	0,00137	0,00121	0,00108	0,000963
0,00196	0,00171	0,00151	0,00134	0,00120
0,00236	0,00206	0,00181	0,00161	0,00144
0,00275	0,00240	0,00212	0,00188	0,00169
0,00314	0,00274	0,00242	0,00215	0,00192
0,00353	0,00308	0,00272	0,00242	0,00217
0,00392	0,00343	0,00302	0,00269	0,00241
0,00432	0,00377	0,00332	0,00295	0,00265
0,00471	0,00411	0,00362	0,00322	0,00289
0,00510	0,00445	0,00392	0,00349	0,00313
0,00549	0,00479	0,00423	0,00376	0,00337
0,00588	0,00513	0,00453	0,00403	0,00361
0,00627	0,00547	0,00483	0,00429	0,00385
0,00666	0,00581	0,00513	0,00456	0,00409
0,00705	0,00615	0,00543	0,00483	0,00433
0,00744	0,00649	0,00573	0,00510	0,00457
0,00783	0,00683	0,00603	0,00536	0,00481

Tabelle 3

p	$\frac{s_\nu}{s_{\nu_0}} a^{-1}$	p	$\frac{s_\nu}{s_{\nu_0}} a^{-1}$	p	$\frac{s_\nu}{s_{\nu_0}} a^{-1}$
5,0	0,0241	10,0	0,00573	15,0	0,00251
5,5	0,0197	10,5	0,00519	15,5	0,00235
6,0	0,0164	11,0	0,00472	16,0	0,00221
6,5	0,0139	11,5	0,00432	16,5	0,00208
7,0	0,0119	12,0	0,00396	17,0	0,00196
7,5	0,0103	12,5	0,00365	17,5	0,00185
8,0	0,00903	13,0	0,00337	18,0	0,00175
8,5	0,00798	13,5	0,00312	18,5	0,00166
9,0	0,00710	14,0	0,00290	19,0	0,00157
9,5	0,00636	14,5	0,00270	19,5	0,00149
10,0	0,00573	15,0	0,00251	20,0	0,00142

Tabelle 4

p	s_ν / s_{ν_0}					
	$a = 0{,}0$	$a = 0{,}1$	$a = 0{,}2$	$a = 0{,}3$	$a = 0{,}4$	$a = 0{,}5$
0,00	1,00	0,90	0,81	0,74	0,67	0,62
0,25	0,94	0,85	0,77	0,70	0,64	0,59
0,50	0,78	0,72	0,66	0,62	0,57	0,53
0,75	0,57	0,54	0,52	0,50	0,47	0,44
1,00	0,37	0,37	0,37	0,37	0,36	0,36
1,25	0,21	0,23	0,25	0,26	0,27	0,27
1,50	0,10	0,13	0,16	0,17	0,19	0,20
1,75	0,047	0,074	0,096	0,12	0,13	0,14
2,00	0,018	0,040	0,060	0,076	0,090	0,103
2,50	0,002	0,015	0,027	0,038	0,049	0,058
3,00	0,0001	0,0079	0,016	0,023	0,030	0,037
3,50	0,0000	0,0053	0,011	0,016	0,021	0,026
4,00	0,0000	0,0039	0,0078	0,012	0,016	0,019
4,50	0,0000	0,0030	0,0060	0,0090	0,012	0,015
5,00	0,0000	0,0024	0,0048	0,0072	0,0096	0,012

ANHANG 2

Einige wichtige astronomische und physikalische Konstanten

1. Astronomische Konstanten

Eine astronomische Einheit	$1{,}4964 \cdot 10^{13}$ cm
Ein Lichtjahr	$9{,}463 \cdot 10^{17}$ cm
1 parsec = 3,26 Lichtjahre	$3{,}084 \cdot 10^{18}$ cm
Sonnenmasse	$1{,}991 \cdot 10^{33}$ g
Sonnenradius	$6{,}963 \cdot 10^{10}$ cm
Mittlere Dichte der Sonne	1,41 g/cm^3
Schwerebeschleunigung an der Sonnenoberfläche	$2{,}740 \cdot 10^{4}$ cm/sec^2
Gesamte von der Sonne ausgestrahlte Energie	$3{,}79 \cdot 10^{33}$ erg/sec
Zahl der Sekunden im Jahr	$3{,}1558 \cdot 10^{7}$ sec
Parallaxe der Sonne	8″,790

2. Physikalische Konstanten

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c = 2{,}99776 \cdot 10^{10}$ cm/sec
Gravitationskonstante	$G = 6{,}670 \cdot 10^{-8}$ dyn cm^2/g^2
PLANCKsche Konstante	$h = 6{,}624 \cdot 10^{-27}$ erg · sec
AVOGADROsche Zahl (Zahl der Atome oder Moleküle im Mol)	$N_0 = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ 1/Mol
Elektronenladung	$e = 4{,}802 \cdot 10^{-10}$ CGSE
RYDBERG-Konstante für Wasserstoff	$R_{\mathrm{H}} = 109677{,}581$ cm^{-1}
Elektronenmasse	$m_e = 9{,}1066 \cdot 10^{-28}$ g
Masse des Wasserstoffatoms (H^1)	$m_{\mathrm{H}} = 1{,}6734 \cdot 10^{-24}$ g
Masse des Protons	$m_p = 1{,}6725 \cdot 10^{-24}$ g
Verhältnis der Protonenmasse zur Elektronenmasse	$\frac{m_p}{m_e} = 1836{,}5$
BOLTZMANN-Konstante	$k = 1{,}380 \cdot 10^{-16}$ erg · grad
Erste Konstante des PLANCKschen Strahlungsgesetzes	$c_1 = 8\pi h c = 4{,}990 \cdot 10^{-15}$ erg · cm
Zweite Konstante des PLANCKschen Strahlungsgesetzes	$c_2 = \frac{hc}{k} = 1{,}4834$ cm · grad

STEFAN-BOLTZMANNsche Konstante	$\sigma = 5{,}672 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\,\text{grad}^4\,\text{sec}}$
Konstante des WIENschen Verschiebungsgesetzes	$\lambda_{\max} T = 0{,}2897$ cm · grad
Radius der ersten Bahn des Wasserstoffatoms	$a_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 m_e e^2} = 0{,}529 \cdot 10^{-8}$ cm
Energie in erg, die 1 eV entspricht	$1{,}6020 \cdot 10^{-12}$ erg
Wellenlänge, die einem Quant der Energie 1 eV entspricht	12395 Å
„Temperatur“, die 1 eV entspricht	11606° K
Standardatmosphäre	$1013246 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2\,\text{atm}}$
Mechanisches Wärmeäquivalent	4,1855 Joule/cal
Gaskonstante pro Mol	$R = 8{,}3144 \cdot 10^{7} \frac{\text{erg}}{\text{grad Mol}}$
Konstante der Strahlungsdichte	$a = 7{,}569 \cdot 10^{-15} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\,\text{grad}}$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] S. Rosseland, Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage. Springer, Berlin 1931.

[2] A. Unsöld, Physik der Sternatmosphären. Springer, Berlin 1938.

[3] Fortschritte der astronomischen Wissenschaften. Bd. II, 1941.
(Успехи астрономических наук, т. II, 1941.)

[4] Astrophysikalische Sammlung. Herausgegeben von N. N. Pariski, IL, 1949.
(Астрофизический сборник, под ред. Н. Н. Парийского. ИЛ, 1949.)

[5] Sammlung „Aktuelle Probleme der Astrophysik und Physik der Sonne". Herausgegeben von N. N. Pariski, IL, 1951.
(Сборник «Современные проблемы астрофизики и физики Солнца», под ред. Н. Н. Парийского, ИЛ, 1951.)

[6] E. Jahnke und F. Emde, Funktionentabellen. Teubner, Leipzig 1948.

[7] E. R. Mustel, Theorie des Strahlungsgleichgewichts der Sternatmosphären für einen frequenzunabhängigen Absorptionskoeffizienten.
(Э. Р. Мустель, Теория лучистого равновесия звездных фотосфер для коэффициента поглощения, не зависящего от частоты. Труды ГАИШ, **13**, 2, 1940.)

[8] E. R. Mustel, Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Sterne früher Spektralklassen. Teil I und II, Astr. Journal **18**, 297, 1941 und **21**, 133, 1944.
(Э. Р. Мустель, Распределение энергии в непрерывном спектре звезд ранних классов, части I и II. АЖ **18**, 297, 1941 и **21**, 133, 1944.)

[9] V. A. Ambarzumjan, Compton-Streuung in Sternspektren. Veröffentlichungen der Leningr. Staatl. Universität. Nr. 22, 5, 1938.
(В. А. Амбарцумян, Комптоновское рассеяние в спектрах звезд. Ученые записки ЛГУ, No. 22, 5, 1938.)

[10] V. A. Ambarzumjan, Theoretische Astrophysik. Moskau 1939.
(В. А. Амбарцумян, Теоретическая астрофизика. Гостехиздат, 1939.)

[11] E. W. Schpolski. Atomphysik. Bd. I, Deutsche Ausgabe: Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1954.

[12] Fortschritte der astr. Wissenschaften. Bd. V, 1950.
(Успехи астрономических наук, т. V, 1950.)

[13] G. Herzberg, Atomspektren und Atomstruktur. Steinkopff, Dresden 1936.

[14] T. M. Fofanowa, Spektralphotometrie von Riesensternen. Nachrichten des Astr. Hauptobs. **18**, Heft 3, Nr. 144, 68, 1950.
(Т. М. Фофанова, Спектрофотометрия звезд-гигантов. Известия ГАО **18**, вып. 3, No. 144, 68, 1950.)

[15] L. Landau und E. Lifschitz, Mechanik der Festkörper. Moskau 1944.
(Л. Ландау и Е. Лившиц, Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1944.)

[16] W. A. Krat, Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper. Moskau 1950.
(В. А. Крат, Фигуры равновесия небесных тел. Гостехиздат, 1950.)

[17] W.W. Sobolew, Inkohärente Lichtstreuung in Sternatmosphären. Astr. Journ. **26**, 129, 1949.
(В.В. Соболев,Некогерентное рассеяние света в звездных атмосферах. АЖ **26**, 129, 1949.)

[18] Fortschritte der astr. Wissenschaften, 1939.
(Успехи астрономических наук, 1939.)

[19] Nachrichten des Krim-Observatoriums, 7, 1951.
(Известия КАО 7, 1951.)

[20] Fortschritte der astr. Wissenschaften, 3, 1947.
(Успехи астрономических наук, 3, 1947.)

[21] Fortschritte der astr. Wissenschaften, 4, 1948.
(Успехи астрономических наук, 4, 1948.)

[22] B.W. Kukarkin, Erforschung der Struktur und der Entwicklung der Sternsysteme auf der Grundlage des Studiums veränderlicher Sterne. Akademie-Verlag, Berlin 1954.

[23] Lehrbuch der Astrophysik und Stellarastronomie. Herausgegeben von A. A. Michailow. Teil I, Moskau 1951.
(Курс астрофизики и звездной астрономии, под ред. А.А.Михайлова, ч. I. Гостехиздат, 1951.)

[24] Lehrbuch der Astrophysik und Stellarastronomie. Teil II, ONTI 1936.
(Курс астрофизики и звездной астрономии, ч. II. ОНТИ, 1936.)

[25] P.P. Parenago, Lehrbuch der Stellarastronomie. Moskau 1946.
(П.П. Паренаго, Курс звездной астрономии. Гостехиздат, 1946.)

[26] S. Chandrasekhar, Introduction to the study of stellar structure. Astrophysical monographs, Univ. of Chicago press. 1939.

[27] W.S. Berditschewskaja, Aufbau der Photosphäre der Sterne vom Typ A 0. Astr. Journ. 22, 359, 1945.
(В.С. Бердичевская, Строение фотосфер типа A 0, АЖ 22, 359, 1945.)

[28] S.A. Boguslawski, Die Bewegung von Elektronen in elektromagnetischen Feldern. 1927.
(С.А. Богуславский, Движение электронов в электромагнитных полях, 1927.)

[29] H. Alfven, Cosmical electrodynamics. Tables and diags (The International Series of Monographs on Physics). Clarendon Pr., Oxford U.Pr. Mar. 1950.

[30] M. Born, Optik. Springer, Berlin 1939.

[31] G.A. Shain und P.F. Shain, Differentielle systematische Linienverschiebungen in den Spektren weißer Überriesen. Nachrichten des Krim-Observatoriums 4, 49, 1949.
(Г.А.Шайн и П.Ф.Шайн, Дифференциальные систематические смещения линий в спектрах белых сверхгигантов. Известия КАО 4, 49, 1949.)

[32] B.A. Sewerni und A. G. Gilwarg, Interferenz-Polarisationsfilter zur Untersuchung der Sonne und ein Versuch ihrer Anwendung. Nachrichten des Krim-Observatoriums 4, 3, 1949.
(Б.А. Северный и А.Б. Гильварг, Интерференционно-поляризационный фильтр для исследования Солнца и опыт его применения. Известия КАО 4, 3, 1949.)

[33] I.S. Schklowski. Die Sonnenkorona. Moskau 1951.
(И.С.Шкловский, Солнечная корона. Гостехиздат, 1951.)

[34] M. Waldmeier, Ergebnisse und Probleme der Sonnenforschung. 2. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955.

[35] E. R. Mustel, Zur Deutung der Kalzium- und Wasserstoffspektrogramme. Berichte der Akad. d. Wiss. d. UdSSR 82, 21, 1952.
(Э.Р.Мустель, Об истолковании кальциевых и водородных спектрограмм. Доклады АН СССР 82, 21, 1952.)

[36] W. P. Wjasanizin, Absolute Photometrie der Sonnenchromosphäre. Nachr. d. Georg. Astr. Obs. Nr. 147, 19, 1951.
(В.П.Вязаницын, Абсолютная фотометрия солнечной хромосферы. Известия ГАО, No. 147, 19, 1951.)

[37] G. A. Schain. Beobachtungsergebnisse des Koronaspektrums vom 19. Juni 1936. Nachr. d. Krim-Obs. I, 102, 1947.
(Г.А.Шайн, Результаты наблюдения спектра короны 19 июня 1936 г. Известия КАО, I, 102, 1947.)

[38] E. J. Bugoslawskaja, Der Aufbau der Sonnenkorona. Berichte d. GAISCH XIX, 1950.
(Е.Я.Бугославская, Структура солнечной короны, Труды ГАИШ, XIX, 1950.)

[39] S. K. Wsechswjatski und E. J. Bugoslawskaja, Die Rotation der Sonnenkorona, bestimmt aus der sichtbaren Verschiebung von Einzelheiten (S. 363) und die innere Korona vom 19. Juni 1936. Untersuchung der Koronastruktur und der Veränderungen der Korona und der Chromosphäre (S. 368). Berichte der Akad. d. Wiss. d. UdSSR XXV, 5, 1939.
(С.К.Всехсвятский и Е.Я.Бугославская, Вращение солнечной короны,определенное по видимым смещениям деталей (стр. 363) и Внутренняя корона Солнца 19 июня 1936 г. Изучение корональной структуры и изменений в короне и хромосфере (стр. 368). Доклады АН СССР, XXV, 5, 1939.)

[40] Sammlung „Physikalische Prozesse in Gasnebeln". Herausgegeben von W. G. Fessenkow, Moskau 1948.
(Сборник «Физические процессы в газовых туманностях», под ред. В.Г.Фесенкова. ИЛ, 1948.)

[41] S. B. Pikelner, Dissipation der Sonnenkorona und ihr Wert. Berichte der Akad. d. Wiss. d. UdSSR, 1948.
(С.Б.Пикельнер, Диссипация солнечной короны и ее значение. Доклады АН СССР, LXXII, 1950.)

[42] B. A. Woronzow-Weljaminow, Gasnebel und Neue Sterne. Deutsche Ausgabe: Kultur und Fortschritt, Berlin 1953.

[43] B. A. Woronzow-Weljaminow, Der weiß-blaue Ast im Hertzsprung-Russell-Diagramm (S. 83) und seine Interpretation (S. 145). Astr. Journ. 24, Heft 2 und 3, 1947.
(Б.А.Воронцов-Вельяминов, Бело-голубая последовательность на диаграмме Рессела (стр. 83) и Интерпретация бело-голубой последовательности на диаграмме Рессела (стр. 145). АЖ 24, вып. 2 и 3, 1947.)

[44] B. A. Woronzow-Weljaminow, Graphische Darstellungen zur Bestimmung der Sterntemperaturen nach der Methode von Zanstra. Astr. Journ. 24, 201, 1947.
(Б.А.Воронцов-Вельяминов, Графики для определения температур звезд по методу Цанстра. АЖ 24, 201, 1947.)

[45] W. W. Sobolew, Über die Elektronentemperaturen planetarischer Nebel und die Temperaturen ihrer Zentralsterne. Veröffentlichungen der Leningrader Staatl. Universität Nr. 82, 1941.
(В.В.Соболев, Об электронных температурах планетарных туманностей и температурах их ядер. Ученые записки ЛГУ, No. 82, 1941.)

[46] G. A. Shain, Note on Intensity Decrement of Balmer lines in Gaseous Nebulae. Zirkular des Observatoriums in Pulkowo Nr. 11, 1934.

[47] W. W. Sobolew, Der Strahlungsdruck in expandierenden Nebeln. Astr. Journ. **21**, Heft 4, 1944.
(В. В. Соболев, Световое давление в расширяющейся туманности. АЖ **21**, вып. 4, 1944.)

[48] E. R. Mustel, Über die Entstehung des diffusen Funken- und des Orion-Spektrums bei Neuen Sternen. Astr. Journ. **24**, 97, 1947, Astr. Journ. **24**, 155, 1947.
(Э. Р. Мустель, О происхождении диффузно-искрового и орионова спектра у новых звезд. АЖ **24**, 97, 1947. АЖ, **24**, 155, 1947.)

[49] E. R. Mustel, Über die Interpretation negativer Beschleunigungen, charakteristisch für einige Absorptionssysteme in den Nova-Spektren. Astr. Journ. **24**, 280, 1947, Astr. Journ. **25**, 11, 1948.
(Э. Р. Мустель, Об интерпретации отрицательных ускорений, характеризовавших некоторые абсорбционные системы в спектрах новых звезд. АЖ **24**, 280, 1947. АЖ **25**, 11, 1948.)

[50] E. R. Mustel, Untersuchungen zur Frage des Ausstoßes von Materie durch Neue Sterne nach deren Helligkeitsmaximum. Nachrichten des Krim-Observatoriums I, Teil 2, 91, 1948.
(Э. Р. Мустель, Исследование вопроса о выбрасывании материи новыми звездами после максимума блеска, Известия КАО, I, част 2, 91, 1948.)

[51] W. W. Sobolew, Das Leuchten der Nebelhüllen bei Nichtvorhandensein von Strahlungsgleichgewicht. Deutsche Übersetzung in: Sowj.-Wiss., Naturwiss. Abtl. **4**, 415, 1951.

[52] L. E. Gurewitsch und A. I. Lebedinski, Explosionen innerhalb von Sternen durch Kernreaktionen als mögliche Ursache der Ausbrüche von Novae und Supernovae (Nr. 1) und periphere Explosionen in Sternen, die durch Kernreaktionen hervorgerufen werden (Nr. 2). Berichte der Akad. d. Wiss. d. UdSSR **56**, Nr. 1, 2, 1947.
(Л. Э. Гуревич и А. И. Лебединский, Взрывы в звездах, обусловленные ядерными реакциями, как возможная причина вспышек новых и сверхновых звезд (No. 1) и Периферические взрывы в звездах, обусловленные ядерными реакциями (No. 2). Доклады АН СССР **56**, No. 1, 2, 1947.)

[53] E. R. Mustel, Über das Entstehen von Novaausbrüchen. Nachrichten des Krim-Observatoriums, VI, 144, 1951.
(Э. Р. Мустель, О происхождении вспышек новых звезд, Известия КАО, VI, 144, 1951.)

[54] V. A. Ambarzumjan, Über das Strahlungsgleichgewicht in Wasserstoffhüllen, die Sterne umgeben. Veröffentlichungen der Leningrader Staatl. Universität Nr. 31, 1939.
(В. А. Амбарцумян, О лучевом равновесии водородных оболочек, окружающих звезды, Ученые записки ЛГУ, No. 31, 1939.)

[55] C. Beals, Spectrophotometric studies of Wolf-Rayet-stars and Novae; Publ. Dom. Aph. Obs., Victoria **6**, Nr. 9, 1934.

[56] W. W. Sobolew, Über die Intensität der Emissionslinien in den Spektren früher Sterne. Astr. Journ. **24**, 1, 1947.
(В. В. Соболев, Об интенсивности эмиссионных линий в спектрах звезд ранних классов. АЖ **24**, 1, 1947.)

[57] W. W. Sobolew, In Bewegung befindliche Hüllen von Sternen. Verlag der Leningr. Staatl. Univ., 1947.
(В. В. Соболев, Движущиеся оболочки звезд. Издательство ЛГУ, 1947.)

[58] V. A. Ambarzumjan, On the intensities of λ 4686 and Hβ in the Wolf-Rayet-Stars. Zirkular des Pulkowo-Observatoriums Nr. 7, 1, 1939.

[59] B. A. Woronzow-Weljaminow, Intensitäten und photometrischer Effekt der Emissionsbanden in den Spektren von 6 Wolf-Rayet-Sternen und ihre Temperatur. Astr. Journ. **23**, 1, 1946.
(Б. А. Воронцов-Вельяминов, Интенсивности и фотометрический эффект ярких полос в спектрах шести звезд Волф-Райе и их температура. АЖ **23**, 1, 1946.)

[60] Sammlung „30 Jahre Astronomie in der UdSSR". Herausgegeben von M. S. Swerew, P. P. Parenago und A. B. Sewerny, Moskau 1948.
(Сборник „Астрономия в СССР за тридцать лет", под ред. М. С. Зверева, П. П. Паренаго и А. Б. Северного. Гостехиздат, 1948.)

[61] V. A. Ambarzumjan, Über die Ionisation der Nebelhüllen, die Sterne umgeben. MN. 95, 469, 1935.
(В. А. Амбарцумян, Об ионизации небулярных оболочек, окружающих звезды. MN, 95, 469, 1935.)

[62] Sch. G. Gordeladse, Über die Anwendung der Zanstra-Methode zur Temperaturbestimmung der von einer Gashülle kleineren Umfangs umgebenen Sterne. Zeitschr. f. Astrophysik **13**, 48, 1936.

[63] W. Petri, Spectrophotometric gradients of some Wolf-Rayet-, O- und B-Stars. Publ. Dom. Obs., Victoria, **7**, Nr. 25, 1947.

[64] D. Barbier, D. Chalonge, Intensités totales des raies de l'hydrogène et du calcium ionisé dans les spectres stellaires, Ann. d'Aph. **4**, 1, 1941.

[65] W. G. Gorbazki, Die Ionisation in ausgedehnten Sternhüllen. Veröffentlichungen der Leningr. Staatl. Univ. Nr. 136, 1950.
(В. Г. Горбацкий, Ионизация в протяженных оболочках звезд. Ученые записки ЛГУ, No. 136, 1950.)

[66] W. G. Gorbazki, Deutung der Änderungen des Spektrums von γ Cass. Astr. Journ. **26**, 5, 1949.
(В. Г. Горбацкий, Интерпретация изменений спектра γ Кассиопеи. АЖ **26**, 5, 1949.)

[67] S. Chandrasekhar, On the radiative equilibrium of a stellar atmosphere. Aph. J. **103**, 351, 1946.

[68] W. W. Sobolew, Über die Polarisation von gestreutem Licht, Veröffentlichungen der Leningr. Staatl. Univ. Nr. 116, 1949.
(В. В. Соболев, О поляризации рассеянного света. Ученые записки ЛГУ, No. 116, 1949.)

[69] W. A. Dombrowski, Über die Polarisation der Strahlung früher Sterne. Berichte d. Akad. d. Wiss. der Armenischen SSR, X, Nr. 5, 1949.
(В. А. Домбровский, О поляризации излучения звезд ранних спектральных типов. Доклады АН Армянской ССР, X, No. 5, 1949.)

[70] W. A. Dombrowski, Untersuchung der Polarisation des Lichts der Sterne der Assoziation Ceph I, Berichte d. Akad. d. Wiss. der Armenischen SSR, XII, Nr. 4, 1950.
(В. А. Домбровский, Изучение поляризации света звезд в области, звездной ассоциации Цефей I. Доклады АН Армянской ССР, XII, No. 4, 1950.)

[71] G. A. Schain, Über die Emissionslinien des Wasserstoffs in den Spektren langperiodischer Veränderlicher. Z. f. Astroph. **10**, 73, 1936.

[72] G. A. Schain, Die Natur des Emissionsspektrums langperiodischer Veränderlicher. Nachrichten der Akad. d. Wiss. d. UdSSR, physikalische Reihe, **9**, Nr. 3, 1945.
(Г. А. Шайн, Природа эмиссионного спектра долгопериодических переменных звезд. Известия АН СССР, серия физическая, **9**, No. 3, 1945.)

[73] V. A. Ambarzumjan, Die Entwicklung der Sterne und der Astrophysik. Deutsche Übersetzung in: Abh. d. sowj. Astr. I, Verl. Kultur und Fortschritt, Berlin 1951.

[74] V. A. Ambarzumjan, Sternassoziationen. Deutsche Übersetzung in: Abh. d. sowj. Astr. I, Verl. Kultur und Fortschritt, Berlin 1951.

[75] V. A. Ambarzumjan und B. E. Markarjan, Die Sternassoziation um P Cygni. Deutsche Übersetzung in: Abh. d. sowj. Astr. I, Verl. Kultur und Fortschritt, Berlin 1951.

[76] P. P. Parenago und A. G. Massewitsch, Die Masse-Leuchtkraft-Radius-Beziehung. Vgl. Astr. Journ. **3**, 137, 1950 und 4, 202, 1950; Deutsche Übersetzung in: Abh. d. sowj. Astr. II, Verl. Kultur und Fortschritt, Berlin 1951.

[77] K. F. Herzfeld, Kinetische Theorie der Materie. Lehrb. d. Physik, Müller-Ponillets, III. Bd. 2. Hälfte, Braunschweig 1925.

[78] W. W. Sobolew, Zum Problem der diffusen Reflexion und Transmission des Lichts. Nachrichten der Akad. d. Wiss. d. UdSSR **69**, 4, 1949.
(В. В. Соболев, К задаче о диффузном отражении и пропускании света. Доклады АН СССР **69**, 4, 1949.)

[79] W. W. Sobolew, Über die Lichtstreuung in der Erd- und den Planetenatmosphären. Veröffentlichungen der Leningr. Staatl. Univ. Nr. 116, 1949.
(В. В. Соболев, О рассеянии света в атмосферах Земли и планет. Ученые записки ЛГУ, No. 116, 1949.)

[80] K. Schifrin, Die Lichtstreuung in einem trüben Medium. Moskau 1951.
(К. Шифрин, Рассеяние света в мутной среде. Гостехиздат, 1951.)

[81] G. A. Schain und W. F. Haase, Über Vorzugsrichtungen von Fasern und anderen Struktureinzelheiten in Gasnebeln. Veröffentlichungen d. Akad. d. Wiss. d. UdSSR **82**, 6, 1952.
(Г. А. Шайн и В. Ф. Гаазе, О преимущественной ориентации волокон и других структурных деталей в газовых туманностях. Доклады АН СССР, **82**, 6, 1952.)

NAMEN- UND SACHREGISTER

Na trium 997	12 Mg Magnesium 24,32	13 Al Aluminium 26,97	14 Si Silizium 28,06	15 P Phosphor 30,98	16 S Schwefel 32,06	17 Cl Chlor 35,457			
Ka lium 096	20 Ca Kalzium 40,08	21 Sc Skandium 45,10	22 Ti Titan 47,90	23 V Vanadium 50,95	24 Cr Chrom 52,01	25 Mn Mangan 54,93	26 Fe Eisen 55,85	27 Co Kobalt 58,94	28 Ni Nickel 58,69
29 Cu Kupfer 63,57	30 Zn Zink 65,38	31 Ga Gallium 69,72	32 Ge Germanium 72,60	33 As Arsen 74,91	34 Se Selen 78,96	35 Br Brom 79,916			
Rb bidium 48	38 Sr Strontium 87,63	39 Y Yttrium 88,92	40 Zr Zirkon 91,22	41 Nb Niob 92,91	42 Mo Molybdän 95,95	43 Tc Technecium 99	44 Ru Ruthenium 101,7	45 Rh Rhodium 102,91	46 Pd Palladium 106,71
47 Ag Silber 107,880	48 Cd Kadmium 112,41	49 In Indium 114,76	50 Sn Zinn 118,70	51 Sb Antimon 121,76	52 Te Tellur 127,61	53 J Jod 126,92			
Cs sium 2,91	56 Ba Barium 137,36	57 La* Lanthan 138,92	72 Hf Hafnium 178,6	73 Ta Tantal 180,88	74 W Wolfram 183,92	75 Re Rhenium 186,31	76 Os Osmium 190,2	77 Ir Iridium 193,1	78 Pt Platin 195,23
79 Au Gold 197,2	80 Hg Quecksilber 200,61	81 Tl Thallium 204,39	82 Pb Blei 207,21	83 Bi Wismut 209,00	84 Po Polonium 210	85 At Astatin 210			

